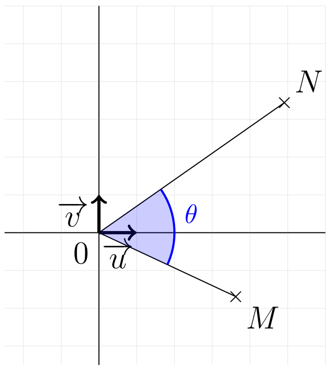
CH IX : Espaces préhilbertiens réels

Avant-propos

- En spécialité mathématiques (classe de première), un chapitre est dédié à la géométrie plane. On définit dans celui-ci la notion de produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ (à l'aide de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus), de norme, d'orthogonalité.
- Rappelons brièvement comment on définit la notion de produit scalaire en classe de 1ère. Soit $(M, N) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
  Notons $\theta = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ l'angle non orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$. Notons enfin $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}_c}$ le produit scalaire associé à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.



  Par définition du produit scalaire :

$$\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \right\rangle_{\mathscr{B}_c} = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| \times \left\| \overrightarrow{ON} \right\| \times \cos(\theta)$$

- Dans ce chapitre :
  - × on généralise la notion de produit scalaire à un espace vectoriel réel quelconque,
  - × on en déduit alors la notion de norme,
  - × on en déduit aussi celle d'orthogonalité, de projections orthogonales et de bases orthonormales.

I. Produit scalaire et norme associée

I.1. Notion de produit scalaire

Définition

Soit E un espace vectoriel RÉEL.

- On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que φ est :
  a) **une forme bilinéaire**
  Autrement dit, l'application φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est linéaire par rapport à chacune des variables :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall y \in E,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x_1, x_2) \in E \times E \\ \varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_1 \cdot x_2, y) = \lambda_1\ \varphi(x_1, y) + \lambda_2\ \varphi(x_2, y) \end{array}} \quad \textit{(linéarité à gauche)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in E,\ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (y_1, y_2) \in E \times E \\ \varphi(x, \mu_1 \cdot y_1 + \mu_1 \cdot y_2) = \mu_1\ \varphi(x, y_1) + \mu_2\ \varphi(x, y_2) \end{array}} \quad \textit{(linéarité à droite)}$$

  b) **symétrique** $\boxed{\forall (x, y) \in E \times E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)}$

  c) **définie positive**

$$\boxed{\forall x \in E,\ \ \varphi(x, x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E} \quad \textit{(définie)}$$

$$\boxed{\forall x \in E,\ \ \varphi(x, x) \geqslant 0} \quad \textit{(positive)}$$

- Si φ est un produit scalaire, alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, le produit scalaire de x et de y (c'est-à-dire le réel $\varphi(x, y)$) est souvent noté :

$$\langle x, y \rangle \ \texttt{OU}\ (x \,|\, y) \ \texttt{OU}\ x \cdot y \ \left(\begin{array}{l} \textit{attention à cette notation : ne pas la} \\ \textit{confondre avec la multiplication scalaire } \cdot_E \end{array} \right)$$

Remarque

La bilinéarité de φ permet d'affirmer que pour tout $y_0 \in E$, l'application $\varphi_{y_0} : x \mapsto \varphi(x, y_0)$ est une forme linéaire. En particulier : $\varphi(0_E, y_0) = \varphi_{y_0}(0_E) = 0$.

I.2. Produits scalaires usuels

I.2.a) Produit scalaire associé à une base en dimension finie

Théorème 1.

Soit E un espace vectoriel RÉEL.

On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- *L'application :* $\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}} & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \end{array}$
  est un produit scalaire sur E, appelé produit scalaire associé à la base $\mathscr{B}$.
- *Ce produit scalaire est dit canonique si E est un espace vectoriel de référence et que $\mathscr{B}$ est la base canonique de E.*

Remarque

- Rappelons tout d'abord que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est la matrice qui contient les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Si x a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et y a pour coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ alors :
$$\langle x, y \rangle_{\mathscr{B}} \ = \ \sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k$$
- Rappelons aussi que tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de $\{0_E\}$ possède une infinité de bases. Il n'y a donc pas lieu de parler de « la base » d'un espace vectoriel. Parmi les espaces vectoriels de référence (et seulement ceux-là !), à savoir $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, on distingue une base particulière dite **canonique**. On liste ci-après les produits scalaires associés à ces bases.

I.2.b) Produits scalaires canoniques sur les espaces vectoriels de référence

***1.* Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$**

$$\boxed{\forall x = (x_1, \ldots, x_n),\ \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, y \rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k}$$

***2.* Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$**

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \langle A, B \rangle \ = \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \times b_{i,j} \ = \ \mathrm{tr}({}^tAB) \end{array}}$$

***3.* Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}_n[X]$**

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k \in \mathbb{R}_n[X], \forall Q = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot X^k \in \mathbb{R}_n[X], \\ \langle P, Q \rangle \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k \times b_k \end{array}}$$

Remarque

- On peut s'interroger sur l'existence d'un produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple $\Big((u_n), (v_n)\Big) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ce produit scalaire serait défini par :
$$\langle (u_n), (v_n) \rangle \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \times v_k$$
  Ce produit scalaire n'est pas correctement défini. En effet, il existe des couples $\Big((u_n), (v_n)\Big)$ pour lesquels la série $\sum u_n \times v_n$ est divergente (prendre le cas de deux suites constantes non nulles par exemple).
- En assurant la convergence de la série présente dans cette définition, on assure la bonne définition de ce produit scalaire. Cela peut se faire en restreignant la définition précédente à l'ensemble :
$$\ell^2(\mathbb{N}) \ = \ \Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum \ (u_n)^2 \text{ converge}\Big\}$$

- Afin de vérifier la bonne définition, il faut :
  - × tout d'abord de démontrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).
  - × ensuite démontrer que $\langle (u_n), (v_n) \rangle$ est bien défini pour tout couple $\Big((u_n), (v_n)\Big) \in \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N})$.

  Pour démontrer ce dernier point, on remarque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\big(|u_n| - |v_n|\big)^2 \geqslant 0$$
  Ainsi :
  $$|u_n|^2 - 2\,|u_n| \times |v_n| + |v_n|^2 \ \geqslant\ 0$$
  On en déduit : $|u_n| \times |v_n| \ \leqslant\ \dfrac{1}{2}\Big(|u_n|^2 + |v_n|^2\Big)$.
  Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n \times v_n$ est (absolument) convergente.

I.2.c) Produits scalaires non canoniques sur les espaces vectoriels de référence

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un n-uplet de réels deux à deux distincts.

On considère l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ définie par :

$$\begin{array}{rccccl} \langle \cdot\,|\,\cdot \rangle & : & \mathbb{R}_n[X] & \times & \mathbb{R}_n[X] & \to \ \mathbb{R} \\ & & (\ P & , & Q\ ) & \mapsto \ \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k) \times Q(a_k) \end{array}$$

1) Démontrer que $\langle \cdot, \ \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

2) Démontrer que $\langle \cdot, \ \cdot \rangle$ est le produit scalaire associé à la *base de Lagrange* $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ relative aux scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Exercice

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on note : $\langle P, Q \rangle \ = \ \displaystyle\int_0^1 P(t)\ Q(t)\ dt$.

Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Exercice

On note $u = (1, -1)$, $v = (1, 1)$ et $w = (1, 0)$.

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B}_2 = (v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x)$.

b) En déduire l'expression de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}_2}$.

3. Reprendre les questions précédentes avec $\mathscr{B}_1 = (u, v)$.

I.2.d) Produit scalaire sur un espace vectoriel de fonctions

Théorème 2.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit I un intervalle d'extrémités a et b.
($I = [a, b]$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou $I =]a, b[$)

Notons $E = L^2(I, \mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I, continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Rappelons qu'une fonction f est dite intégrable sur un intervalle I si :
- × *elle est continue par morceaux sur I,*
- × *son intégrale sur I est absolument convergente.*

Une fonction f est de carré intégrable si la fonction f^2 l'est.

1) *Pour tout $(f, g) \in E \times E$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ g(t)\ dt$ est convergente.*
On note alors $\langle f, g \rangle$ cette intégrale.

2) *L'ensemble E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (plus précisément : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$).*

3) *L'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ ainsi définie est un produit scalaire sur E.*

Démonstration.

1) Soit $(f,g) \in E \times E$. Remarquons : $\big(|f| - |g|\big)^2 \geqslant 0$. Ainsi :

$$|f|^2 - 2\ |f| \times |g| + |g|^2 \ \geqslant\ 0$$

On en déduit : $|f| \times |g| \ \leqslant\ \dfrac{1}{2}\ \Big(|f|^2 + |g|^2\Big)$.
Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b\ f(t) \times g(t)\ dt$ est (absolument) convergente.

2) × $E \subset \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$

× $E \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})} \in E$.
En effet, la fonction nulle est de carré intégrable sur I.

× Démontrons que E est stable par combinaison linéaire
Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(f,g) \in E^2$. Démontrons : $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in E$.
La fonction $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est :

– continue sur I en tant que combinaison linéaire de fonctions continues sur I.

– de carré intégrable sur I. En effet, la fonction $\big(\lambda \cdot f + \mu \cdot g\big)^2$ vérifie :

$$\big(\lambda \cdot f + \mu \cdot g\big)^2 \ =\ \lambda^2 \cdot f^2 + 2\ \lambda\, \mu \cdot fg + \mu^2 \cdot g^2$$

Elle s'écrit donc comme une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I (f^2, fg et g^2).

3) L'application $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ est :

a) bilinéaire,

b) symétrique,

c) définie positive. En effet, pour tout $f \in E$:

× $\langle f, f \rangle = \displaystyle\int_a^b\ f^2(t)\ dt\ \geqslant\ 0$

× si $\langle f, f \rangle = 0$ alors, comme f^2 est continue sur I alors $f^2 = 0$ et ainsi $f = 0$. □

I.2.e) Les applications bilinéaires symétriques ne sont pas toutes des produits scalaires

Exemple

Soit Ω un ensemble fini.

On note $\mathcal{V}_d$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω.

