CH XIV : Espaces vectoriels normés

Le but de ce chapitre est de généraliser, pour un espace vectoriel quelconque, la notion de valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et de module sur $\mathbb{C}$, et les notions de convergence des suites et des fonctions qui en découlent. Dans tout ce chapitre, on pose une fois pour toutes $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Norme sur un espace vectoriel

I.1. Norme et espace vectoriel normé

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes.

1) $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda \cdot x) \ = \ |\lambda|\ N(x)}$ *(homogénéité d'une norme)*

2) $\boxed{\forall x \in E,\ N(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0_E}$ *(propriété de séparation)*

3) $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ N(\ x+y\ ) \ \leqslant \ N(x) + N(y)}$ *(inégalité triangulaire)*

  - $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\ N(x) - N(y)\ \big| \ \leqslant \ N(x+y)}$ *($2^{\text{ème}}$ inégalité triangulaire)*
  - Les propriétés d'inégalité triangulaire peuvent être résumées comme suit :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\ N(x) - N(y)\ \big| \ \leqslant \ N(x \pm y) \ \leqslant \ N(x) + N(y)}$$

- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme N, c'est-à-dire formellement le couple (E, N), est appelé un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel normé**.

Exemple

La valeur absolue (resp. le module) $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$).

Remarque

- La propriété de séparation est en fait une équivalence. En effet, on peut démontrer la réciproque grâce à la propriété d'homogénéité.
Soit $x \in E$.

$$\begin{array}{ccc} N(0 \cdot x) & = & |0| \times N(x) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ N(0_E) & & 0 \end{array}$$

- Les propriétés ***1)***, ***2)*** et ***3)*** permettent de démontrer :

$$\forall x \in E,\ 0 \ = \ N(0_E) \ = \ N(x-x) \ \leqslant \ N(x) + N(-x) \ = \ 2\ N(x)$$

- On a déjà rencontré la notion de norme dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels. Rappelons qu'une norme est euclidienne si elle est issue d'un produit scalaire. L'identité du parallélogramme n'est vérifiée que par les normes euclidiennes. C'est même une manière de démontrer qu'une norme est (ou n'est pas !) euclidienne.

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \ = \ 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{La norme } \|\cdot\| \text{ est euclidienne}$$

- On rappelle qu'on sait caractériser le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire **dans le cas d'une norme <u>euclidienne</u>** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

$$\forall (x,y) \in E,\ \boxed{\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{l} x = 0_E \\ \texttt{OU} \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha \cdot x \end{array}}$$

- Si la norme $\|\cdot\|$ n'est pas euclidienne (c'est-à-dire n'est pas associée à un produit scalaire), alors on ne peut rien dire a priori de ce cas d'égalité.
Prenons par exemple :
  × l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ où $\|\cdot\|_1 : (x,y) \mapsto |x| + |y|$.
  × les vecteurs $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.

  Alors $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ mais x et y ne sont pas colinéaires.

I.2. Normes usuelles

I.2.a) Norme sur un espace préhilbertien réel

Théorème 1.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien réel.

- *L'application $\| \cdot \|$ définie de la façon suivante est une norme sur E :*

$$\begin{array}{rcrcl} \| \cdot \| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

- *Cette norme est appelée* **norme euclidienne** *issue du produit scalaire.*
- *Soit $x \in E$. Si $\|x\| = 1$, on dit que le vecteur x est* **normé** *ou* **unitaire**.

Démonstration.

- *Homogénéité* : immédiat par bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- *Séparation* : immédiate car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire, et est donc défini (positif).
- *Inégalité triangulaire* : déjà démontrée dans le cours sur les espaces préhilbertiens réels. □

Exemple

- L'application suivante est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{array}{rcrcl} \| \cdot \|_2 & : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2} \end{array}$$

- L'application suivante est une norme euclidienne sur $E = L^2(I, \mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcrcl} \| \cdot \|_2 & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \sqrt{\displaystyle\int_I f^2(t)\ dt} \end{array}$$

- L'application suivante est une norme euclidienne sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcrcl} \| \cdot \| & : & \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & A & \mapsto & \sqrt{\operatorname{tr}(A^T\, A)} = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant p} {a_{i,j}}^2 \end{array}$$

I.2.b) Exemples de normes sur $\mathbb{K}^p$

Définition

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

1. $$\begin{array}{rcrcl} \| \cdot \|_1 & : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x = (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{p} |x_k| \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcl} \| \cdot \|_2 & : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x = (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{p} |x_k|^2} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcl} \| \cdot \|_\infty & : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x = (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \|x\|_\infty = \max\limits_{k \in [\![1, p]\!]} |x_k| \end{array}$$

Démonstration.

1. L'applications $\| \cdot \|_1$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, elle vérifie clairement la séparation et l'homogénéité, et elle vérifie l'inégalité triangulaire car $| \cdot |$ la vérifie.

2. C'est la norme euclidienne associé au produit scalaire canonique sur $\mathbb{K}^p$.

3. Idem $\| \cdot \|_1$. □

I.2.c) Généralisation des exemples précédents à des normes sur des espaces vectoriels de dimensions finies

Les trois normes usuelles précédentes se généralisent à tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, une fois choisie une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E : il suffit de prendre, pour tout $x \in E$, les coordonnées $(x_1, \dots, x_p)$ de x dans la base $\mathscr{B}$.

Normes sur $\mathbb{K}_p[X]$

On munit $\mathbb{K}_p[X]$ de sa base canonique, alors les application suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $\|\cdot\|_1 \ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, X^k & \mapsto & \|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{p} |a_k| \end{array}$

2. $\|\cdot\|_2 \ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, X^k & \mapsto & \|P\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p} |a_k|^2} \end{array}$

3. $\|\cdot\|_\infty \ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, X^k & \mapsto & \|P\|_\infty = \max\limits_{k\in[\![1,n]\!]} |a_k| \end{array}$

Normes sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ de sa base canonique, alors les application suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $\|\cdot\|_1 \ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} & \mapsto & \|A\|_1 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p} |a_{i,j}| \end{array}$

2. $\|\cdot\|_2 \ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \|A\|_2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p} |a_{i,j}|^2 \end{array}$

3. $\|\cdot\|_\infty \ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} & \mapsto & \|A\|_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |a_{i,j}| \end{array}$

I.3. Norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ ensemble des fonctions bornées de I à valeurs dans $\mathbb{K}$

I.3.a) Rappels sur la borne supérieure

- Rappelons que toute partie $F \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Par définition, la borne supérieure M d'une partie majorée F de $\mathbb{R}$:

  1) est un majorant de F : $\boxed{\forall x \in F,\ x \leqslant M}$

  2) est le plus petit des majorants de F : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in F,\ x > M - \varepsilon}$
- Il est à noter que la borne supérieure d'une partie $F \subset \mathbb{R}$ n'est pas forcément un élément de F. Par exemple :

$$\sup\ \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}\ =\ 1$$

  (remarquons que la borne supérieure n'est pas ici un élément de l'ensemble)
- Si la borne supérieure M d'un ensemble F est atteinte (c'est-à-dire si $M \in F$), on dit que M est le maximum de cet ensemble.
- On définit de la même manière la notion de borne inférieure d'un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ minoré. C'est, par définition, le plus grand des minorants de F.
- La borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ est unique.

Théorème 2.

Soit $F \subset \mathbb{R}$ une partie majorée de $\mathbb{R}$.

Soit m et N deux réels.

1) $\Big(\exists x \in F,\ m \leqslant x\Big) \ \Rightarrow\ m \leqslant \sup(F)$

2) $\Big(\forall x \in F,\ x \leqslant N\Big) \ \Rightarrow\ \sup(F) \leqslant N$

(un majorant de F est plus grand que le plus petit des majorants)

Théorème 3.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

On note $k\,A = \{k\,x \mid x \in A\}$.

$$\boxed{\sup(k\,A) \ = \ k\,\sup(A)}$$

Démonstration.
On procède par double inégalité.