On note enfin φ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcccccl} \varphi & : & \mathcal{V}_d & \times & \mathcal{V}_d & \to & \mathbb{R} \\ & & (\ X & , & Y\ ) & \mapsto & \mathbb{E}(XY) \end{array}$$

- Il est simple de démontrer que l'application φ est une forme bilinéaire symétrique (même si ce n'est pas utile de le remarquer vu ce qui quit).
- En revanche, l'application φ `N`'est `PAS` définie positive $(*)$.
  On en conclut que l'application φ `N`'est `PAS` un produit scalaire.
  $(*)$ Soit $X \in \mathcal{V}_d$. Alors :
  × $\varphi(X,X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) \geqslant 0$.
  × si on suppose de plus $\varphi(X,X) = 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & \mathbb{E}\left(X^2\right) & \\ & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}\big(\,\{X = x\}\,\big) & \textit{(par théorème de transfert)} \end{array}$$

Comme $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ est une somme de termes positifs, elle est nulle si tous ses termes le sont. Ainsi, pour tout $x \in X(\Omega)$:

$$x^2 \times \mathbb{P}\big(\,\{X = x\}\,\big) = 0$$

et donc : $x^2 = 0$ `OU` $\mathbb{P}\big(\,\{X = x\}\,\big) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in X(\Omega) \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}\big(\,\{X = x\}\,\big) = 0$. Puis : $\mathbb{P}\big(\,\{X = 0\}\,\big) = 1$ (puisque la famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événement.

- On démontre ainsi que la variable X est nulle **presque sûrement**. Cela `NE` démontre `PAS` que la variable aléatoire X est nulle. Par exemple, une variable aléatoire X dont la loi est définie par :
  × $X(\Omega) = \{0, \sqrt{2}\}$,
  × $\mathbb{P}\big(\{X=0\}\big) = 1$ et $\mathbb{P}\big(\{X=\sqrt{2}\}\big) = 1$,

  est une variable alétoire non nulle mais presque sûrement nulle.
- On pourrait aussi considérer l'expérience consistant en une succession infinie de lancers de pièces. On considère alors la variable aléatoire X qui prend pour valeur 1 si tous les lancers donnent Pile et qui prend pour valeur 0 sinon. Cette variable aléatoire est presque sûrement nulle mais non nulle.

I.3. Notion d'espace préhilbertien / espace euclidien

Définition

Soit E un ensemble.

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ si :
  × E un espace vectoriel `RÉEL`.
  × E est de dimension finie.
  × $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

Remarque

- Dans le programme officiel, on trouve le terme d'**espace préhilbertien**. Un espace préhilbertien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ si :
  × E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
  × E n'est pas forcément de dimension finie.
  × $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

  De manière générale, les espaces préhilbertiens ne sont pas des espaces euclidiens. Les espaces euclidiens sont des espaces préhilbertiens particulier. Plus précisément, les espaces euclidiens sont exactement les espaces préhilbertiens réels de dimension finie.
- Si E est un espace vectoriel `RÉEL` de dimension finie de base notée $\mathscr{B}$, on a vu dans le Théorème 1 que l'on peut munir E du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}}$ défini par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle x \,|\, y\rangle_{\mathscr{B}} \; = \; {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$$

  Ainsi, tout espace vectoriel `RÉEL` de dimension finie peut donc être muni, via le choix d'une base, d'une structure d'espace euclidien.

I.4. Norme associée à un produit scalaire

Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

- On appelle **norme (euclidienne)** associée à un produit scalaire $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ sur E l'application $\|\cdot\|$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\| : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

  En particulier : $\boxed{\forall x \in E, \ \|x\|^2 \; = \; \langle x \,|\, x\rangle}$

I.5. Propriétés des produits scalaires et des normes euclidiennes

I.5.a) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 3.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.

- $\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \ \big| \langle x, y \rangle \big| \ \leqslant \ \|x\| \ \|y\|}$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*

  Ce qu'on peut aussi écrire :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \langle x, y \rangle \times \langle x, y \rangle \ \leqslant \ \langle x, x \rangle \times \langle y, y \rangle}$$

- *On peut de plus caractériser le cas d'égalité.*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \boxed{\begin{array}{rcl} \big| \langle x, y \rangle \big| \ = \ \|x\| \ \|y\| & \Leftrightarrow & x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ & \Leftrightarrow & \begin{array}{l} \exists \alpha \in \mathbb{R}, \ x = \alpha \cdot y \\ \texttt{OU} \ \ \exists \beta \in \mathbb{R}, \ y = \beta \cdot x \end{array} \end{array}}$$

Remarque

- Il est important de savoir repérer l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. C'est parfois relativement évident : on demande de démontrer une égalité et le même motif apparaît une fois d'un côté et deux fois de l'autre.

  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \right)^2 \ \leqslant \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

  $\forall f \in \mathscr{C}_m^0\big([a,b], \mathbb{R}\big), \ \forall g \in \mathscr{C}_m^0\big([a,b], \mathbb{R}\big),$

$$\left(\int_a^b f(t) \times g(t) \ dt \right)^2 \ \leqslant \ \left(\int_a^b f(t)^2 \ dt \right) \times \left(\int_a^b g(t)^2 \ dt \right)$$

- L'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz peut paraître parfois un peu moins évident.

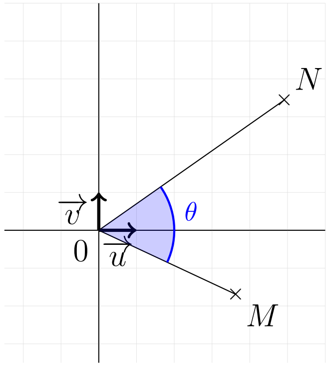
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \ \leqslant \ n \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$$

  (on choisit $(y_1, \ldots, y_n) = (1, \ldots, 1)$ dans l'inégalité du point précédent)

Remarque

- Revenons au cas du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$. Soit $(M, N) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Notons $\theta = \big(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\big)$ l'angle non orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$.

  Notons enfin $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}_c}$ le produit scalaire associé à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.



  Par définition du produit scalaire :

$$\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \right\rangle_{\mathscr{B}_c} \ = \ \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| \times \cos(\theta)$$

  On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcll} \left| \left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \right\rangle_{\mathscr{B}_c} \right| & = & \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| \times |\cos(\theta)| & \\ & \leqslant & \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| & \textit{(car } \cos(\theta) \in [-1,1]\textit{)} \end{array}$$

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in E^2$. Deux cas se présentent.
  - × Si $\|x\| = 0$ ou $\|y\| = 0$
    Supposons par exemple $\|x\| = 0$ (si ce n'est pas le cas, $\|y\| = 0$ et ce cas se traite de manière similaire). Alors $\langle x, x\rangle = 0$ et donc $x = 0_E$.
    On a alors :
    $$|\ \langle x, y\rangle\ | \ = \ |\ \langle 0_E, y\rangle\ | \ = \ 0 \ \leqslant \ 0 \ = \ \|0_E\|\ \|y\| \ = \ \|x\|\ \|y\|$$
  - × Sinon (c'est-à-dire si $\|x\| \neq 0$ et $\|y\| \neq 0$)
    Tout d'abord : $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geqslant 0$. Or :
    $$\begin{aligned} & \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\ = \ & \left\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ = \ & \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle - \left\langle \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + \left\langle \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ = \ & \frac{\langle x, x\rangle}{\|x\|^2} - \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|} - \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|\ \|x\|} + \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|^2} \\ = \ & 1 - 2\ \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|} + 1 \end{aligned}$$
    On en déduit : $2 \ \geqslant \ 2\ \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}$ et ainsi : $\cancel{2}\ \langle x, y\rangle \ \leqslant \ \cancel{2}\ \|x\|\ \|y\|$.
    $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle \ \leqslant \ \|x\|\ \|y\|}$$
    En appliquant cette inégalité au couple $(x, -y)$, on obtient :
    $$\langle x, -y\rangle \ \leqslant \ \|x\|\ \|-y\| \ = \ \|x\|\ \|y\|$$
    On en déduit : $-\langle x, y\rangle \ \leqslant \ \|x\|\ \|y\|$ et ainsi : $-\|x\|\ \|y\| \ \leqslant \ \langle x, y\rangle$.

- Traitons maintenant le cas d'égalité. Soit $(x, y) \in E^2$.

  ($\Leftarrow$) Supposons que x et y sont colinéaires.
  Plus précisément, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha \cdot y$ (si ce n'est pas le cas, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $y = \beta \cdot x$ et ce cas se traite de manière similaire). Dans ce cas :
  $$\|\, y \,\|^2 \ = \ \|\, \alpha \cdot x \,\| \ = \ \langle \alpha \cdot x, \alpha \cdot x\rangle \ = \ \alpha^2\ \langle x, x\rangle \ = \ \alpha^2\ \|x\|^2$$
  Et ainsi : $\|\, y \,\| \ = \ |\alpha|\ \|x\|$. Finalement :
  $$\begin{aligned} |\ \langle x, y\rangle\ | \ &= \ |\ \langle x, \alpha \cdot x\rangle\ | \\ &= \ |\ \alpha\ \langle x, x\rangle\ | \\ &= \ |\ \alpha\ |\ \|x\|^2 \\ &= \ |\ \alpha\ |\ \|x\| \times \|x\| \\ &= \ \|y\| \times \|x\| \end{aligned}$$

  ($\Rightarrow$) Supposons $|\ \langle x, y\rangle\ | \ = \ \|x\|\ \|y\|$. Deux cas se présentent.
  - × Si $\|x\| = 0$ ou $\|y\| = 0$
    Supposons par exemple $\|x\| = 0$ (le cas $\|y\| = 0$ se traite de manière similaire). Alors $x = 0_E = 0 \cdot y$.
  - × Sinon (c'est-à-dire si $\|x\| \neq 0$ et $\|y\| \neq 0$)
    Deux nouveaux cas se présentent.
    - Si $\langle x, y\rangle \geqslant 0$. Remarquons :
    $$\begin{aligned} |\ \langle x, y\rangle\ | \ = \ \|x\|\ \|y\| \ &\Leftrightarrow \ \langle x, y\rangle \ = \ \|x\|\ \|y\| \\ &\Leftrightarrow \ \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} = 0_E \\ &\Leftrightarrow \ x = \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y \end{aligned}$$

– Si $\langle x, y\rangle < 0$. Remarquons :

$$\begin{aligned} |\ \langle x, y\rangle\ | \ = \ \|x\|\,\|y\| \quad &\Leftrightarrow \quad -\langle x, y\rangle \ = \ \|x\|\,\|y\| \\ &\Leftrightarrow \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y \end{aligned}$$

□

Remarque

- Dans la démonstration, on fait apparaître les quantités $\dfrac{x}{\|x\|}$ et $\dfrac{y}{\|y\|}$.
  Ces deux vecteurs sont de normes 1. En effet :
  $$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \ = \ \frac{1}{\|x\|}\ \|x\| \ = \ 1$$
  On retiendra que pour travailler avec des vecteurs de norme 1, il suffit de multiplier le vecteur par l'inverse de sa norme (si celle-ci est non nulle).
- On a mis l'accent dans le point précédent sur la quantité $\dfrac{x}{\|x\|}$.
  Faire apparaître cette quantité dans la démonstration nous oblige à vérifier $x \neq 0_E$ et ainsi à raisonner par disjonction de cas. On aurait pu l'éviter en calculant plutôt : $\|\ \|y\| \cdot x - \|x\| \cdot y\ \|^2$ (le reste de la démonstration est similaire).
- Il est important de savoir développer les normes carrées de combinaisons linéaires de vecteurs. On liste ci-après des identités remarquables qu'il faut connaître (ou savoir retrouver immédiatement).

Une autre démonstration usuelle

1) • Soit $(x, y) \in E^2$. Considérons la fonction $f : t \mapsto \|\, t \cdot x + y\,\|^2$.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \|\, t \cdot x + y\,\|^2 \\ &= \langle t \cdot x + y, t \cdot x + y\rangle \\ &= \langle t \cdot x \,|\, t \cdot x\rangle \ + \ \langle t \cdot x, y\rangle \ + \ \langle y, y\rangle \\ &\qquad\qquad\quad + \ \langle y, t \cdot x\rangle \\ &= t^2\ \|x\|^2 \ + \ 2t\ \langle x, y\rangle \ + \ \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2\ t^2 + 2\ \langle x, y\rangle\ t + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est polynomiale de degré 2.
On note P le polynôme de degré 2 associé.

• Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = \|\, t \cdot x + y\,\|^2 \geqslant 0$.
Cette fonction polynomiale étant de signe constant, on en déduit que le discriminant de P est de signe négatif. Or :

$$\Delta \ = \ \big(2\ \langle x, y\rangle\,\big)^2 - 4\|x\|^2\,\|y\|^2 \ = \ 4\ \big(\,\langle x, y\rangle\,\big)^2 - 4\ \|x\|^2\,\|y\|^2$$

Et enfin : $\Delta \leqslant 0 \ \Leftrightarrow\ \cancel{4}\ \big(\,\langle x, y\rangle\,\big)^2 \ \leqslant\ \cancel{4}\ \|x\|^2\,\|y\|^2$

2) Déterminons maintenant sous quelle condition a lieu l'égalité de l'énoncé.

$$\begin{aligned} & \big(\,\langle x, y\rangle\,\big)^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \Delta = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \text{Le polynôme } P \text{ admet une unique racine } \lambda \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & \exists!\, \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \exists!\, \lambda \in \mathbb{R},\ \|\, \lambda \cdot x + y\,\|^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \exists!\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot x + y = 0_E \\ \Leftrightarrow\quad & x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

I.5.b) Identités remarquables

Théorème 4.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

1. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 \ = \ \|x\|^2 + 2\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2}$ *(identité remarquable)*

On en déduit : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x-y\|^2 \ = \ \|x\|^2 - 2\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2}$

2. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \ = \ 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2}$ *(identité du parallélogramme)*

3.
$$\boxed{\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle \ &= \ \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\end{aligned}}$$
(identités de polarisation)

Démonstration.

1. Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 \ &= \ \langle x+y, x+y\rangle\\ &= \ \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle\\ &= \ \|x\|^2 + 2\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \qquad \textit{(par symétrie)}\end{aligned}$$

En appliquant l'égalité précédente au couple $(x, -y)$, on obtient :

$$\|x+y\|^2 \ = \ \|x\|^2 + 2\ \langle x, -y\rangle + \|-y\|^2 \ = \ \|x\|^2 - 2\ \langle x, y\rangle + (-1)^2\ \|y\|^2$$

2. On obtient le résultat en sommant les deux égalités précédentes.

3. • La première ligne n'est qu'une réécriture de l'identité remarquable ***1***.

• On obtient le résultat en faisant la différence des deux égalités du ***1***.

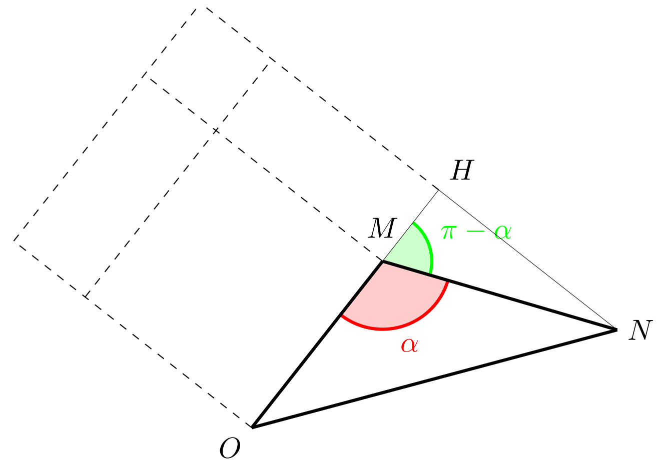
□

Généralisation de la formule de Pythagore

L'identité remarquable : $\|x+y\|^2 \ = \ \|x\|^2 + 2\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2$ doit être vue comme une généralisation de la formule de Pythagore. Plus précisément, si les vecteurs x et y sont orthogonaux (c'est-à-dire si $\langle x, y\rangle = 0$) alors : $\|x+y\|^2 \ = \ \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ce type de résultat a été vu lors de l'enseignement de spécialité en 1ère.

Considérons le triangle OMN ci-dessous.



On note H le projeté orthogonal de N sur (OM). On a alors :

$$OH^2 \ = \ OM^2 + 2 \times MH \times OM + MH^2$$

En ajoutant HN^2 de part et d'autre, on obtient :

$$\big(OH^2 + HN^2\big) \ = \ OM^2 + 2 \times MH \times OM + \big(MH^2 + HN^2\big)$$

On en déduit, par le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}ON^2 \ &= \ OM^2 \ + \ 2 \times OM \times MH \ + \ MN^2\\ &= \ OM^2 \ + \ 2 \times \left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MN}\right\rangle \ + \ MN^2\\ &= \ OM^2 \ + \ 2 \times OM \times MN \times \cos(\pi - \alpha) \ + \ MN^2\\ &= \ OM^2 \ - \ 2 \times OM \times MN \times \cos(\alpha) \ + \ MN^2 \qquad \textit{(formule d'Al-Kashi)}\end{aligned}$$

Remarque

- On appelle norme euclidienne toute norme issue d'un produit scalaire. Les identités listées permettent de faire le lien entre norme euclidienne et produit scalaire. L'identité de polarisation permet notamment de définir le produit scalaire à l'aide de la norme associée à ce produit scalaire.
- Il faut comprendre que la notion de norme existe indépendamment de la notion de produit scalaire. Ce point sera détaillé dans le chapitre « Espaces vectoriels normés ». Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés de homogénéité / séparation / inégalité triangulaire (voir plus loin).
- L'identité du parallélogramme n'est vérifiée que par les normes euclidiennes. C'est même une manière de démontrer qu'une norme est (ou n'est pas !) euclidienne.

I.5.c) Propriétés caractéristiques des normes

Théorème 5.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

1. $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \|\lambda \cdot x\| \ = \ |\lambda|\ \|x\|}$ *(homogénéité d'une norme)*

2. $\boxed{\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E}$ *(propriété de séparation)*

3. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|\, x+y \,\| \ \leqslant\ \|x\| + \|y\|}$ *(inégalité triangulaire)*

On peut de plus caractériser le cas d'égalité.

$$\forall (x,y) \in E,\ \boxed{\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \ \Leftrightarrow\ \begin{array}{l} x = 0_E \\ \texttt{OU}\ \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha \cdot x \end{array}}$$

4. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \ \leqslant\ \|x+y\|}$ *(inégalité triangulaire)*

5. *Les propriétés d'inégalité triangulaire peuvent être résumées comme suit :*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \ \leqslant\ \|x \pm y\| \ \leqslant\ \|x\| + \|y\|}$$

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $x \in E$.

$$\|\, \lambda \cdot x \,\|^2 \ = \ \langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x \rangle \ = \ \lambda^2\ \langle x, x \rangle \ = \ \lambda^2\ \|x\|^2$$

Ainsi : $\|\, \lambda \cdot x \,\| \ = \ \sqrt{\lambda^2\ \|x\|^2} \ = \ \sqrt{\lambda^2}\ \sqrt{\|x\|^2} \ = \ |\lambda|\ \|x\|$.

2. Soit $x \in E$. Supposons $\|x\|| = 0$. Alors : $\|x\||^2 = 0$.
Autrement dit : $\langle x, x \rangle = 0$. On en conclut $x = 0_E$ par propriété de définition des produits scalaires.

3. Soit $(x,y) \in E \times E$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{rl} & \|\, x+y \,\| \ \leqslant\ \|\, x \,\| + \|\, y \,\| \\ \Leftrightarrow & \|\, x+y \,\|^2 \ \leqslant\ \Big(\|\, x \,\| + \|\, y \,\|\Big)^2 \\ \Leftrightarrow & \cancel{\|x\|^2} + 2\ \langle x, y \rangle + \cancel{\|y\|^2} \ \leqslant\ \cancel{\|x\|^2} + 2\, \|\, x \,\|\ \|\, y \,\| + \cancel{\|y\|^2} \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \ \leqslant\ \|\, x \,\|\ \|\, y \,\| \end{array}$$

La dernière propriété est vérifiée (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Il en est donc de même de la première.

Étudions maintenant le cas d'égalité. On l'obtient une nouvelle fois par la démonstration faite lors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{array}{rl} & \|\, x+y \,\| \ = \ \|\, x \,\| + \|\, y \,\| \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \ = \ \|\, x \,\|\ \|\, y \,\| \\ \Leftrightarrow & \|y\| \cdot x = \|x\| \cdot y \end{array}$$

(cf démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

4. Soit $(x,y) \in E \times E$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x+y\| \\ \Leftrightarrow \quad & \big(\, \|x\| - \|y\| \,\big)^2 \leqslant \|x+y\|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \cancel{\|x\|^2} - 2\,\|x\|\,\|y\| + \cancel{\|y\|^2} \leqslant \cancel{\|x\|^2} + 2\,\langle x,y\rangle + \cancel{\|y\|^2} \\ \Leftrightarrow \quad & -\|x\|\,\|y\| \leqslant \langle x,y\rangle \end{aligned}$$

Remarque

- On a démontré :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

En appliquant cette formule au couple $(x,-y)$, on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

- Au passage, on peut démontrer :

$$\begin{aligned} & \|x-y\| = \|x\| + \|y\| \\ \Leftrightarrow \quad & \|x+(-y)\| = \|x\| + \|-y\| \qquad \textit{(car } \|-y\| = \|y\|\textit{)} \\ \Leftrightarrow \quad & \|y\| \cdot x = \|x\| \cdot (-y) \end{aligned}$$

$\square$

Exercice

Soit E un espace vectoriel RÉEL.

Soit $\langle \cdot,\cdot \rangle$ un produit scalaire sur E.