($\leqslant$) Comme $\sup(A)$ est, par définition, le plus petit des majorants de A :

$$\forall x \in A, \quad x \ \leqslant \ \sup(A)$$

Comme $k \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall x \in A, \quad k\,x \ \leqslant \ k\,\sup(A)$$

On en déduit :

$$\sup(k\,A) \ \leqslant \ k\,\sup(A)$$

($\geqslant$) Comme $\sup(k\,A)$ est le plus petit des majorants de $k\,A$:

$$\forall x \in A, \quad k\,x \ \leqslant \ \sup(k\,A)$$

Deux cas se présentent alors :

× si $k = 0$, alors l'inégalité est trivialement vraie.

× si $k > 0$, alors :

$$\forall x \in A, \quad x \ \leqslant \ \frac{1}{k}\ \sup(k\,A)$$

On en déduit : $\sup(A) \leqslant \dfrac{1}{k}\ \sup(k\,A)$. D'où :

$$k\,\sup(A) \ \leqslant \ \sup(k\,A)$$

□

I.3.b) Norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$

Théorème 4.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application $\|\cdot\|_\infty$ suivante est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

$$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\|_\infty & : & \mathcal{B}(I,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \sup\limits_{t\in I} \big|f(t)\big| \end{array}$$

Démonstration.

- *Existence* : Soit $f \in \mathcal{B}(I, K)$.
  Comme f est une fonction bornée, alors l'ensemble $\{\big|f(t)\big| \mid t \in I\}$ est :
  × un sous-ensemble de $\mathbb{R}$,
  × non vide,
  × majoré.
  Il admet donc une borne supérieure. Ainsi $\sup\limits_{t\in I} \big|f(t)\big|$ est bien défini.
- *Homogénéité* : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

$$\|\lambda\,f\|_\infty \ = \ \sup_{t\in I} \big|\lambda\,f(t)\big| \ = \ \sup_{t\in I} \big(|\lambda|\,|f(t)|\big) \ = \ |\lambda| \sup_{t\in I} |f(t)| \ = \ |\lambda|\,\|f\|_\infty$$

- *Séparation* : Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.
  Supposons : $\|f\|_\infty = 0$.
  Comme $\sup\limits_{t\in I} \big|f(t)\big|$ est le plus petit majorant de l'ensemble $\{\big|f(t)\big| \mid t \in I\}$, on sait :

$$\forall t \in I, \quad 0 \ \leqslant \ \big|f(t)\big| \ \leqslant \ \|f\|_\infty$$

  On en déduit :

$$\forall t \in I, \quad \big|f(t)\big| \ = \ 0$$

  La fonction f est donc la fonction nulle sur I.

- *Inégalité triangulaire* : Soit $(f, g) \in \big(\mathcal{B}(I, \mathbb{K})\big)^2$.
  Soit $t \in I$. Par inégalité triangulaire sur $|\cdot|$:

$$|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$$

  Donc : $|f(t) + g(t)| - |f(t)| \leqslant |g(t)|$. D'où :

$$|f(t) + g(t)| - |f(t)| \leqslant \|g\|_\infty$$

  On en déduit :

$$|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + \|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

  Comme l'inégalité précédente est valide pour tout $t \in I$, on obtient finalement :

$$\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

I.4. Autres normes

I.4.a) Sur l'ensemble des familles sommables

Exemple
Les applications suivantes sont des normes.

1. On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites sommables.

$$\begin{array}{rccl} N_1 & : & \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & u = (u_n) & \mapsto & N_1(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| \end{array}$$

2. On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites de carrés sommables.

$$\begin{array}{rccl} N_2 & : & \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & u = (u_n) & \mapsto & N_2(u) = \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \end{array}$$

I.4.b) Sur l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I

Exemple
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les applications suivantes sont des normes.

1. On note E_1 l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_1 & : & E_1 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f(t)| \, dt \end{array}$$

2. On note E_2 l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrables sur I.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_2 & : & E_2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_I |f(t)|^2 \, dt} \end{array}$$

II. Boules sur un espace vectoriel normé

II.1. Distance associée à une norme

II.1.a) Définition

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On appelle **distance** associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E l'application d définie par :

$$\mathrm{d} \;:\; \begin{array}{rcl} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{d}(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

Exemple

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$ est la distance euclidienne manipulée dans la vie de tous les jours.

II.2. Propriétés des distances

Théorème 5.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1. Symétrie *:*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}(x,y) \;=\; \mathrm{d}(y,x)}$$

2. Homogénéité *:*

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}\big(\lambda \cdot (x,y)\big) \;=\; |\lambda|\, \mathrm{d}(x,y)}$$

3. Séparation *:*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y}$$

4. Inégalité triangulaire *:*

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in E^3,\ \mathrm{d}(x,z) \;\leqslant\; \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)}$$

Démonstration.

Ce sont des reformulations des propriétés d'une norme. □

II.3. Boules ouvertes, boules fermées, sphère

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soient $a \in E$ et soit $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B(a,r)$ et défini par :

$$\boxed{B(a,r) = \big\{x \in E \,|\, \mathrm{d}(a,x) < r\big\}}$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B_f(a,r)$ et défini par :

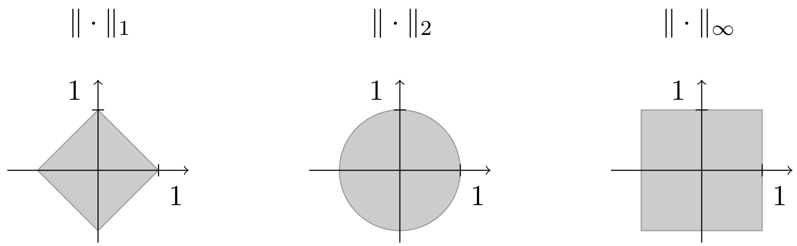
$$\boxed{B_f(a,r) = \big\{a \in E \,|\, \mathrm{d}(a,x) \leqslant r\big\}}$$

- On appelle **sphère** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $\mathbb{S}(a,r)$ et défini par :

$$\boxed{\mathbb{S}(a,r) = \big\{x \in E \mid \mathrm{d}(a,x) = r\big\}}$$

Exemple

On peut représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées en $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1 associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.



Remarque

- On note une inclusion entre les boules précédentes.
  On peut en fait démontrer le résultat suivant :

  Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.

  Soient $a \in E$ et $r \in \,]0, +\infty[$.
  On note $B_1(a, r)$ (resp. $B_2(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r pour la norme N_1 (resp. N_2).

  Supposons : $N_1 \leqslant N_2$ (c'est-à-dire : $\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant N_2(x)$).

  Alors : $B_2(a, r) \subset B_1(a, r)$.

- On peut aussi remarquer :

$$B(a, r) \subsetneq B_f(a, r)$$

$$r \leqslant s \ \Rightarrow \ B(a, r) \subset B(a, s)$$

II.4. Les boules sont des parties convexes

II.4.a) Notion de segment dans un espace vectoriel (normé)

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $(x, y) \in E \times E$.

- On appelle segment d'extrémités x et y, noté $[x, y]$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\boxed{\texttt{SEG}(x, y) \ = \ \{t \cdot x + (1 - t) \cdot y \mid t \in [0, 1]\}}$$

II.4.b) Notion de parties convexes

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $A \subset E$ une partie non vide de E.

- La partie A est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ \texttt{SEG}(x, y) \ \subset \ A$$

Remarque

- Une boule d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est toujours une partie convexe.
- Démontrons-le.

  Soit $r > 0$ et soit $a \in E$.

  Soit $(x, y) \in B(a, r) \times B(a, r)$.

  Démontrons : $\texttt{SEG}(x, y) \ \subset \ B(a, r)$.
  Il s'agit donc de démontrer :

$$\forall z \in \texttt{SEG}(x, y),\ z \in B(a, r) \quad \text{(c'est-à-dire : } \|z - a\| < r)$$

  Soit $z \in \texttt{SEG}(x, y)$.
  Autrement dit, il existe $t \in [0, 1]$ tel que : $z = t \cdot x + (1 - t) \cdot y$.

$$\begin{array}{rcl}
\|z - a\| & = & \|t \cdot x + (1 - t) \cdot y - a\| \\
& = & \|t \cdot x + (1 - t) \cdot y - \big(t \cdot a + (1 - t) \cdot a\big)\| \\
& = & \|t \cdot (x - a) + (1 - t) \cdot (y - a)\| \\
& \leqslant & \|t \cdot (x - a)\| + \|(1 - t) \cdot (y - a)\| \\
& \leqslant & |t| \ \|x - a\| + |1 - t| \ \|y - a\| \\
& < & t\ r + (1 - t)\ r \ = \ r
\end{array}$$

II.5. Parties bornées d'un espace vectoriel normé

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $A \subset E$ une partie de E.