1. ***a)*** Démontrer : $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \|x-y\|$.

(on pourra écrire : $x = \frac{1}{2}\,(x+y) + \frac{1}{2}\,(x-y)$)

b) En déduire : $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x\| + \|y\| \leqslant 2\max\,(\|x+y\|, \|x-y\|)$.

2. ***a)*** Démontrer : $\forall (x,y) \in E^2,\ (\|x\| + \|y\|)^2 \leqslant \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$.

b) En déduire : $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x\| + \|y\| \leqslant \sqrt{2}\,\max\,(\|x+y\|, \|x-y\|)$.

II. Orthogonalité

II.1. Familles orthogonales, familles orthonormales

II.1.a) Définition

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.

Soit $(x, y) \in E^2$.

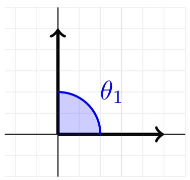
- On dit que les vecteurs x et y sont **orthogonaux** (relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) si $\langle x, y \rangle = 0$. On utilise la notation $x \perp y$ pour signifier que les vecteurs x et y sont orthogonaux.
- On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est **orthogonale** si les éléments de $\mathcal{F}$ sont deux à deux orthogonaux.
- On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **orthonormale** (ou **orthonormée**) si :
  - × la famille $\mathcal{F}$ est orthogonale : $\boxed{\forall (i, j) \in I^2, \big(i \neq j \ \Rightarrow \ \langle u_i, u_j \rangle = 0\big)}$
  - × tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont de norme 1 : $\boxed{\forall i \in I, \langle u_i, u_i \rangle = \|u_i\|^2 = 1}$

  On peut résumer ces propriétés comme suit :

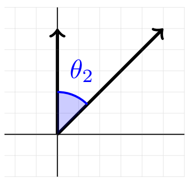
$$\boxed{\text{La famille } (u_i)_{i \in I} \text{ est orthonormale} \ \Leftrightarrow \ \forall (i, j) \in I^2, \ \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}}$$

II.1.b) Généralisation de la notion d'angle droit

- La notion d'orthogonalité est liée au produit scalaire d'étude. Ainsi, deux vecteurs peuvent être orthognaux pour un produit scalaire mais ne pas l'être pour un autre. On peut s'en convaincre en considérant $E = \mathbb{R}^2$.
  - × Si on considère le produit scalaire associé à la base canonique $\mathscr{B}_c = \big((1, 0), (0, 1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$, on retrouve la définition d'orthogonalité vu au lycée : deux vecteurs sont orthogonaux s'ils définissent un angle (non orienté) de 90°.
  $$(a, b) \ \perp_{\mathscr{B}_c} \ (c, d) \ \Leftrightarrow \ ac + bd = 0$$
  En particulier, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.
  - × Si on considère maintenant la base $\mathscr{B} = \big((1, 1), (0, 1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$, alors tout vecteur $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit sous la forme :
  $$u = u_1 \cdot (1, 1) + (u_2 - u_1) \cdot (0, 1)$$
  Ainsi, pour tout $(u, v) \in E^2$:
  $$\begin{array}{rcl} \langle u, v \rangle & = & {}^t\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \\ & = & \begin{pmatrix} u_1 & u_2 - u_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} \\ & = & u_1 \, v_1 + (u_2 - u_1) \, (v_2 - v_1) \\ & = & u_1 \, v_1 + u_2 \, v_2 - u_2 \, v_1 - u_1 \, v_2 + u_1 \, v_1 \\ & = & 2 \, u_1 \, v_1 - u_1 \, v_2 - u_2 \, v_1 + u_2 \, v_2 \end{array}$$
  Ainsi : $(u_1, u_2) \ \perp_{\mathscr{B}} \ (v_1, v_2) \ \Leftrightarrow \ 2 \, u_1 \, v_1 + u_2 \, v_2 \ = \ u_1 \, v_2 + u_2 \, v_1$.
  En particulier, $(1, 1)$ et $(0, 1)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.
- La notion d'orthogonalité (du grec orthos = droit, gônia = angle) dans un espace euclidien généralise celle de la géométrie plane. L'idée est de faire de la géométrie dans les espaces euclidiens et notamment de définir la notion d'angle (droit).



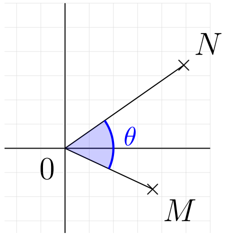
Un angle droit dans l'espace euclidien $\big(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}_c}\big)$



Un angle droit dans l'espace euclidien $\big(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}\big)$

II.1.c) Généralisation de la notion d'angle

- On peut s'inspirer de la géométrie plane pour définir la notion d'angle généralisé (angle dans un espace euclidien).



Par définition du produit scalaire :

$$\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \right\rangle_{\mathscr{B}_c} = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| \times \cos(\theta)$$

Ainsi : $\cos(\theta) = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \right\rangle_{\mathscr{B}_c}}{\|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\|}$ et : $\theta = \arccos\left(\dfrac{\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \right\rangle_{\mathscr{B}_c}}{\|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\|}\right)$.

Dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on peut alors définir l'angle non orienté $\theta_{x,y}$ (valeur comprise dans $[0, \pi]$) entre deux vecteurs non nuls x et y de E par :

$$\theta_{x,y} = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \ \|y\|}\right)$$

En particulier : $\theta_{x,y} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$.

Avec cette définition, les angles θ_1 et θ_2 du schéma précédent sont bien des angles de valeur $\frac{\pi}{2}$.

II.1.d) Des exemples de familles orthogonales

Théorème 6.

Soit E un espace vectoriel RÉEL *de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.*

Soit $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E.

Alors la famille $\mathscr{B}$ est orthogonale (et même orhonormale) pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.

Démonstration.

Remarquons d'abord que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$u_i = 0 \cdot u_1 + \ldots + 0 \cdot u_{i-1} + 1 \cdot u_i + 0 \cdot u_{i+1} + \ldots + 0 \cdot u_n$$

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$. Remarquons :

$$\langle u_i, u_j \rangle_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j \end{cases}$$

Cela démontre que la famille $\mathscr{B}$ est orthonormale. □

Exemple

1. Les bases orthonormales de $\mathbb{R}^2$ relativement au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ sont les familles $(u_\alpha, u_{\alpha \pm \frac{\pi}{2}})$ où $u_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Les matrices symétriques sont orthogonales aux matrices antisymétriques relativement au produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. La famille $(1, X)$ est orthonormale relativement au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$. En revanche, elle n'est pas orthogonale (et donc pas orthonormale non plus) vis-à-vis du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X], \ \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)\ Q(t)\ dt$$

II.2. Intérêt des familles orthogonales

II.2.a) Les familles orthogonales de vecteurs non nuls sont libres

Théorème 7.

Soit $\big(E, \langle \cdot,\cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** *de E est libre.*

Évidemment, toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E. Démontrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$. On suppose : $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot u_k \ = \ 0_E \quad (*)$.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\begin{aligned}
\left\langle u_i, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot u_k \right\rangle &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \ \langle u_i, u_k \rangle && \textit{(par bilinéarité)} \\
&= \lambda_i \ \langle u_i, u_i \rangle && \textit{(car si } i \neq k,\ \langle u_i, u_k \rangle = 0\textit{)} \\
&= \lambda_i \ \|u_i\|^2
\end{aligned}$$

On en déduit, d'après $(*)$: $\lambda_i \ \|u_i\|^2 = \left\langle u_i, \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot u_k \right\rangle = \langle u_i, 0_E \rangle = 0$.

Comme $u_i \neq 0_E$ (par hypothèse), alors $\|u_i\| \neq 0$.
On en déduit alors : $\lambda_i = 0$.

On a démontré : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0$, et ainsi la famille $\mathcal{F}$ est libre.

□

Remarque

- Notons qu'une famille orthogonale peut contenir le vecteur nul. En particulier la famille $(0_E, \dots, 0_E)$ est orthogonale.
- Au contraire, une famille qui contient le vecteur nul n'est jamais libre. Il faut donc faire particulièrement attention en citant ce résultat.

II.2.b) Théorème de Pythagore

Théorème 8.

Soit $\big(E, \langle \cdot,\cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille.

1)
$$\left\| \sum_{k=1}^{p} u_k \right\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \big\langle u_i, u_j \big\rangle = \sum_{i=1}^{p} \big\langle u_i, u_i \big\rangle + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \big\langle u_i, u_j \big\rangle$$

2) *La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale* $\Rightarrow \left\| \sum\limits_{k=1}^{p} u_k \right\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{p} \|u_k\|^2$

Démonstration.

1.
$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{p} u_k \right\|^2 &= \Big\langle \sum_{i=1}^{p} u_i, \sum_{j=1}^{p} u_j \Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} \langle u_i, u_j \rangle \right) && \textit{(par bilinéarité)} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \big\langle u_i, u_j \big\rangle \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant p \\ i = j}} \big\langle u_i, u_j \big\rangle + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant p \\ i \neq j}} \big\langle u_i, u_j \big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} \big\langle u_i, u_i \big\rangle + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \big\langle u_i, u_j \big\rangle
\end{aligned}$$

2. Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale alors pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]$:

$$i \neq j \ \Rightarrow \ \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

Ainsi : $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant p \\ i \neq j}} \big\langle u_i, u_j \big\rangle \ = \ 0$ et : $\| \sum\limits_{k=1}^{p} u_k \|^2 \ = \ \sum\limits_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$. □

II.3. Intérêt des familles orthonormales en dimension FINIE

II.3.a) Expression des coordonnées et du produit scalaire en base orthonormale

Théorème 9.

Soit $\big(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une base de E.

1. $$\boxed{\begin{array}{c}\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base} \\ \text{orthonormale pour } \langle \cdot, \cdot \rangle\end{array} \Leftrightarrow \forall x \in E,\ x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k}$$

Autrement dit, la base $\mathscr{B}$ est orthonormale si et seulement si tout vecteur $x \in E$ a pour coordonnées $\big(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle\big) \in \mathbb{R}^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

2. $$\boxed{\begin{array}{c}\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base} \\ \text{orthonormale pour } \langle \cdot, \cdot \rangle\end{array} \Leftrightarrow \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle = \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}}$$

Ainsi, dans le cas où :

- × *$\mathscr{B}$ est une base orthonormale,*
- × *$x \in E$ a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{B}$,*
- × *$y \in E$ a pour coordonnées $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{B}$,*

alors : $$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i = {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \langle x, y \rangle_{\mathscr{B}}}$$

En particulier : $$\boxed{\|x\| = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Démonstration.

1. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale.
Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{array}{rcll} \langle x, e_i \rangle & = & \left\langle \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k, e_i \right\rangle & \textit{(par définition de } x\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \times \langle e_k, e_i \rangle & \textit{(par linéarité à gauche)} \\ & = & \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k=i}}^{n} x_k \times \langle e_k, e_i \rangle + \cancel{\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} x_k \times \langle e_k, e_i \rangle} & \\ & = & x_i \times \langle e_i, e_i \rangle & \\ & = & x_i & \end{array}$$

Les dernières égalités proviennent du fait que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale.

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $x \in E$: $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En appliquant cette égalité à e_i, il vient :

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle \cdot e_k$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i, e_k \rangle \cdot e_k + (1 - \langle e_i, e_i \rangle) \cdot e_i + \sum_{k=i+1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle \cdot e_k = 0_E$$

Par liberté de la famille $\mathscr{B}$ (on suppose initialement que c'est une base), on en conclut que tous les coefficients de cette relation de dépendance linéaire sont nuls :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \Big(i \neq k \ \Rightarrow\ \langle e_i, e_k \rangle = 0\Big) \quad \text{et} \quad \langle e_i, e_i \rangle = 1$$

Ceci étant vrai pour tout i, la base $\mathscr{B}$ est bien orthonormée.

2. On procède de nouveau par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $\mathscr{B}$ est orthonormale.
Soit $(x,y) \in E^2$. Notons $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ et $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de y dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j \right\rangle && \textit{(par définition de } x \textit{ et } y\textit{)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j \right\rangle && \textit{(par linéarité à gauche)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \ \langle e_i, e_j\rangle \right) && \textit{(par linéarité à droite)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{\substack{j=1\\ j=i}}^{n} y_j \ \langle e_i, e_j\rangle + \cancel{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \ \langle e_i, e_j\rangle} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i && \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est orthonormée)}\\
&= {}^t\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)\\
&= \langle x,y\rangle_{\mathscr{B}}
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $(x,y) \in E \times E$, $\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle_{\mathscr{B}}$
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. En appliquant cette égalité au couple (e_i,e_j), il vient :

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle_{\mathscr{B}} = \delta_{i,j} \ = \ \begin{cases} 0 & \textit{si } i \neq j \\ 1 & \textit{si } i = j \end{cases}$$

(cf Théorème 6)
Cela démontre que la base $\mathscr{B}$ est orthonormale. □

Remarque

- Ce théorème peut être vu comme une bonne ou une mauvaise nouvelle :
  × on peut être un peu déçu qu'il n'y ait que si peu de produits scalaires. Dans un espace vectoriel de dimension finie qui possède une base orthonormée $\mathscr{B}$, tout produit scalaire vérifie :
  $$\forall (x,y) \in E \times E, \langle x,y\rangle = {}^tX \times Y$$
  où $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$.
  Cela signifie qu'un produit scalaire quelconque d'un espace euclidien peut toujours s'écrire, en présence d'une base orthonormale, comme le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ étudié au lycée (celui qui consiste à sommer le produit terme à terme des coefficients).
  × la relative simplicité de l'objet étudié est rassurante.
- Cette remarque est similaire à celle faite sur les applications linéaires. En dimensions finies (de l'espace de départ E comme celui d'arrivée F), toute application linéaire $f : E \to F$ est assimilable à sa matrice représentative relativement à des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ choisies en amont. À isomorphisme de représentation près, une application linéaire ce n'est rien d'autre qu'une application $X \mapsto AX$.
- Le fait que le produit scalaire possède une expression simple ne signifie pas pour autant qu'il est simple d'obtenir cette expression. Cela exige de trouver une base orthonormée (on verra par la suite comment l'obtenir) et de déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.

Exemple

Notons $E = \mathbb{R}_1[X]$. Soient $P = a_0 + a_1 X \in E$ et $Q = b_0 + b_1 X \in E$. Alors :

$$\int_0^1 P(t)\ Q(t)\ dt \ = \ \begin{pmatrix} \frac{2\,a_0+a_1}{2} & \frac{a_1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2\,b_0+b_1}{2} \\ \frac{b_1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

En effet :

× $\mathscr{B} = (1, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3})$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire.

× $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} \frac{2\,a_0+a_1}{2} \\ \frac{a_1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q) = \begin{pmatrix} \frac{2\,b_0+b_1}{2} \\ \frac{b_1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

II.3.b) Caractérisation matricielle des bases orthonormales

Théorème 10.
Soit $\big(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** *de E.*
Notons $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de E.
Notons enfin $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

$$\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une BON pour } \langle \cdot \mid \cdot \rangle \ \Leftrightarrow\ {}^tPP = I_n} \quad \Big(\Leftrightarrow\ P^{-1} = {}^tP \Big)$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après le Théorème 9 qui donne les coordonnées d'un vecteur en base orthonormale :

$$\begin{array}{ccccccccccc} e'_1 & = & \langle e'_1, e_1 \rangle & \cdot & e_1 & + & \dots & + & \langle e'_1, e_n \rangle & \cdot & e_n \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots & & \\ e'_j & = & \left\langle e'_j, e_1 \right\rangle & \cdot & e_1 & + & \dots & + & \left\langle e'_j, e_n \right\rangle & \cdot & e_n \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots & & \\ e'_n & = & \langle e'_n, e_1 \rangle & \cdot & e_1 & + & \dots & + & \langle e'_n, e_n \rangle & \cdot & e_n \end{array}$$

  On en déduit : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\left\langle e'_j, e_i \right\rangle \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned} \left({}^tP \times P\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \left({}^tP\right)_{i,k} \times P_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P_{k,i} \times P_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle e'_i, e_k \rangle \times \left\langle e'_j, e_k \right\rangle \\ &= {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(e'_i\right)\Big) \times \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(e'_j\right)\Big) \\ &= \left\langle e'_i, e'_j \right\rangle_{\mathscr{B}} = \left\langle e'_i, e'_j \right\rangle \qquad \textit{(par le Théorème 9)} \end{aligned}$$

- On peut alors conclure :

$$\begin{aligned} & \mathscr{B}' \text{ est orthonormale (pour le produit scalaire } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ de } E) \\ \Leftrightarrow\ & \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \left\langle e'_i, e'_j \right\rangle = \delta_{i,j} \qquad \textit{(par définition d'orthonormalité)} \\ \Leftrightarrow\ & \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \left({}^tP \times P\right)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \textit{si } i \neq j \\ 1 & \textit{si } i = j \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & {}^tPP = I_n \end{aligned}$$

□

Remarque

- Supposons que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux base orthonormales. Rappelons que pour tout $x \in E$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$$

  On en déduit que pour tout $(x,y) \in E \times E$:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_{\mathscr{B}} &= {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \\ &= {}^t\Big(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)\Big) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(y) \\ &= {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)\Big)\ {}^tP_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(y) \\ &= {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)\Big)\ I_n\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(y) \qquad \textit{(par le Théorème 10)} \\ &= {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(y) \\ &= \langle x, y \rangle_{\mathscr{B}'} \end{aligned}$$

  On démontre ainsi que le produit scalaire relativement à une base orthonormale ne dépend pas de la base choisie. Ce résultat ne doit pas surprendre. En effet, d'après le Théorème 9 :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}} = \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}'}$$

- On dit qu'une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthoGONALE** si ${}^tPP = I_n$.
Autrement dit, une matrice P est orthogonale si elle est inversible et que son inverse est $P^{-1} = {}^tP$. On peut remarquer :

$$\begin{array}{rcl} P \text{ est orthogonale} & \Leftrightarrow & {}^tP \times P = I_n \\ & \Leftrightarrow & \left({}^tP \times P\right)_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \sum\limits_{k=1}^{n} \left({}^tP\right)_{i,k} \times P_{k,j} = \delta_{i,j} \\ & \Leftrightarrow & \sum\limits_{k=1}^{n} P_{k,i} \times P_{k,j} = \delta_{i,j} \\ & \Leftrightarrow & \langle C_i, C_j \rangle_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = \delta_{i,j} \qquad \textit{(en notant, pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ C_i \textit{ la } i^{\text{ème}} \textit{ colonne de } P\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \text{Les colonnes de } P \text{ forment une base orthoNORMALE de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ relativement au produit scalaire canonique sur } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

À RETENIR

La matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ d'une base orthoNORMALE $\mathscr{B}$ à une base orthoNORMALE $\mathscr{B}'$ est une matrice orthoGONALE.

II.3.c) Expression d'un endomorphisme en base orthonormale

Théorème 11.

Soit $\left(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ un espace préhilbertien RÉEL.

On suppose que E est de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** *de E.*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. *D'après le premier point du Théorème 9 :*

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) = \langle f(e_j), e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle f(e_j), e_n \rangle \cdot e_n}$$

2. a) *Rappelons :* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1)\big) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_n)\big)\Big)$.

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \Big(\langle f(e_j), e_i \rangle \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \Big(\langle e_i, f(e_j) \rangle \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}}$$

b) *D'autre part, si $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base orthonormale alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times {}^tP_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \end{array}}$$

(les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont bien évidemment semblables et la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est orthogonale)

II.4. Existence d'une base orthonormale

II.4.a) Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 12.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. a) *Soit $\left(\alpha_i^{(j)}\right)_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n-1}}$ une famille de réels.*

Considérons la famille $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ définie par :

(i) $u_1 = e_1$

(ii) $$\forall j \in [\![2, n]\!],\ u_j = \alpha_1^{(j)} \cdot u_1 + \ldots + \alpha_{j-1}^{(j)} \cdot u_{j-1} + e_j = \left(\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i^{(j)} \cdot u_i\right) + e_j$$

On a alors :

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$.
- *La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.*

b) *Considérons la famille $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ définie par :*

(i) $v_1 = e_1$

(ii) $$\forall j \in [\![2, n]\!],\ v_j = -\frac{\langle e_j, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \ldots - \frac{\langle e_j, v_{j-1}\rangle}{\|v_{j-1}\|^2} \cdot v_{j-1} + e_j = -\left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle e_j, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i\right) + e_j$$

On a alors :

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$.
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, *la famille $\left(v_1, \ldots, v_k\right)$ est orthogonale.*
- *La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base* **orthogonale** *de E.*

2. *La famille $(e'_1, \ldots, e'_n)$ définie par :*

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ e'_j = \frac{v_j}{\|v_j\|}$$

est une base **orthonormale** *de E.*

Démonstration.

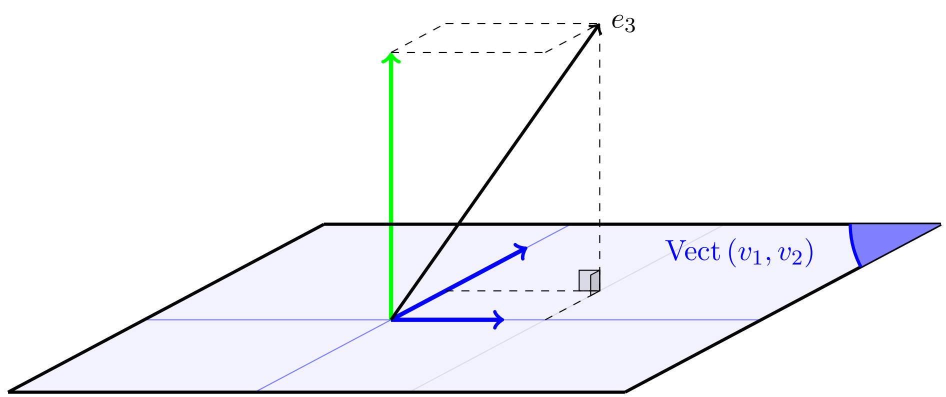
1. a) Par récurrence sur k.

b) Le premier point est obtenu par celui de la propriété ***a)***.
Le deuxième est obtenu par récurrence sur k.

2. Ce résultat est direct. La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base orthogonale. On la normalise en divisant chaque vecteur par sa norme. □

Remarque

- Le point ***1.a)*** signifie simplement qu'à partir d'une base $\mathscr{B}$ de E, on peut créer une nouvelle base en ajoutant à chaque vecteur une combinaison linéaire des vecteurs précédents de la base.
- Le point ***2.a)*** signifie qu'en choisissant habilement les coefficients des combinaisons linéaires, on peut s'assurer que chaque nouveau vecteur créé est orthogonal au précédent.
- Pour bien comprendre ce dernier point, représentons graphiquement la $3^{\text{ème}}$ étape. On souhaite créer un vecteur v_3 qui :
  - × est orthogonal à v_1,
  - × est orthogonal à v_2,
  - × est obtenu en ajoutant à e_3 une combinaison linéaire de v_1 et v_2.



Pour ce faire, on considère le projeté orthogonal de e_3 sur $\text{Vect}(v_1, v_2)$. Les coefficients de la combinaison linéaire ne sont autre que les composantes suivant v_1 et v_2 de ce projeté orthogonal.

- On déduit de ce théorème la propriété suivante :

> Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède au moins une base orthonormale.

Remarque
Par construction, la matrice de passage entre une base de E et son orthonormalisée par ce procédé est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Exercice
Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement :

1. au produit scalaire de Lagrange associé aux réels -1, 0 et 1.

2. au produit scalaire intégral sur $[0, 1]$.

II.4.b) Théorème de la base orthonormée incomplète

Théorème 13.

Soit E un espace euclidien.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_m) \in E^m$ une famille de vecteurs de E.

> - *La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_m)$ est orthogonale*
> - *Les vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ sont tous non nuls*
>
> $\Rightarrow$ *La famille $\mathcal{F}$ peut être complétée en une base orthonormale de E*

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F}$ est orthogonale et constituée uniquement de vecteurs non nuls. C'est donc une famille libre de E.
  D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base $\mathscr{B}$ de E. La base $\mathscr{B}$ est de cardinal fini puisque E est de dimension finie en tant qu'espace euclidien. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à $\mathscr{B}$, on obtient une base $\mathscr{B}'$ orthonormale de E. □

II.5. Orthogonal d'une partie de E

II.5.a) Définition et résultats immédiats

Définition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

Soient F et G deux parties de E (pas forcément des sev de E).

1. On appelle **orthogonal de** F, et on note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\} = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle y, x \rangle = 0\}$$

2. On dit que F et G sont **orthogonaux** si : $\boxed{\forall x \in F, \forall y \in G,\ \langle x, y \rangle = 0}$

Évidemment, les ensembles F et $F^\perp$ sont orthogonaux.

Remarque

- Il est à noter que, dans cette définition, on n'exige pas que F soit un sous-espace vectoriel de E.
- Par exemple, si on considère $u \neq 0_E$, alors on peut déterminer l'othogonal de $F = \{u\}$ (qui n'est pas un sous-espace vectoriel de E).

Théorème 14.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace préhilbertien* RÉEL.

Soient F *et* G *deux parties de* E *(pas forcément des sev de* E*).*

1. *L'ensemble* $F^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

2.

Les ensembles F *et* G *sont orthogonaux*	$\Leftrightarrow$	$F \subset G^\perp$
	$\Leftrightarrow$	$G \subset F^\perp$

Démonstration.

1. Démontrons que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

(i) $F^\perp \subset E$ par définition.

(ii) $F^\perp \neq \varnothing$ car $0_E \in F^\perp$.
En effet : $\forall y \in F$, $\langle 0_E, y\rangle = 0$.

(iii) Démontrons que $F^\perp$ est stable par combinaison linéaire.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $(x_1, x_2) \in \Big(F^\perp\Big)^2$.
Il s'agit de démontrer : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in F^\perp$.
Soit $y \in F$. Alors :

$$\begin{array}{cll} & \langle \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2, y\rangle & \\ = & \lambda_1 \ \langle x_1, y\rangle + \lambda_2 \ \langle x_2, y\rangle & \textit{(par linéarité à gauche)} \\ = & 0 + 0 & \textit{(car } x_1 \in F^\perp \textit{ et } x_2 \in F^\perp\textit{)} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} & \Leftrightarrow & \forall x \in F, \forall y \in G,\ \langle x, y\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in F,\ x \in G^\perp \\ & \Leftrightarrow & F \subset G^\perp \\ & \Leftrightarrow & G \text{ et } F \text{ orthogonaux} \\ & \Leftrightarrow & G \subset F^\perp \end{array}$$

□

II.5.b) Propriétés générales de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Théorème 15.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace préhilbertien* RÉEL.

Soient F *et* G *deux parties de* E *(pas forcément des sev de* E*).*

1. $\boxed{F \subset G \ \Rightarrow\ G^\perp \subset F^\perp}$

2. $\boxed{F \subset (F^\perp)^\perp}$

3. *Dans le cas où* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \textit{Les ensembles } F \textit{ et } G \textit{ sont des sous-espaces vectoriels de } E \\ \bullet \ \textit{Les ensembles } F \textit{ et } G \textit{ sont orthogonaux} \end{array}\right\} \Rightarrow\ F \cap G = \{0_E\}}$$

Ainsi, deux ensembles orthogonaux sont toujours en somme directe.

En particulier : $\boxed{F \cap F^\perp = \{0_E\}}$

Remarque
On peut s'interroger sur la façon de retenir la formule $F \subset (F^\perp)^\perp$ (retenir l'inclusion dans le bon sens). Rappelons que l'ensemble F est une partie et n'est pas forcément un espace vectoriel. Il faut retenir :

× que la formule concerne F et $(\ F\ )^\perp$,

× que $(\ F\ )^\perp$ étant un sous-espace vectoriel il contient potentiellement une infinité de vecteurs (sauf à être égal à $\{0_E\}$).

De ce point de vue, il apparaît logique que : $(\dots)^\perp \ \supset\ F$.
(l'ensemble potentiellement infini contient celui qui peut être fini)

Démonstration.

1. Supposons $F \subset G$.
Soit $x \in G^\perp$. Démontrons que $x \in F^\perp$. Autrement dit, démontrons :

$$\forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0$$

Soit $y \in F$.
Comme $F \subset G$, alors $y \in G$. On en déduit : $\langle x, y\rangle = 0$.

2. Supposons que F et G sont orthogonaux. Démontrons $F \cap G = \{0_E\}$.
On procède par double inclusion.

($\supset$) Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E. On en déduit : $0_E \in F \cap G$.

($\subset$) Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$.
Comme F et G sont orthogonaux, alors $x \in F$ est orthogonal à $x \in G$.
Ainsi :

$$\langle x, x\rangle = 0$$

Comme $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est une application définie-positive, on en déduit : $x = 0_E$.

3. Notons $G = F^\perp$.
Comme F et G sont orthogonaux alors, par définition :

$$F \subset G^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp$$

□

II.5.c) Propriétés de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension `FINIE`

Théorème 16.

Soit $\left(E, \langle \cdot, \cdot\rangle\right)$ un espace préhilbertien `RÉEL` *(de dimension finie ou non).*
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On suppose que F est **de dimension finie** *notée $m \in \mathbb{N}^*$.*
Soit $(u_1, \dots, u_p) \in F^p$ une famille génératrice de F.

1. *Obtention pratique de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de F*

$$\boxed{F^\perp = \{x \in E \mid \forall k \in [\![1, p]\!],\ \langle x, u_k\rangle = 0\}}$$

2. a) *Si $(e_1, \dots, e_m) \in E^m$ est une base orthonormale de F, alors :*

$$\boxed{\forall x \in E,\ x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i\right)}$$

b) *L'égalité précédente démontre :* $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$
(on dit alors que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F et F est le supplémentaire orthogonal de $F^\perp$)
En particulier, si E est de dimension finie, on en déduit :

$$\boxed{\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^\perp\right)}$$

3. $\boxed{F \ = \ (F^\perp)^\perp}$

(on sait déjà $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$, quand F est un sev de dimension finie, on a en plus $\left(F^\perp\right)^\perp \subset F$)

Démonstration.

1. On procède par double inclusion.
Notons $G = \{x \in E \mid \forall k \in [\![1,p]\!],\ \langle x, u_k \rangle = 0\}$.

($\subset$) Soit $x \in F^{\perp}$. Alors, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\langle x, u_k \rangle = 0$ puisque $u_k \in F$.

($\supset$) Soit $x \in G$. Démontrons que $x \in F^{\perp}$.
Soit $y \in G$. Il existe $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que : $y = \sum\limits_{k=1}^{p} y_k \cdot u_k$. Alors :

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{k=1}^{p} y_k \cdot u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{p} y_k\ \langle x, u_k \rangle = 0$$

2. Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une base orthonormale de F (comme F est de dimension finie non nulle, une telle base existe forcément). Alors :

× F et $F^{\perp}$ sont en somme directe : $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.

× Démontrons alors : $E = F + F^{\perp}$.
Soit $x \in E$.