- La partie A est dite bornée s'il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que : $A \subset B_f(a, r)$.
- On démontre de manière directe :

$$\begin{aligned} A \text{ est une partie bornée} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists a \in E,\ \exists r > 0,\ A \subset B_f(a, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists a \in E,\ \exists r > 0,\ A \subset B(a, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0,\ A \subset B_f(0_E, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0,\ A \subset B(0_E, r) \end{aligned}$$

Remarque

- Si $A \subset E$ est une partie non vide d' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit qu'une fonction $f : A \to E$ est bornée si son image $f(A)$ est une partie bornée de E.
  Autrement dit, f est bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in A,\ \|f(x)\| \ \leqslant \ M$$

- Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \ \leqslant \ M$$

III. Convergence des suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

III.1. Limite d'une suite d'éléments de E

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Soit $\ell \in E$.

- On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge**, ou **tend**, vers ℓ, si $\|x_n - \ell\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon\ \Big)$$

  ou encore, avec l'abus de notation habituel :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

  Si c'est le cas, l'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On adopte les notations usuelles $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ pour signifier que la suite (x_n) converge vers ℓ.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Démonstration.
Démontrons l'unicité de la limite.
Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux limites potentielles d'une suite (x_n).

$$0 \ \leqslant \ \|\ell_1 - \ell_2\| \ = \ \|(\ell_1 - x_n) + (x_n - \ell_2)\| \ \leqslant \ \|\ell_1 - x_n\| + \|x_n - \ell_2\|$$

Or :

× $\|\ell_1 - x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

× $\|x_n - \ell_2\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\ell_1 - \ell_2\| = \|\ell_1 - \ell_2\| = 0$. □

Exemple

1. Toute suite constante converge vers sa valeur constante.

2. Si une suite (x_n) converge vers une limite $\ell \in E$ alors : $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$.

3. Lorsque $E = \mathbb{K}$, on retrouve la notion de suite (scalaire) convergente.

4. La définition précédente permet de donner du sens à la notion de suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ convergente ou encore de suite de matrices convergentes. Le résultat suivant permet de caractériser plus facilement ces cas.

III.2. Caractérisation de la convergence des suites en dimension finie

III.2.a) Notion de normes équivalentes

Théorème 6.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

- *On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si :*

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ \alpha\ N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta\ N_1(x)$$

Remarque

- Dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}^p$:

$$\boxed{\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1 \leqslant p \times \|\cdot\|_\infty}$$

Plus précisément, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2} \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k| \leqslant p \times \max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k|$$

Cela démontre que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{K}^p$.

Démonstration.
On démontre, de manière équivalente :

$$\|\cdot\|_\infty^2 \leqslant \|\cdot\|_2^2 \leqslant \|\cdot\|_1^2 \leqslant p \times \|\cdot\|_\infty^2$$

Autrement dit, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\left(\max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k|\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k|\right)^2 \leqslant p^2 \times \left(\max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k|\right)^2 \square$$

III.2.b) En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Théorème 7.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On suppose que E est de dimension finie notée $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E de dimension finie, *toutes les normes sur E sont équivalentes.*

`MÉTHODO` **Démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes**

- Comme mentionné plus haut, lorsque l'espace vectoriel E de travail est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En revanche, en dimension infinie, les normes ne sont pas forcément équivalentes. À la question : « Les normes N_1 et N_2 suivantes sont-elles équivalentes ? » on répond :
  × « oui » dans le cas où l'espace vectoriel E est de dimension finie.
  × généralement « non » si E est de dimension infinie. En dimension infinie, deux normes peuvent être équivalentes mais la formulation de la question (on ne demande pas : « Démontrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes ») laisse penser que ce n'est pas le cas ici.

  En particulier, lorsque l'on travaille sur un espace de fonctions (ensemble des fonctions bornées sur un intervalle I, ensemble des fonctions continues et (de carré) intégrables sur I, ensemble $\mathbb{K}[X]$), il est relativement fréquent d'avoir à démontrer que deux normes sont équivalentes.

  Il convient alors de se doter d'un outil permettant de démontrer la non équivalence de deux normes.

- Considérons N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.
  Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :
  $$\forall x \in E,\ \alpha\ N_1(x) \ \leqslant\ N_2(x) \ \leqslant\ \beta\ N_1(x)$$
  On en déduit alors que pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$:
  $$N_2(x_n) \ \leqslant\ \beta\ N_1(x_n) \qquad \text{et} \qquad N_1(x_n) \ \leqslant\ \frac{1}{\alpha}\ N_1(x_n)$$
  Les normes étant positives, on en conclut : $|\,N_2(x_n)\,| \ \leqslant\ \beta\ |\,N_1(x_n)\,|$.
  Cela démontre : $N_2(x_n) = \underset{n\to+\infty}{O}\big(N_1(x_n)\big)$.
  Pour des raisons similaires : $N_1(x_n) = \underset{n\to+\infty}{O}\big(N_2(x_n)\big)$.
  Ainsi, si deux normes sont équivalentes, les suites $\big(N_1(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(N_2(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont du même ordre.
  (la relation « être du même ordre que » qui relie deux suites est évidemment réflexive et on utilise parfois la notation : $N_1(x_n) = \underset{n\to+\infty}{\Theta}\big(N_2(x_n)\big)$)
- La contraposée du point précédent permet d'affirmer que si deux suites $\big(N_1(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(N_2(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas du même ordre alors les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.
  Pour démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut donc chercher une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :
  × $\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui démontre que la suite $\left(\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}\right)$ n'est pas bornée.
  × $\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui démontre que la suite $\left(\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)}\right)$ n'est pas bornée.
- Finalement, on établit la condition suivante :

$$\boxed{\exists (x_n) \in E^{\mathbb{N}},\ \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \bullet\ \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{Les normes } N_1 \\ \text{et } N_2 \text{ ne sont pas} \\ \text{équivalentes}\end{array}}$$

De manière générale, il est conseillé de procéder par l'absurde pour démontrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère les normes N_1 et N_2 suivantes.

a) $N_1(\,P\,) = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\ dt$.

b) $N_2(\,P\,) = \underset{k\in[\![0,\deg(P)]\!]}{\max} |a_k|$ (où l'on a noté $(a_0, \dots, a_{deg(P)})$ les coefficients de P).

Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Démonstration.

- On procède par l'absurde.
  Supposons que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.
  Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :
  $$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \alpha\ N_1(P) \ \leqslant\ N_2(P) \ \leqslant\ \beta\ N_1(P)$$
- Considérons la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :
  × $N_1(X^n) = \displaystyle\int_0^1 |\,t^n\,|\ dt = \int_0^1 t^n\ dt = \frac{1}{n+1}$.
  × $N_2(X^n) = \max(|0|, \dots, |0|, |1|) = 1$.
  On en déduit alors :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \ \leqslant\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{N_2(X^n)} \ \leqslant\ \beta\ \underset{\substack{\shortparallel \\ \frac{1}{n+1}}}{N_1(X^n)}$$
  Or :
  × $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  × $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  On en déduit, par théorème d'encadrement : $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est absurde. □

III.2.c) Conséquence pour la convergence des suites en dimension finie

Théorème 8.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On note $p = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que E est de **de dimension finie** *$p \in \mathbb{N}^*$.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in E$.

Notons N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N_1(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell \Leftrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N_2(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell}$

> *La convergence d'une suite d'éléments de E, et le cas échéant sa limite, ne dépendent pas du choix de la norme sur E.*

2. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Notons :*

- × *$(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.*
- × *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans $\mathscr{B}$.*

On a alors l'équivalence suivante :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ x_k^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

> *La convergence d'une suite se ramène à la convergence de ses coordonnées dans une base.*

Démonstration.

1. Comme E est de dimension finie, N_1 et N_2 sont équivalentes.
Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \alpha\ N_1(x) \ \leqslant\ N_2(x) \ \leqslant\ \beta\ N_1(x) \qquad (*)$$

$(\Leftarrow)$ Supposons $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N_2(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell$. Alors :

$$\alpha\ N_1(x_n - \ell) \ \leqslant\ N_2(x_n - \ell) \ \leqslant\ \beta\ N_1(x_n - \ell)$$

Or :

- × $\alpha\ N_1(x_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- × $\beta\ N_1(x_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit, par théorème d'encadrement : $N_2(x_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$(\Rightarrow)$ D'après $(*)$: $\forall x \in E,\ \dfrac{1}{\beta}\ N_2(x) \ \leqslant\ N_1(x) \ \leqslant\ \dfrac{1}{\alpha}\ N_2(x)$.
D'où le résultat souhaité à l'aide du fonctionnement précédent.

2. • Dans le cas de la norme $\|\cdot\|_1$ et lorsque $E = \mathbb{K}^p$

Soit $(x_n) \in \left(\mathbb{K}^p\right)^{\mathbb{N}}$. On note :

- × pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans la base canonique.
- × $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base canonique.

$$\begin{aligned}
x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow}} \ell \ &\Leftrightarrow\ \|x_n - \ell\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow\ \|\,(x_1^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)}) - (\ell_1, \ldots, \ell_p)\,\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow\ \|\,(x_1^{(n)} - \ell_1, \ldots, x_p^{(n)} - \ell_p)\,\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1,p]\!],\ |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

- Dans le cas de la norme $\|\cdot\|_1$ sur E
  Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $(x_n) \in (E)^{\mathbb{N}}$. On note :
  × pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans la base $\mathscr{B}$.
  × $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned} x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow}} \ell \ &\Leftrightarrow\ \|x_n - \ell\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Leftrightarrow\ \|\,(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}) - (\ell_1, \dots, \ell_p)\,\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Leftrightarrow\ \|\,(x_1^{(n)} - \ell_1, \dots, x_p^{(n)} - \ell_p)\,\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1,p]\!],\ |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

- Dans le cas d'une norme N sur E
  Avec les notations précédentes.

$$\begin{aligned} x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell \ &\Leftrightarrow\ x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow}} \ell \qquad \textit{(car } N \textit{ et } \|\cdot\|_1 \textit{ sont équivalentes)} \\ &\Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1,p]\!],\ |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

□

Remarque

- Ce résultat est très utile en pratique. Lorsqu'on travaille sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, la nature d'une suite ne dépend pas de la norme utilisée. Par exemple :
  × la suite $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2 + X - \frac{e^{i\,n}}{n}\right)_n$ est convergente, de limite $X^2 + X$.
  × la suite $\left(\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 1 \\ -\frac{e^{i\,n}}{n} & 1 \end{pmatrix}\right)_n$ est convergente, de limite $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.2.d) Traduction du résultat général pour les suites dans les espaces de dimension finie usuels

- Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On retrouve la caractérisation connue :

$$\boxed{z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Rightarrow\ \begin{cases} \bullet\ \operatorname{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Re}(\ell) \\ \bullet\ \operatorname{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x_n = \left(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}\right) \in \mathbb{K}^p$, et soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{K}^p$. Alors :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow\ \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ x_k^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A_n = \left(a_{i,j}^{(n)}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et soit $L = (\ell_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \ \Leftrightarrow\ \forall\, (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!],\ a_{i,j}^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_{i,j}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_n = \sum_{k=0}^{p} a_k^{(n)} X^k \in \mathbb{K}_p[X]$ et $L = \sum_{k=0}^{p} \ell_k X^k \in \mathbb{K}_p[X]$. Alors :

$$\boxed{P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \ \Leftrightarrow\ \forall\, k \in [\![0,p]\!],\ a_k^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

Exemple

1. Soit $a \in \mathbb{K}$. Étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, et soit F un sous-espace de E. Si une suite d'éléments de F converge, alors sa limite appartient à F.

Remarque
La convergence d'une suite d'éléments de E, et la valeur de son éventuelle limite, peuvent dépendre du choix de la norme lorsque E n'est pas de dimension finie.

Exercice
Étudier la convergence de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ lorsque l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

a. $\|P\| = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\,dt.$ ***b.*** $\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|.$

III.3. Propriétés des suites convergentes

III.3.a) Propriétés algébriques

Théorème 9.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ deux suites.

Soient $\ell_1 \in E$ et $\ell_2 \in E$.

Soti $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. **Linéarité**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\bullet\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\\[2ex] \bullet\ y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2\end{array}\right\} \Rightarrow\ \lambda\, x_n + \mu\, y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2}$$

2. **Produit externe**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}\\[2ex] \bullet\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E\end{array}\right\} \Rightarrow\ \lambda_n\, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\, \ell}$$

Démonstration.
Analogue au cas des suites numériques vu en première année, en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$ pour les éléments de E. □

Exercice
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$, $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

Si $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$, alors $A_nB_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} AB$ (dans $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$).

Démonstration.
Considérer les suites des coefficients des matrices A_nB_n. □

III.3.b) Autres propriétés

Théorème 10.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

1. $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \text{La suite } (x_n) \text{ est bornée}}$

(c'est-à-dire : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| \leqslant M$)

2. a) $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

b) $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|}$

3. a) *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.*

$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge vers } \ell \quad \Rightarrow \quad \text{La suite } (x_{\varphi(n)}) \text{ converge vers } \ell}$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors toute suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

b) *Propriété de recouvrement*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \\ \bullet\ x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Démonstration.
Analogue au cas des suites numériques vu en première année, en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$. □

IV. Topologie dans un espace vectoriel normé

IV.1. Intérieur d'une partie

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** à D s'il existe une boule ouverte non vide de centre a et incluse dans D. Autrement dit, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \mathring{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0,\ B_o(x, r) \ \subset \ D \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0, \forall y \in E,\ \Big(y \in B_o(x, r) \ \Rightarrow \ y \in E\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0, \forall y \in E,\ \Big(\|y - x\| < r \ \Rightarrow \ y \in E\Big) \end{aligned}$$

- On appelle **intérieur** de D et on note $\mathring{D}$, l'ensemble des éléments de E qui sont des points intérieurs à D.

Remarque

- Si $x \in \mathring{D}$, alors il existe $r > 0$ tel que : $B_o(x, r) \ \subset \ D$. La boule $B_o(x, r)$ étant entièrement incluse dans D, le point x est, en particulier, un élément de D. Cela démontre : $\boxed{\mathring{D} \subset D}$.
- De manière informelle, l'intérieur de D est constitué de l'ensemble des éléments de D qui ne se trouvent pas sur la frontière de D. La notion de frontière n'est pas au programmme officiel. De manière informelle, un point est sur la frontière de D s'il se situe sur le « bord » ou sur le « contour » de la figure géométrique définissant D. De manière encore plus informelle, on peut penser à une personne au bord du précipice : un pas en avant provoque la chute ; un pas en arrière et la personne est en sécurité. De manière formelle :
  - × un élément de x se situe sur la frontière de D si toute boule ouverte de centre x rencontre à la fois l'intérieur de D et l'extérieur de D,
  - × on définit l'extérieur de D comme l'intérieur du complémentaire de D.

- Lorsque $E = \mathbb{R}$, l'ensemble des points intérieurs à ;
  - $\times$ $D = [0, 1[$ est $\mathring{D} =]0, 1[$,
  - $\times$ $D =]0, 1[$ est $\mathring{D} =]0, 1[$,
  - $\times$ $D =]0, +\infty[$ est $\mathring{D} =]0, +\infty[$,
  - $\times$ $D = [0, +\infty[$ est $\mathring{D} =]0, +\infty[$.

  La partie $\mathring{D}$ est obtenue en ne considérant que les éléments de D qui ne sont pas situés sur le bord de D. Ainsi, l'intérieur d'un intervalle réel est obtenu en supprimant les bornes finies de cet intervalle.
- On peut démontrer, que pour toute suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers un point intérieur à } D \quad \Rightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in D}$$

IV.2. Partie ouverte d'un espace vectoriel normé

IV.2.a) Définition

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- On dit que D est une **partie ouverte** si tout élément de D est intérieur à D. Autrement dit :

$$\begin{array}{rcl} D \text{ est une partie ouverte de } E & \Leftrightarrow & \forall x \in D,\ x \in \mathring{D} \\ & \Leftrightarrow & D = \mathring{D} \\ & \Leftrightarrow & D \subset \mathring{D} \end{array}$$

(les deux dernières propositions sont obtenues en rappelant : $\mathring{D} \subset D$)

Remarque

- $\boxed{\text{Les boules ouvertes de } E \text{ sont des parties ouvertes de } E}$
- Les parties E et $\varnothing$ sont des ouverts de E.
- Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (comme par exemple $]0, 1[$, $]-1, +\infty[$ ou encore $]-\infty, +\infty[$) sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

IV.2.b) Stabilité par réunion infinie et intersection finie de l'ensemble des ouverts

Théorème 11.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) a)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ D_1 \text{ est un ouvert de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un ouvert de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La partie } D_1 \cup D_2 \\ \text{est un ouvert de } E \end{array}}$$

b) Une réunion finie de parties ouvertes est une partie ouverte.

c) Une réunion infinie de parties ouvertes est une partie ouverte.

2) a)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ D_1 \text{ est un ouvert de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un ouvert de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La partie } D_1 \cap D_2 \\ \text{est un ouvert de } E \end{array}}$$

b) Une intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.

c) Une intersection infinie de parties ouvertes `N'`*est* `PAS` *forcément une partie ouverte.*

Remarque

- De manière générale, l'intérieur d'une réunion de parties `N'`est `PAS` la réunion de l'intérieur de ces parties. Considérons par exemple l'espace vectoriel $\mathbb{R}$, muni de la valeur absolue. Notons $D_1 =]-\infty, 0]$, $D_2 = [0, +\infty[$. Alors :
  - $\times$ $D_1 \cup D_2 =]-\infty, +\infty[$ et $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$,
  - $\times$ $\mathring{D}_1 \cup \mathring{D}_2 =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}^*$.
- Il n'est pas difficile de trouver des exemples illustrant le fait que l'ensemble des ouverts de E `N'`est `PAS` stable par intersection infinie. Par exemple, dans $\big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[\ = \ [0, 1]$$

ou encore :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\ = \ \{0\}$$

et $[0, 1]$ et $\{0\}$ ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}$.

IV.3. Adhérence d'une partie

IV.3.a) Définition

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- Un élément $a \in E$ est dit **adhérent** à D si **toute** boule ouverte non vide de centre a rencontre D.
- On appelle **adhérence** de D et on note $\overline{D}$, l'ensemble des éléments de E qui sont des points adhérents à D. Ainsi, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \overline{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall r > 0,\ B_o(x, r) \cap D \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \quad \forall r > 0, \exists y \in B_o(x, r) \cap D \\ &\Leftrightarrow \quad \forall r > 0, \exists y \in D, y \in B_o(x, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall r > 0, \exists y \in D, \|y - x\| < r \end{aligned}$$

Remarque

- Si $x \in D$ alors, pour tout $r > 0$, $x \in B_o(x, r)$. Ainsi : $\boxed{D \subset \overline{D}}$.
- Lorsque $E = \mathbb{R}$, l'ensemble des points adhérents à :
  × $D = [0, 1[$ est $\overline{D} = [0, 1]$,
  × $D =]0, 1[$ est $\overline{D} = [0, 1]$,
  × $D =]0, +\infty[$ est $\overline{D} = [0, +\infty[$,
  × $D = [0, +\infty[$ est $\overline{D} = [0, +\infty[$.

  De manière informelle, l'adhérence de D est constituée de l'ensemble des éléments de D auquel on ajoute la frontière de D. Pour obtenir l'adhérence d'un intervalle réel, on lui ajoute ses bornes finies.
- On a vu que $\mathring{D}$ est constitué des points de D à l'exclusion des éléments de la frontière de D et que $\overline{D}$ est constitué de l'ensemble des éléments de D auquel on ajoute la frontière de D. Cela permet de définir formellement la frontière de D, ensemble noté ∂D (définition hors programme) :

$$\partial D \ = \ \overline{D} \setminus \mathring{D}$$

IV.3.b) Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Théorème 12.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

Soit $a \in E$.

$$\boxed{a \in \overline{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}},\ x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a}$$

(tout élément de $\overline{D}$ est limite d'une suite d'éléments de D)

Démonstration.

($\Rightarrow$) Soit $a \in \overline{D}$. Par définition, on a alors, pour tout $r > 0$:

$$B(a, r) \cap D \neq \varnothing \qquad (*)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \frac{1}{n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant $(*)$ en $r = r_n$, on obtient : $B(a, r_n) \cap D \neq \varnothing$.
Notons alors x_n un élément de $B(a, r_n) \cap D$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$0 \ \leqslant \ \|x_n - a\| \ \leqslant \ \frac{1}{n+1}$$

Or :
× $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
× $\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\|x_n - a\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe une suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Démontrons $a \in \overline{D}$. Il s'agit de démontrer :

$$\forall r > 0,\ B(a, r) \cap D \neq \varnothing$$

Soit $r > 0$. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - a\| \ \leqslant\ \varepsilon$$

On applique cette propriété en $\varepsilon = r$.
On obtient alors qu'il existe n_0 tel que : $x_{n_0} \in B(a, r)$.
Comme de plus : $x_{n_0} \in D$, on en conclut : $x_{n_0} \in B(a, r) \cap D$ et ainsi :

$$B(a, r) \cap D \neq \varnothing$$

□

IV.4. Partie fermée d'un espace vectoriel normé

IV.4.a) Définition

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soit $D \subset E$ une partie de E.

- On dit que D est une **partie fermée** si tout élément adhérent à D est un point de D. Autrement dit :

$$\begin{aligned} D \text{ est une partie fermée de } E \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \overline{D},\ x \in D \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{D} = D \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{D} \subset D \end{aligned}$$

Remarque

- $\boxed{\text{Les boules fermées de } E \text{ et les sphères de } E \text{ sont des fermés de } E}$
- Les parties E et $\varnothing$ sont des fermés de E. On a vu précédemment que ce sont aussi des ouverts de E. Cela démontre l'existence de parties à la fois ouvertes et fermées de E.
- On aurait pu définir les fermés de E à l'aide de la caractérisation suivante :

$$\boxed{\begin{array}{c} D \text{ est une partie} \\ \text{fermée de } E \end{array} \Leftrightarrow \complement_E D \text{ est une partie ouverte de } E}$$

  Cela démontre au passage (en considérant $A = \complement_E D$) que les parties ouvertes sont exactement les complémentaires des parties fermées de E.

IV.4.b) Caractérisation séquentielle du caractère fermé d'une partie

Théorème 13.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soit $D \subset E$ une partie de E.

$$\boxed{\begin{array}{r} D \textit{ est un} \\ \textit{fermé de } E \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \textit{Toute suite convergente constituée d'éléments} \\ \textit{de } D \textit{ converge vers un élément de } D \end{array}}$$

Démonstration.

(⇒) Supposons que D est une partie fermée.
Soit $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de D.
Notons a sa limite.
Alors, par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $a \in \overline{D}$. Ainsi :

$$a \in \overline{D} = D \qquad \textit{(car } D \textit{ est une partie fermée de } E\textit{)}$$

(⇐) Supposons que toute suite convergente constituée d'éléments de D converge vers un élément de D.
Démontrons : $D = \overline{D}$.
($\subset$) $D \subset \overline{D}$ par définition.
($\supset$) Démontrons : $\overline{D} \subset D$.
Soit $a \in \overline{D}$.
Alors, par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
Au vu de l'hypothèse, on en conclut : $a \in D$. □

Remarque

- De manière générale, si D est une partie de E, il est possible de sortir de D à l'aide d'une suite d'éléments de D. C'est le sens de la caractérisation séquentielle de l'adhérence : les limites de suites convergentes d'éléments de D sont des éléments adhérents à D. Ce terme est à considérer au sens propre : les points adhérents à D sont ceux qui adhèrent à D, à savoir ceux qui « sont fortement attachés à D, y collent » (comme des coquillages à un rocher).

- Le fait que les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite est une illustration du point précédent. Par exemple, on peut sortir de $D = [0,1[$ par limite de suite d'éléments de D. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \ < \ 1 - \frac{1}{n} \ < \ 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \in [0,1]$$

- Ce théorème stipule que les parties fermées D sont celles dont on ne peut sortir par limite de suites d'élements de E.

IV.4.c) Stabilité de l'ensemble des fermés par réunion finie et intersection infinie

Théorème 14.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) a)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ D_1 \text{ est un fermé de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un fermé de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La partie } D_1 \cap D_2 \\ \text{est un fermé de } E \end{array}}$$

b) Une intersection finie de parties fermées est une partie fermée.

c) Une intersection infinie de parties fermées est une partie fermée.

2) a)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ D_1 \text{ est un fermé de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un fermé de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La partie } D_1 \cup D_2 \\ \text{est un fermé de } E \end{array}}$$

b) Une réunion finie de parties fermées est une partie fermée.

c) Une réunion infinie de parties fermées `N'`*est* `PAS` *forcément une partie fermée.*

Remarque

- De manière générale, l'adhérence d'une intersection de parties `N'`est `PAS` l'intersection de l'adhérence de ces parties. Considérons par exemple l'espace vectoriel $\mathbb{R}$, muni de la valeur absolue. Notons $D_1 =]-\infty, 0[$, $D_2 =]0, +\infty[$. Alors :
  × $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ et $\overline{\varnothing} = \varnothing$,
  × $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} =]-\infty, 0] \cup [0, +\infty[= \{0\}$.
- Il n'est pas difficile de trouver des exemples illustrant le fait que l'ensemble des fermés de E `N'`est `PAS` stable par réuninon infinie. Par exemple, dans $\big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]0,1[$$

IV.5. Partie dense

IV.5.a) Définition

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- On dit que D est une **partie dense de** E (ou que D est dense dans E) si $\overline{D} = E$.

IV.5.b) Caractérisation séquentielle

Théorème 15.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \text{La partie } D \text{ est dense dans } E \\ \Leftrightarrow & \overline{D} = E \\ \Leftrightarrow & E \subset \overline{D} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in E,\ \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}},\ x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \quad (*) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in E,\ \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}},\ \|x_n - x\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}}$$

$(*)$ *: par caractérisation séquentielle de l'adhérence*

On pourra retenir :

$$\boxed{\text{La partie } D \text{ est dense dans } E \ \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Tout élément de } E \text{ est limite} \\ \text{d'une suite d'éléments de } D \end{array}}$$

Remarque

- L'ensemble E est dense dans E.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
- L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ `N'`est `PAS` dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit d'exhiber une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons : $M_k = M - \frac{1}{k} I_n$. Alors $M_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
- Il reste à montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, M_k est inversible. On démontre en réalité que cette propriété est vérifiée à partir d'un certain rang. En effet, la fonction :
  $$x \mapsto \det(M - x\, I_n)$$
  est polynomiale de degré n et admet donc au plus n racines.
  On obtient alors le résultat souhaité. □

IV.6. Topologie et normes équivalentes

Théorème 16.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On note N_1 et N_2 deux **normes équivalentes** *de E.*

1) *Tout ouvert de (E, N_1) est un ouvert de (E, N_2).*

2) *Tout fermé de (E, N_1) est un fermé de (E, N_2).*

(des normes équivalents définissent la même topologie : mêmes ouverts, mêmes fermés, mêmes suites convergentes)

V. Continuité des fonctions entre deux espaces vectoriels normés

V.1. Limite d'une fonction et continuité

V.1.a) Définition

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur D et à valeurs dans F.

Soit $a \in \overline{D}$ et soit $\ell \in F$.

1. Limite d'une fonction f en un point adhérent

- On dit que f admet la limite ℓ au point a si :
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ \Big(\|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon \Big)$$
  Si c'est le cas, l'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de la fonction f en a.
- On adopte les notations usuelles $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour signifier que f admet la limite ℓ en a.

2. Continuité d'une fonction f en un point et sur une partie

- On dit que f est **continue en** $a \in D$ si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- On dit que f est **continue** (sur D) si f est continue en tout point de la partie D.
  On note alors $\mathscr{C}(D, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur D et à valeurs dans F.

Remarque

- Toute fonction constante est continue sur son ensemble de définition.
- Si $E = F$, la fonction identité est continue sur E.
- Lorsque $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{K}$, on retrouve les notions connues de fonction (scalaire) convergente en un point, continue en un point, ou continue sur son domaine de définition.

- Rappelons que, par définition de limite : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \|f(x)-\ell\|_F \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

  Cette propriété met en évidence le fait que la notion de limite dépend, a priori de la norme considérée. Il en est de même de la continuité : une fonction peut être continue pour une paire de normes et pas pour une autre (on traitera de tels exemples en TD).
  Dans le cas particulier où E et F sont de dimensions finies, les normes sur chacun de ces espaces vectoriels sont équivalentes ce qui permet de conclure, dans ce cas, que la continuité est indépendante de la norme choisie.

V.1.b) Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Théorème 17.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de D.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur D.

Soit $a \in \overline{D}$ et soit $\ell \in F$.

1) *Tout d'abord :*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \Big(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}},\ \big(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \big)\Big)}$$

En particulier, pour toute suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) = \ell}$$

2) *On en déduit :*

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ continue en } a \\ \Leftrightarrow \Big(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}},\ \big(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f\big(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\big) \big)\Big)\end{array}}$$

Démonstration.

- On suppose : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
  Il s'agit de démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|f(x_n) - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

- Soit $\varepsilon > 0$.
  Comme f admet la limite ℓ en a, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, \Big(\|x - a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon \Big)$$

  Comme $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer la propriété précédente en $x = x_n$:

$$\|x_n - a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x_n) - \ell\| \leqslant \varepsilon \qquad (*)$$

  Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - a\|_E \leqslant \alpha$.
  On peut donc conclure, par $(*)$: $\forall n \geqslant n_0,\ \|f(x_n) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$, ce qui établit la propriété recherchée. □

Remarque

Si F est de dimension finie, alors la notion de limite d'une fonction f en un point a se ramène à la limite en a des fonctions coordonnées de f dans une base $\mathscr{B}$ de F.

Plus précisément, si on note,

× $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.

× pour tout $x \in D$, $(f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{K}^p$ les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathscr{B}$,

alors on peut démontrer :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!],\ f_k(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_k$$

V.1.c) Opérations algébriques sur les limites

Théorème 18.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Soit $D \subset E$ une partie de E.
Soient $f, g : E \to F$ deux fonctions définies sur D.
Soit $(\ell, \ell_1, \ell_2) \in E \times E \times E$. Soit $a \in \overline{D}$.

1. **Linéarité**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \bullet\ g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\, f(x) + \mu\, g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2$$

En particulier :
- $\times$ *une CL de fonctions continues en a est continue en a.*
- $\times$ *une CL de fonctions continues sur D est continue sur D.*

2. **Produit externe**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K} \\ \bullet\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x)\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\, \ell$$

En particulier, le produit de deux fonctions continues en a (resp. D), dont l'une est scalaire, est une fonction continue en a (resp. D).

Démonstration.

1. Pour tout $x \in E$:

$$\begin{array}{cll} & \|\big(\lambda\, f(x) + \mu\, g(x)\big) - \big(\lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2\big)\|_F & \\ = & \|\big(\lambda\, f(x) - \lambda\, \ell_1\big) + \big(+\mu\, g(x) - \mu\, \ell_2\big)\|_F & \\ \leqslant & \|\big(\lambda\, f(x) - \lambda\, \ell_1\big)\|_F + \|\big(\mu\, g(x) - \mu\, \ell_2\big)\|_F & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ \leqslant & |\,\lambda\,|\ \|f(x) - \ell_1\|_F + |\,\mu\,|\ \|g(x) - \ell_2\|_F & \textit{(par homogénéité)} \end{array}$$

On conclut alors par théorème d'encadrement.

2. Il s'agit ici d'écrire, pour tout $x \in E$:

$$\begin{array}{cll} & \|\varphi(x) \cdot f(x) - \lambda \cdot \ell\|_F & \\ = & \|\varphi(x) \cdot \big(f(x) - \ell\big) + \varphi(x) \cdot \ell - \lambda \cdot \ell\|_F & \\ \leqslant & \|\varphi(x) \cdot \big(f(x) - \ell\big) + \big(\varphi(x) - \lambda\big) \cdot \ell\|_F & \\ \leqslant & \|\varphi(x) \cdot \big(f(x) - \ell\big)\|_F + \|\big(\varphi(x) - \lambda\big) \cdot \ell\|_F & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ \leqslant & |\,\varphi(x)\,|\ \|f(x) - \ell\|_F + |\,\varphi(x) - \lambda\,|\ \|\ell\|_F & \textit{(par homogénéité)} \end{array}$$

On conclut alors par théorème d'encadrement. □

V.1.d) Composition de limites, continuité d'une composée

Théorème 19.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Soit $D \subset E$ une partie de E.
Soient $f_1 : E \to F$ une fonction définie sur une partie $D \subset E$.
Soient $f_2 : F \to G$ une fonction définie sur $f_1(D) \subset F$.
Soit $(\ell_1, \ell_2) \in E \times E$. Soit $a \in \overline{D}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_1(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \bullet\ f_2(y) \underset{y \to \ell_1}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (f_2 \circ f_1)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$$

En particulier, toute fonction $f = f_2 \circ f_1$ telle que :
- $\times$ *f_1 est continue sur une partie $D \subset E$.*
- $\times$ *f_2 est continue sur $f_1(D)$.*

est continue sur D.

Démonstration.
Notons $f = f_2 \circ f_1$.

- Il s'agit de démontrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_E \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell_2\|_F \leqslant \varepsilon$$

- Soit $\varepsilon > 0$.
  × Comme $f_2(y) \underset{y \to \ell_1}{\longrightarrow} \ell_2$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall y \in F, \|y - \ell_1\|_F \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ \|f_2(y) - \ell_2\|_G \leqslant \varepsilon \qquad (*)$$

  Soit $x \in D$. En appliquant $(*)$ à $y = f_1(x)$, on obtient :

$$\|f_1(x) - \ell_1\|_F \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ \left\| f_2\big(f_1(x)\big) - \ell_2 \right\|_G \leqslant \varepsilon$$

  × Or, comme $f_1(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, \|x - a\| \leqslant \delta \ \Rightarrow\ \|f_1(x) - \ell_1\|_F \leqslant \alpha \qquad (**)$$

  En combinant $(*)$ et $(**)$, on obtient la propriété souhaitée. □

V.1.e) Continuité des fonctions polynomiales

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle fonction monomiale sur $\mathbb{K}^n$ toute fonction g qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{rccl} g & : & \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & {x_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {x_n}^{\alpha_n} \end{array}$$

  où $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
- On appelle fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ toute fonction qui s'écrit comme combinaison de fonctions monomiales sur $\mathbb{K}^n$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

- Une fonction $f : E \to \mathbb{K}$ est dite polynomiale en les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ si pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ la fonction f est une combinaison linéaire de fonctions monomiales en les $(x_1, \cdots, x_n)$.

Théorème 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.*

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

- *Toute fonction $f : E \to \mathbb{K}$ qui est polynomiale en les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ est continue sur E.*

À CONNAÎTRE

- La fonction det s'écrit naturellement comme une fonction polynomiale en les coordonnées des matrices. Rappelons que pour tout $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$:

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\; a_{\sigma(1),1}\times\ldots\times a_{\sigma(n),n}$$

- On en déduit, grâce à ce théorème, que la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \det & : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & & A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

  est une fonction continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, si $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\det\big(A_p\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \det(A)$$

V.1.f) Continuité et topologie

Théorème 21.

Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soit $f : E\to F$ une fonction définie sur E.

La fonction f est continue sur E
$\Leftrightarrow$ *L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E*
$\Leftrightarrow$ *L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E*

Démonstration.

($\Leftarrow$) • Supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E. Démontrons que f est continue sur E. Il s'agit de démontrer que f est continue en tout point a de E, c'est-à-dire : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Autrement dit, il faut démontrer la propriété :

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in E, \|x-a\|_E<\delta \;\Rightarrow\; \|f(x)-f(a)\|_F<\varepsilon$$

$$\text{càd}\quad \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in E, x\in B_o(a,\delta) \;\Rightarrow\; f(x)\in B_o\big(f(a),\varepsilon\big)$$

- Soit $\varepsilon>0$.
Comme $B_o\big(f(a),\varepsilon\big)$ est un ouvert de F alors $f^{-1}\big(\,B_o\big(f(a),\varepsilon\big)\,\big)$ est un ouvert de E défini par :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\big(\,B_o\big(f(a),\varepsilon\big)\,\big) & = & \{x\in E \mid f(x)\in B_o\big(f(a),\varepsilon\big)\} \\ & = & \{x\in E \mid f(x)\in \|f(x)-f(a)\|_F<\varepsilon\} \end{array}$$

Comme $\|f(a)-f(a)\|_F = 0 < \varepsilon$, alors $a\in f^{-1}\big(\,B_o\big(f(a),\varepsilon\big)\,\big)$.
Par défintion d'un ouvert, on en déduit qu'il existe $\delta>0$ tel que :

$$B_o(a,\delta) \;\subset\; f^{-1}\big(\,B_o\big(f(a),\varepsilon\big)\,\big)$$

Cela démontre que pour tout $x\in E$:

$$x\in B_o(a,\delta) \;\Rightarrow\; x\in f^{-1}\big(\,B_o\big(f(a),\varepsilon\big)\,\big)$$

$$\text{càd}\quad \|x-a\|_E<\delta \;\Rightarrow\; \|f(x)-f(a)\|_F<\varepsilon$$

□

Théorème 22.

Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $f : E\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue sur E.

1) *Les parties :*

× $f^{-1}\big(\{0_{\mathbb{R}}\}\big) = \{x\in E \mid f(x)=0\}$,

× $f^{-1}\big(\,]-\infty,0]\,\big) = \{x\in E \mid f(x)\leqslant 0\}$,

× $f^{-1}\big(\,[0,+\infty[\,\big) = \{x\in E \mid f(x)\geqslant 0\}$,

sont des parties fermées de E.

2) *Les parties :*

× $f^{-1}\big(\,]-\infty,0[\,\big) = \{x\in E \mid f(x)<0\}$,

× $f^{-1}\big(\,]0,+\infty[\,\big) = \{x\in E \mid f(x)>0\}$,

× $f^{-1}\big(\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[\,\big) = \{x\in E \mid f(x)\neq 0\}$,

sont des parties ouvertes de E.

Exemple

- En remarquant :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det{}^{-1}\big(\{0_{\mathbb{K}}\}\big) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 0_{\mathbb{K}}\}$$

  est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est une application continue sur E (on verra que alors :

$$\mathrm{Ker}(f) \;=\; \{x \mid f(x) = 0_F\} \;=\; f^{-1}\big(\{0_F\}\big)$$

  est un fermé de E.

V.2. Applications lipschitziennes

V.2.a) Définition

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soit $f : E \to F$ définie sur une partie $D \subset E$.

- On dit que f est **lipschitzienne** sur D si :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, (x,\, y) \in D \times D,\ \|f(x) - f(y)\|_F \ \leqslant\ \alpha \|x - y\|_E$$

- Une telle constante α est appelée une constante (ou un rapport) de Lipschitz pour f.

Exemple

1. Les fonctions constantes sont les fonctions lipschitziennes de rapport 0.
2. Toute homothétie $\alpha \mathrm{id}_E$ d'un espace vectoriel normé E est lipschitzienne de rapport $|\alpha|$ sur E.
3. La norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ d'un espace vectoriel normé E est lipschitzienne de rapport 1 sur E. En effet, d'après la $2^{\text{ème}}$ inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \big|\ \|x\| - \|y\|\ \big| \ \leqslant\ \|x - y\|$$

V.2.b) Les applications lipschitziennes d'un espace vectoriel normé vers un autre sont continues

Théorème 23.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Toutes application $f : E \to F$ lipschitzienne sur E est continue sur E.

Démonstration.

- Supposons que f est lipschitzienne. Notons α sont rapport.

  Démontrons que f est continue sur E. Il s'agit de démontrer que f est continue en tout point a de E, c'est-à-dire : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- Soit $x \in E$.

$$0 \ \leqslant\ \|f(x) - f(a)\|_F \ \leqslant\ \alpha\, \|x - a\|_E$$

  Or :

  × $\|x - a\|_E \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$,

  × $0 \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\|f(x) - f(a)\|_F \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$$

□

V.2.c) Caractère lipschitzien des fonctions linéaires

Théorème 24.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

On suppose E **de dimension finie**.

1) $\boxed{f \in \mathscr{L}(E,F) \ \Rightarrow\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \ \leqslant\ \alpha\, \|x\|_E}$

2) Toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est lipschitzienne sur E.
En particulier, toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est continue sur E.

3) Si $f : E^n \to F$ est n-linéaire alors, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E,\ \|f(u_1, \dots, u_n)\|_F \ \leqslant\ \alpha\ \|u_1\|_E \times \dots \times \|u_n\|_E$$

On en déduit que toute application n-linéaire de E^n dans F est continue sur E^n.

Démonstration.

1) • Notons $p = \dim(E)$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
On considère la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{B},\infty}$:

$$\begin{array}{rcrcl} \|\cdot\|_{\mathscr{B},\infty} & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \|x\|_{\mathscr{B},\infty} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} \left(\,|x_k|\, \right) \end{array}$$

où, pour tout $x \in E$, on note $(x_1, \cdots, x_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

• Pour tout $x \in E$:

$$\begin{array}{rcll} \|f(x)\|_F & = & \left\| f\left(\sum\limits_{k=1}^{p} x_k \cdot e_k \right) \right\|_F & \\ & = & \left\| \sum\limits_{k=1}^{p} x_k \cdot f(e_k) \right\|_F & \\ & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k \cdot f(e_k)\|_F & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{p} |x_k| \times \|f(e_k)\|_F & \textit{(par homogénéité)} \\ & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{p} \|x\|_{\mathscr{B},\infty} \times \|f(e_k)\|_F & \\ & \leqslant & \left(\sum\limits_{k=1}^{p} \|f(e_k)\|_F \right) \|x\|_{\mathscr{B},\infty} & \end{array}$$

• Par équivalence des normes en dimension finie, on en déduit qu'il existe $\mu \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|_{\mathscr{B},\infty} \ \leqslant\ \mu\ \|x\|_E$$

• Finalement, pour tout $x \in E$:

$$\|f(x)\|_F \ \leqslant\ \left(\sum_{k=1}^{p} \|f(e_k)\|_F \right) \|x\|_{\mathscr{B},\infty} \ \leqslant\ \left(\sum_{k=1}^{p} \|f(e_k)\|_F \right) \mu\ \|x\|_E$$

On obtient le résultat souhaité en posant : $\alpha = \left(\sum\limits_{k=1}^{p} \|f(e_k)\|_F \right) \times \mu$.

2) D'après ***1)***, comme $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in E \times E$:

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \ \leqslant\ \alpha \|x - y\|_E$$

On en conclut que f est lipschitzienne (de rapport α).

3) On fait la démonstration uniquement dans le cas d'une application 2-linéaire (le cas général se traite de manière similaire).
Notons $p = \dim(E)$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Soit $(x, y) \in E \times E$. Notons $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ les coordonnées de x et $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ les coordonnées de y dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{array}{rcl} \|f(x, y)\|_F & = & \left\| f\Big(\sum\limits_{i=1}^{p} x_i \cdot e_i, \sum\limits_{j=1}^{p} y_j \cdot e_j \Big) \right\|_F \\ & = & \left\| \sum\limits_{i=1}^{p} x_i \cdot f\Big(e_i, \sum\limits_{j=1}^{p} y_j \cdot e_j \Big) \right\|_F \\ & = & \left\| \sum\limits_{i=1}^{p} x_i \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{p} y_j \cdot f\big(e_i, e_j \big) \right) \right\|_F \\ & = & \left\| \sum\limits_{i=1}^{p} \left(\sum\limits_{j=1}^{p} x_i\, y_j \cdot f\big(e_i, e_j \big) \right) \right\|_F \\ & = & \left\| \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} x_i\, y_j \cdot f\big(e_i, e_j \big) \right\|_F \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\|f(x,y)\|_F &= \Big\| \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}} x_i\, y_j \cdot f\big(e_i, e_j\big) \Big\|_F \\
&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \Big\| x_i\, y_j \cdot f\big(e_i, e_j\big) \Big\|_F && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}} |\, x_i\, y_j \,| \, \Big\| f\big(e_i, e_j\big) \Big\|_F && \textit{(par homogénéité)} \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}} |\, x_i \,| \, |\, y_j \,| \, \Big\| f\big(e_i, e_j\big) \Big\|_F \\
&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \|x\|_{\mathscr{B},\infty} \, \|y\|_{\mathscr{B},\infty} \, \Big\| f\big(e_i, e_j\big) \Big\|_F \\
&= \Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \Big\| f\big(e_i, e_j\big) \Big\|_F \Big) \, \|x\|_{\mathscr{B},\infty} \, \|y\|_{\mathscr{B},\infty}
\end{aligned}$$

On conclut comme en ***1)*** par l'équivalence des normes en dimension finie. □

Remarque

- La fonction déterminant est continue.
- Le produit matriciel définit une fonction continue.
- Si E n'est pas de dimension finie, la continuité d'une application linéaire sur E n'est pas garantie, et peut dépendre du choix de la norme sur E.

Exemple

Étudier la continuité de l'évaluation $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$, lorsque :

a. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|P\| = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\, dt$.

b. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \Big\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$$

V.3. Théorème de compacité (théorème des bornes atteintes)

Théorème 25.

- *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.*
- *Soit $A \subset E$.*
- *Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur A.*
- *On suppose que E* **est un espace vectoriel de dimension finie***.*

1) *• f est continue sur A • A est une partie fermée et bornée de E $\Big\}$ $\Rightarrow$ $f(A)$ est une partie fermée et bornée de F*

2) *En particulier, si :*
× f est continue sur A,
× A est une partie fermée bornée de E,
alors la fonction f est bornée sur A et atteint ses bornes.
Autrement dit, il existe $(x_0, x_1) \in A \times A$ tel que :

$$\inf_{x\in A} \|f(x)\|_F = \min_{x\in A} \|f(x)\|_F = \|f(x_0)\|_F$$

$$\textit{et} \quad \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F = \max_{x\in A} \|f(x)\|_F = \|f(x_1)\|_F$$

Remarque

- Ce théorème est souvent nommé « théorème de compacité ». Explicitons ce terme.
- De manière générale, si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, une partie $A \subset E$ est un compact si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de A.
- On peut par ailleurs démontrer que :
  × une partie compacte de E est toujours un fermé borné.
  × si E est de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées bornées.
  (si E est de dimension infinie, il existe des parties fermées et bornées qui ne sont pas des compacts)

Application

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On suppose que E **est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie**.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

On note : $S = \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\}$.

- La partie S est :
  - × bornée puisque $S \subset B_f(0_E, 1)$.
  - × fermée puisque $S = \|\cdot\|^{-1}\big(\{1\}\big)$ et que :
    - ▶ $\|\cdot\|$ est une application continue sur E.
    - ▶ $\{1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.
- Comme l'application u est linéaire et que son espace de départ est de dimension finie, alors u est continue sur E.
- On déduit de ces deux points que $u(S)$ est une partie fermée et bornée de E. En particulier, l'ensemble :

$$\{\|u(x)\|_E \mid x \in S\}$$

est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure. On peut alors définir :

$$\begin{aligned} |||u||| &= \sup_{x \in S} \left(\big\|u(x)\big\|_E \right) \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \left(\frac{\big\|u(x)\big\|_E}{\|x\|_E} \right) \end{aligned}$$

Il est assez classique de démontrer que cette norme est sous-multiplicative :

$$\forall (u, v) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E), \ |||u \circ v||| \leqslant |||u||| \times |||v|||$$