– Analyse :
On suppose qu'il existe $(u, v) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = u + v$.
Comme $u \in F$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que : $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i$.
Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$:

$$\begin{aligned} \langle x, e_j \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i + v, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ \langle e_i, e_j \rangle + \cancel{\langle v, e_j \rangle} && \textit{(car } v \in F^{\perp}\textit{)} \\ &= \lambda_j\ \langle e_j, e_j \rangle\ =\ \lambda_j && \textit{(car } (e_1, \dots, e_m) \textit{ est orthonormale)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$u = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \qquad \text{et} \qquad v = x - u$$

– Synthèse :
On écrit : $x = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right) + \left(x - \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right)$.
Comme $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de F, alors $\sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \in F$.
Il reste alors à vérifier : $x - \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \in F^{\perp}$. Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$:

$$\begin{aligned} \langle x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i, e_j \rangle &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle\ \langle e_j, e_j \rangle && \textit{(car } (e_1, \dots, e_m) \textit{ est une base orthonormale)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Par le théorème précédent : $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
Démontrons maintenant : $(F^{\perp})^{\perp} \subset F$.
Soit $x \in (F^{\perp})^{\perp}$. Démontrons : $x \in F$.
Comme $E = F \oplus F^{\perp}$, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que :

$$x = y + z$$

Or :

× $z \in F^{\perp}$ par définition.

× $y \in F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ par définition.

× $z = x - y \in (F^{\perp})^{\perp}$, puisque x et y sont deux vecteurs de $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Ainsi : $z \in F^{\perp} \cap \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = \{0_E\}$ et donc $x = y \in F$. □

Exemple

1. On a toujours : $E^{\perp} = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^{\perp} = E$.

2. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, le supplémentaire orthogonal de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, et réciproquement.

II.5.d) Détermination de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en pratique

Exercice

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur E.

On note $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$.

1. ***a)*** Démontrer que F est un espace vectoriel et en déterminer une base.

b) Déteminer $F^\perp$.

c) Vérifier : $E = F \oplus F^\perp$ et : $F = (F^\perp)^\perp$.

2. ***a)*** En remarquant : $F = \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$, trouver une démonstration plus rapide de la question ***1.b)***.

b) On note : $G = \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 + 2\,a_1 - a_2 = 0\}$. Déterminer $G^\perp$.

3. On considère maintenant $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$.

a) Démontrer que F est un espace vectoriel.

b) Démontrer $F^\perp$.

c) A-t-on : $E = F \oplus F^\perp$? A-t-on : $F \neq (F^\perp)^\perp$?

Démonstration.

1. ***a)*** On démontre : $F = \text{Vect}\left(P_1 - P_0, P_2 - P_0\right)$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

$$\begin{aligned}
P \in F^\perp &\Leftrightarrow \langle P, P_1 - P_0 \rangle = 0 \ \text{ et } \ \langle P, P_2 - P_0 \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -a_0 & + & a_1 & & & = & 0 \\ -a_0 & & & + & a_2 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_0 \\ a_2 & = & a_0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
F^\perp &= \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid a_1 = a_0 \text{ et } a_2 = a_0\} \\
&= \{a_0 \cdot P_0 + a_0 \cdot P_1 + a_0 \cdot P_2 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_0 \cdot \big(P_0 + P_1 + P_2\big) \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}\left(P_0 + P_1 + P_2\right)
\end{aligned}$$

2. ***a)*** On remarque :

$$\begin{aligned}
F &= \{\ a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\ \} \\
&= \left\{\ a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid {}^t(1 \quad 1 \quad 1) \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0\ \right\} \\
&= \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \langle P_0 + P_1 + P_2, P \rangle = 0\ \}
\end{aligned}$$

On en déduit : $P_0 + P_1 + P_2 \in F^\perp$ (en effet : $\forall P \in F$, $\langle P, P_0 + P_1 + P_2 \rangle = 0$).

Ainsi : $\text{Vect}\left(P_0 + P_1 + P_2\right) \subset F^\perp$. Or :

- × comme E est de dimension finie : $\dim\left(F^\perp\right) = \dim(E) - \dim(F) = 3 - 2 = 1$.
- × $\dim\left(\text{Vect}\left(P_0 + P_1 + P_2\right)\right) = 1$.

On en conclut : $F^\perp = \text{Vect}\left(P_0 + P_1 + P_2\right)$.

b) On remarque :

$$\begin{aligned}
G &= \{\ a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 + 2\,a_1 - a_2 = 0\ \} \\
&= \left\{\ a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid {}^t(1 \quad 2 \quad -1) \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0\ \right\} \\
&= \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \langle 1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2, P \rangle = 0\ \}
\end{aligned}$$

En raisonnant de même : $G^\perp = \text{Vect}\left(P_0 + 2 \cdot P_1 - P_2\right)$. □

Remarque

- Les espaces vectoriels F et G sont des hyperplans. On souligne ici qu'ils s'écrivent sous la forme :

$$F = \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \langle P_0 + P_1 + P_2, P \rangle = 0\ \}$$

$$\text{et} \quad G = \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \langle 1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2, P \rangle = 0\ \}$$

  Dans ce cas, $P_0+P_1+P_2$ est un vecteur orthogonal à F et, comme F est un hyperplan d'un espace euclidien E (qui est donc de dimension finie), $F^\perp = \text{Vect}\,(P_0 + P_1 + P_2)$. De même, $P_0 + 2\,P_1 - P_2$ est un vecteur orthogonal à G et $G^\perp = \text{Vect}\,(P_0 + 2\,P_1 - P_2)$.
- Ce résultat sera vu plus loin dans le cours.

Exercice

On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$. On note F le plan d'équation $ax + by + cz = 0$.
Déterminer $F^\perp$.

Démonstration.
Comme dans l'exercice précédent, on démontre : $F^\perp = \text{Vect}\,((a, b, c))$ puisque :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = 0\} \qquad \square$$

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur E.

1. Déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}\,(P_0)$.

2. Déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}\,(P_0, P_2)$.

3. Si E est un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de E, détrerminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}\,(e_1, e_3)$.

II.6. Projections orthogonales

II.6.a) Définition

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).

Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

- On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
- On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque

1. Comme F est de dimension finie :

$$E = F \oplus F^\perp \qquad \text{et} \qquad F = (F^\perp)^\perp$$

Ainsi, la projection orthogonale sur $F^\perp$ (resp. la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$) est la projection sur $F^\perp$ parallèlement à F (resp. la symétrie par rapport à $F^\perp$ parallèlement à F).

2. On en déduit que si p est la projection orthogonale sur F, alors :

× la projection orthogonale sur $F^\perp$ est $q = \text{id}_E - p$,

× la symétrie orthogonale par rapport à F est $s = p - q = 2p - \text{id}_E = \text{id}_E - 2q$,

× la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$ est $-s$.

Exercice

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).

Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

Soit p la projection orthogonale sur F.

1. Démontrer : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

2. Démontrer : $\forall x \in E,\ \Big(\|p(x)\| = \|x\|\Big) \ \Leftrightarrow\ x \in F$.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. Alors :
$$x = p(x) + (x - p(x))$$
avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^{\perp}$. On en déduit, par théorème de Pythagore :
$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$$
Donc $\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$.

2. $$\begin{array}{rcl} \|p(x)\|^2 = \|x\|^2 & \Leftrightarrow & \|x - p(x)\|^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & x = p(x) \\ & \Leftrightarrow & x \in F \end{array}$$

□

II.6.b) Expression d'une projection orthogonale en base orthonormale

Théorème 17.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace préhilbertien* `RÉEL` *(de dimension finie ou non).*

Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie***.*

Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base orthonormale de F.

Soit p la projection orthogonale sur F et q la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.

1. $$\boxed{\forall x \in E,\ x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right)}$$

2. $\forall x \in E,$ $\boxed{p(x) = \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k}$ *et* $\boxed{q(x) = x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k}$

Démonstration.

Rappelons qu'on a démontré dans le théorème 16 : $E = F \oplus F^{\perp}$.

De plus, tout vecteur $x \in E$ s'écrit comme suit dans cette décomposition :
$$x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right)$$
où $\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \in F$.

□

Exercice

Pour tout $(P, Q) \in \left(\mathbb{R}[X]\right)^2$, on note :
$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. On note $F = \mathbb{R}_1[X]$. Déterminer une expression de $p_F(P_2)$, où p_F est la projection orthogonale sur F.

Démonstration.

2. Deux manières de procéder.

× Méthode 2 : on utilise l'expression de p dans une base orthonormale (Q_0, Q_1) de $\mathbb{R}_1[X]$)

On démontre tout d'abord (par algorithme de Gram-Schmidt), que la famille $(1, X - 1)$ est orthonormale. Ainsi :
$$\begin{array}{rcl} p(X^2) & = & \langle X^2, Q_0 \rangle \cdot Q_0 + \langle X^2, Q_1 \rangle \cdot Q_1 \\ & = & \langle X^2, 1 \rangle \cdot 1 + \langle X^2, X - 1 \rangle \cdot (X - 1) \\ & = & 2 \cdot 1 + (6 - 2) \cdot (X - 1) \\ & = & 2 + 4 \cdot (X - 1) \\ & = & -2 + 4X \end{array}$$

× Méthode 1 : on exploite l'orthogonalité de $X^2 - p(X^2)$ à $\mathbb{R}_1[X]$
Par définition, $p(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]$.
Il existe donc $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, $p(X^2) = a_0 + a_1 X$.

$$\begin{aligned}
p(X^2) \in F \quad & \Leftrightarrow \quad X^2 - p(X^2) \in F^{\perp} \\
& \Leftrightarrow \quad \langle X^2 - p(X^2), 1\rangle = 0 \text{ et } \langle X^2 - p(X^2), X\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \langle X^2 - \big(a_0 + a_1 X\big), 1\rangle = 0 \text{ et } \langle X^2 - \big(a_0 + a_1 X\big), X\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} a_0 & + & a_1 & = & 2 \\ a_0 & + & 2\,a_1 & = & 6 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} a_0 & + & a_1 & = & 2 \\ & & a_1 & = & 4 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} a_0 & = & -2 \\ a_1 & = & 4 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit : $p(X^2) = -2 + 4X$.

□

II.7. Notion de distance d'un vecteur à un ensemble

II.7.a) Définition

Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL (de dimension finie ou non).

Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

Soit $x \in E$.

- On appelle **distance de x au sous-espace vectoriel F**, la quantité positive :

$$\boxed{\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y \in F} \ \|x - y\|}$$

II.7.b) Lien entre distance à un espace vectoriel et projection orhogonale

Théorème 18.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL *(de dimension finie ou non).*

Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

Soit p la projection orthogonale sur F.

1. $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F, \ \|x - p(x)\| \leqslant \|x - y\|}$

2. $\boxed{\mathrm{d}(x, F) = \|x - p(x)\|}$

(le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F)

3. *En particulier, si $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base orthonormale de F alors :*

$$\boxed{\forall x \in E, \ \mathrm{d}(x, F) = \|x - p(x)\| = \left\| x - \left(\sum_{i=1}^{m} \ \langle x, e_i\rangle \cdot e_i \right) \right\|}$$

Et par théorème de Pythagore : $\boxed{\mathrm{d}(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \big| \ \langle x, e_i\rangle \ \big|^2}$

Démonstration.

1. Soit $x \in E$ et soit $y \in F$.

$$x - y = (x - p(x)) + (p(x) - y)$$

avec $x - p(x) \in F^{\perp}$ et $p(x) - y \in F$.
On en déduit, par théorème de Pythagore :

$$\|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2$$

Donc $\|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x - y\|^2$.

2. D'après le point *1.*, pour tout $x \in E$, $\|x - p(x)\|$ est un minorant de l'ensemble $U_x = \{\|x - y\| \mid y \in F\}$. C'est donc une quantité plus petite que le plus grand des minorants de cet ensemble. Autrement dit :

$$\|x - p(x)\| \leqslant \inf_{y \in F} \ \|x - y\|$$

Comme $\inf\limits_{y \in F} \ \|x-y\|$ est un minorant de U_x, cette quantité est plus petite que $\|x - p(x)\| \in U_x$ (puisque $p(x) \in F$). Ainsi :

$$\inf_{y \in F} \ \|x - y\| \leqslant \|x - p(x)\|$$

D'où : $\inf\limits_{y \in F} \ \|x - y\| = \|x - p(x)\|$. □

Exercice

On reprend l'exercice précédent où l'on a démontré que l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^{+\infty} \ P(t)\, Q(t) \ \mathrm{e}^{-t} \ dt$$

Par ailleurs, on a démontré que le projeté orthogonal de P_2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ est défini par : $p(X^2) = -2 + 4X$.

3. En déduire : $\min\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \ \displaystyle\int_0^{+\infty} \ \left(t^2 - at - b\right)^2 \ \mathrm{e}^{-t} \ dt$.

Démonstration.

3. On remarque :

$$\begin{aligned}
& \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \ \int_0^{+\infty} \ \left(t^2 - at - b\right)^2 \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\
= \ & \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \ \int_0^{+\infty} \ \left(t^2 - at - b\right) \ \left(t^2 - at - b\right) \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\
= \ & \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \ \left\langle X^2 - \left(a\, X + b\right) \mid X^2 - \left(a\, X + b\right) \right\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \ \int_0^{+\infty} \ \left(t^2 - at - b\right)^2 \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \ &= \ \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \ \left\|X^2 - \left(a\, X + b\right)\right\|^2 \\
&= \ \min_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \ \left\| \ X^2 - P \ \right\|^2 \\
&= \ \left(\ \mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) \ \right)^2 \\
&= \ \left\| \ X^2 - p(X^2) \ \right\|^2
\end{aligned}$$

D'autre part : $X^2 = p(X^2) + \left(X^2 - p(X^2)\right)$.

On en déduit, par théorème de Pythagore :

$$\left\|X^2\right\|^2 = \left\|p(X^2)\right\|^2 + \left\|\left(X^2 - p(X^2)\right)\right\|^2$$

$$\text{et} \quad \left\| \ X^2 - p(X^2) \ \right\|^2 \ = \ \left\|X^2\right\|^2 - \left\|p(X^2)\right\|^2$$

Enfin : $\left\|X^2\right\|^2 = \langle X^2, X^2 \rangle = 4! = 24$.

De plus : $p(X^2) = 2 \cdot Q_0 + 4 \cdot Q_1$ où (Q_0, Q_1) est une base orthonormale.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\left\|p(X^2)\right\|^2 \ &= \ \langle 2 \cdot Q_0 + 4 \cdot Q_1, 2 \cdot Q_0 + 4 \cdot Q_1 \rangle \\
&= \ 2^2 \left\|Q_0\right\|^2 + 4^2 \left\|Q_1\right\|^2 \\
&= \ 2^2 + 4^2 \\
&= \ 20
\end{aligned}$$

Finalement : $\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right)^2 = 24 - 20 = 4$. □

II.8. Projection orthogonale sur une droite / sur un hyperplan

II.8.a) Hyperplan orthogonal à une droite vectorielle donnée

Théorème 19.
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
Soit $a \in E$ non nul.
On note p la projection orthogonale sur la droite $D = \mathrm{Vect}\,(a)$.
On note q la projection orthogonale sur l'hyperplan $H = D^\perp = \Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^\perp$.

1. Comme $\mathrm{Vect}\,(a)$ est de dimension finie : $\boxed{E = \mathrm{Vect}\,(a) \oplus \Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^\perp}$

Plus précisément, pour tout $x \in E$:

$$x \;=\; \underbrace{\frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} \cdot a}_{\in\, \mathrm{Vect}\,(a)} \;+\; \underbrace{\left(x - \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} \cdot a\right)}_{\in\, \left(\mathrm{Vect}\,(a)\right)^\perp}$$

2. On en déduit immédiatement :

a) l'expression de la projection orthogonale sur $D = \mathrm{Vect}\,(a)$:

$$\boxed{\forall x \in E,\ p(x) \;=\; \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} \cdot a}$$

b) l'expression de la distance d'un point à $D = \mathrm{Vect}\,(a)$:

$$\boxed{\mathrm{d}(x, D) \;=\; \Big\|x - p(x)\Big\| \;=\; \left\|x - \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} \cdot a\right\|}$$

De plus, par théorème de Pythagore : $\boxed{\mathrm{d}(x, D)^2 \;=\; \|x\|^2 - \dfrac{|\,\langle x, a\rangle\,|^2}{\|a\|^2}}$

3. On en déduit aussi :

a) l'expression de la projection orthogonale sur $H = \Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^\perp$:

$$\boxed{\forall x \in E,\ q(x) \;=\; x - \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} \cdot a} \;=\; x - p(x) \;=\; (\mathrm{id}_E - p)(x)$$

b) l'expression de la distance d'un point à $H = \Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^\perp$:

$$\boxed{\mathrm{d}(x, H) \;=\; \|x - p(x)\| \;=\; \left\|\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} \cdot a\right)\right\| \;=\; \frac{|\,\langle x, a\rangle\,|}{\|a\|}}$$

Démonstration.

- Cet énoncé n'est que l'illustration du Théorème 17 dans le cas où la projection orthogonale s'effectue sur un sous-espace vectoriel de dimension 1 (noté ici $D = \mathrm{Vect}\,(a)$). La famille $\left(\dfrac{a}{\|a\|}\right)$ est alors une base orthonormée de D.
- On en déduit la formule du point *1*. Les autres points s'en déduisent alors.

□

II.8.b) Caractérisation des hyperplans dans un espace vectoriel (de dimension finie ou non)

Théorème 20.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

$$\begin{array}{lcl} H \text{ est un hyperplan} & \Leftrightarrow & \forall a \in E \setminus H, \ E = \text{Vect}\,(a) \oplus H \\ & \Leftrightarrow & \exists \varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}\}, \ F = \text{Ker}(\varphi) \\ & & (H \text{ est le noyau d'une forme linéaire } \textbf{non nulle}) \end{array}$$

Démonstration.

1. La bilinéarité du produit scalaire montre que l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi & : & E & \to & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ & & a & \mapsto & \langle a \,|\, \cdot \rangle \end{array}$$

est bien définie et linéaire. Sa définie-positivité montre que Φ est injective, et on conclut que c'est un isomorphisme puisque les deux espaces E et $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ ont même dimension.

2. Par définition de l'orthogonal : $a \in \text{Ker}(\varphi)^\perp$, et $a \neq 0_E$ puisque $\varphi_a \neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}$. □

Remarque

- Pour bien comprendre ce théorème considérons le cas très simple $E = \mathbb{R}^3$. Notons alors : $H = \text{Vect}\,((0,1,0),(0,0,1))$ (c'est bien un hyperplan car c'est un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans un espace vectoriel de dimension 3). Comme $(1,0,0) \notin H$, alors, d'après le théorème :

$$\mathbb{R}^3 \ = \ \text{Vect}\,(\,(1,0,0)\,) \oplus H$$

- Cette écriture de $\mathbb{R}^3$ comme somme de supplémentaires ne doit pas être comprise comme une partition de l'ensemble (ce qui n'a aucun sens dans un espace vectoriel !). Par exemple :
  - × $(1,1,1)$ n'est pas un élément de $\text{Vect}\,(\,(1,0,0)\,)$.
  - × $(1,1,1)$ n'est pas pour autant un élément de $\text{Vect}\,(\,(0,1,0),(0,0,1)\,)$.

  L'écriture sous forme de sommes de supplémentaires permet en revanche d'affirmer que le vecteur $(1,1,1)$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\text{Vect}\,(\,(1,0,0)\,)$ et d'un élément de H. Plus précisément :

$$(1,1,1) \ = \ (1,0,0) + (0,1,1)$$

- Il est à noter que cette décomposition sous forme de sommes de sous-espaces supplémentaires n'est pas unique (tout vecteur qui n'est pas dans H fournit un nouveau supplémentaire). Par exemple :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{R}^3 & = & \text{Vect}\,(\,(1,0,0)\,) \oplus H & \\ & = & \text{Vect}\,(\,(1,2,1)\,) \oplus H & \textit{(car } (1,2,1) \notin H\textit{)} \\ & = & \text{Vect}\,(\,(2,0,-1)\,) \oplus H & \textit{(car } (2,0,-1) \notin H\textit{)} \end{array}$$

II.8.c) Caractérisation des hyperplans à l'aide d'un produit scalaire

Théorème 21.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

Pour tout $a \in E$, on note φ_a la forme linéaire définie par : $\varphi_a : E \mapsto \langle a, x\rangle$.

1. $\boxed{H \text{ est un hyperplan } \Leftrightarrow \exists a \neq 0_E,\ H = \mathrm{Ker}(\varphi_a)}$

2. $\forall a \neq 0_E$, $\boxed{\mathrm{Vect}\,(a) = \Big(\mathrm{Ker}(\varphi_a)\Big)^{\perp}}$ *et* $\boxed{E = \mathrm{Vect}\,(a) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi_a)}$

Ainsi, lorsque E est de dimension finie, pour tout hyperplan H, il existe un vecteur $a \neq 0_E$ tel que :

$$H \ = \ \{x \in E \mid \langle a, x\rangle = 0\}$$

et dans ce cas, a est alors un vecteur orthogonal à H.

Exemple

1. Toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme :

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_n$$

c'est-à-dire de la forme $\langle a \,|\, \cdot\rangle$ où $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et où $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique.

2. La trace sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la forme linéaire $\langle I_n \,|\, \cdot\rangle$, où $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique.

3. L'application $P \mapsto P(1)$ (resp. $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt$) sur $\mathbb{R}_n[X]$ est la forme linéaire $\langle A \,|\, \cdot\rangle$, où $A = \sum\limits_{k=0}^{n} X^k$ (resp. $A = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} X^k$) et où $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique.