CH XIV : Espaces vectoriels normés

Le but de ce chapitre est de généraliser, pour un espace vectoriel quelconque, la notion de valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et de module sur $\mathbb{C}$, et les notions de convergence des suites et des fonctions qui en découlent. Dans tout ce chapitre, on pose une fois pour toutes $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Norme sur un espace vectoriel

I.1. Norme et espace vectoriel normé

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes.

1) $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ N(\lambda \cdot x) \ = \ |\lambda|\ N(x)}$ *(homogénéité d'une norme)*

2) $\boxed{\forall x \in E,\ N(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0_E}$ *(propriété de séparation)*

3) $\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ N(\ x + y\ ) \ \leqslant \ N(x) + N(y)}$ *(inégalité triangulaire)*

  - $\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ \big|\ N(x) - N(y)\ \big| \ \leqslant \ N(x + y)}$ *($2^{\text{ème}}$ inégalité triangulaire)*
  - Les propriétés d'inégalité triangulaire peuvent être résumées comme suit :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ \big|\ N(x) - N(y)\ \big| \ \leqslant \ N(x \pm y) \ \leqslant \ N(x) + N(y)}$$

- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme N, c'est-à-dire formellement le couple (E, N), est appelé un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel normé**.

Exemple

La valeur absolue (resp. le module) $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$).

Remarque

- Les propriétés ***1)***, ***2)*** et ***3)*** permettent de démontrer :

$$\forall x \in E,\ 0 \ = \ N(0_E) \ = \ N(x - x) \ \leqslant \ N(x) + N(-x) \ = \ 2\ N(x)$$

- La propriété de séparation est en fait une équivalence. En effet, on peut démontrer la réciproque grâce à la propriété d'homogénéité.
Soit $x \in E$.

$$\begin{array}{ccc} N(0 \cdot x) & = & |0| \times N(x) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ N(0_E) & & 0 \end{array}$$

- On a déjà rencontré la notion de norme dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels. Rappelons qu'une norme est euclidienne si elle est issue d'un produit scalaire. L'identité du parallélogramme n'est vérifiée que par les normes euclidiennes. C'est même une manière de démontrer qu'une norme est (ou n'est pas !) euclidienne.

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \ = \ 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

- On rappelle qu'on sait caractériser le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire **dans le cas d'une norme <u>euclidienne</u>** :

$$\forall (x, y) \in E,\ \boxed{\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{l} x = 0_E \\ \texttt{OU} \ \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha \cdot x \end{array}}$$

- Si la norme $\|\cdot\|$ n'est pas euclidienne (c'est-à-dire n'est pas associée à un produit scalaire), alors on ne peut rien dire a priori de ce cas d'égalité.
Prenons par exemple :
  × l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$,
  × les vecteurs $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

Alors $\|x + y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ mais x et y ne sont pas colinéaires.

I.2. Normes usuelles

I.2.a) Norme sur un espace préhilbertien réel

Théorème 1.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien réel.

- *L'application $\|\cdot\|$ définie de la façon suivante est une norme sur E :*

$$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

- *Cette norme est appelée* **norme euclidienne** *issue du produit scalaire.*
- *Soit $x \in E$. Si $\|x\| = 1$, on dit que le vecteur x est* **normé** *ou* **unitaire**.

Démonstration.

- *Homogénéité* : immédiat par bilinéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- *Séparation* : immédiate car $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire, et est donc défini (positif).
- *Inégalité triangulaire* : déjà démontrée dans le cours sur les espaces préhilbertiens réels. □

Exemple

- L'application suivante est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\|_2 & : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2} \end{array}$$

- L'application suivante est une norme euclidienne sur $E = L^2(I, \mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\|_2 & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \sqrt{\int_I f^2(t)\, dt} \end{array}$$

- L'application suivante est une norme euclidienne sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\| & : & \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & A & \mapsto & \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)} = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant p} a_{i,j}^2 \end{array}$$

I.2.b) Exemples de normes sur $\mathbb{K}^p$

Définition

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

1. $$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\|_1 & : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x = (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{p} |x_k| \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\|_2 & : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x = (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{p} |x_k|^2} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\|_\infty & : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x = (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \|x\|_\infty = \max\limits_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k| \end{array}$$

Démonstration.

1. L'applications $\|\cdot\|_1$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, elle vérifie clairement la séparation et l'homogénéité, et elle vérifie l'inégalité triangulaire car $|\cdot|$ la vérifie.

2. C'est la norme euclidienne associé au produit scalaire canonique sur $\mathbb{K}^p$.

3. Idem $\|\cdot\|_1$. □

I.2.c) Généralisation des exemples précédents à des normes sur des espaces vectoriels de dimensions finies

Les trois normes usuelles précédentes se généralisent à tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, une fois choisie une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E : il suffit de prendre, pour tout $x \in E$, les coordonnées $(x_1, \dots, x_p)$ de x dans la base $\mathscr{B}$.

Normes sur $\mathbb{K}_p[X]$

On munit $\mathbb{K}_p[X]$ de sa base canonique, alors les application suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $\|\cdot\|_1$: $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k & \mapsto & \|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{p} |a_k| \end{array}$

2. $\|\cdot\|_2$: $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k & \mapsto & \|P\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p} |a_k|^2} \end{array}$

3. $\|\cdot\|_\infty$: $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k & \mapsto & \|P\|_\infty = \max\limits_{k\in[\![1,n]\!]} |a_k| \end{array}$

Normes sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ de sa base canonique, alors les application suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $\|\cdot\|_1$: $\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} & \mapsto & \|A\|_1 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p} |a_{i,j}| \end{array}$

2. $\|\cdot\|_2$: $\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \|A\|_2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p} |a_{i,j}|^2 \end{array}$

3. $\|\cdot\|_\infty$: $\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} & \mapsto & \|A\|_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |a_{i,j}| \end{array}$

I.3. Norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ ensemble des fonctions bornées de I à valeurs dans $\mathbb{K}$

I.3.a) Rappels sur la borne supérieure

- Rappelons que toute partie $F \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Par définition, la borne supérieure M d'une partie majorée F de $\mathbb{R}$:

  1) est un majorant de F : $\boxed{\forall x \in F,\ x \leqslant M}$

  2) est le plus petit des majorants de F : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in F,\ x > M - \varepsilon}$
- Il est à noter que la borne supérieure d'une partie $F \subset \mathbb{R}$ n'est pas forcément un élément de F. Par exemple :

$$\sup \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \ = \ 1$$

  (remarquons que la borne supérieure n'est pas ici un élément de l'ensemble)
- Si la borne supérieure M d'un ensemble F est atteinte (c'est-à-dire si $M \in F$), on dit que M est le maximum de cet ensemble.
- On définit de la même manière la notion de borne inférieure d'un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ minoré. C'est, par définition, le plus grand des minorants de F.
- La borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ est unique.

Théorème 2.

Soit $F \subset \mathbb{R}$ une partie majorée de $\mathbb{R}$.

Soit m et N deux réels.

1) $\Big(\exists x \in F,\ m \leqslant x\Big) \ \Rightarrow\ m \leqslant \sup(F)$

2) $\Big(\forall x \in F,\ x \leqslant N\Big) \ \Rightarrow\ \sup(F) \leqslant N$

(un majorant de F est plus grand que le plus petit des majorants)

Théorème 3.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

On note $k\,A = \{k\,x \mid x \in A\}$.

$$\boxed{\sup(k\,A) \ = \ k \sup(A)}$$

Démonstration.
On procède par double inégalité.

($\leqslant$) Comme $\sup(A)$ est, par définition, le plus petit des majorants de A :

$$\forall x \in A, \quad x \ \leqslant \ \sup(A)$$

Comme $k \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall x \in A, \quad k\,x \ \leqslant \ k \sup(A)$$

On en déduit :

$$\sup(k\,A) \ \leqslant \ k \sup(A)$$

($\geqslant$) Comme $\sup(k\,A)$ est le plus petit des majorants de $k\,A$:

$$\forall x \in A, \quad k\,x \ \leqslant \ \sup(k\,A)$$

Deux cas se présentent alors :

- si $k = 0$, alors l'inégalité est trivialement vraie.
- si $k > 0$, alors :

$$\forall x \in A, \quad x \ \leqslant \ \frac{1}{k} \sup(k\,A)$$

On en déduit : $\sup(A) \leqslant \dfrac{1}{k} \sup(k\,A)$. D'où :

$$k \sup(A) \ \leqslant \ \sup(k\,A)$$

□

I.3.b) Norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$

Théorème 4.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application $\|\cdot\|_\infty$ suivante est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_\infty & : & \mathcal{B}(I, \mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \sup\limits_{t \in I} \big|f(t)\big| \end{array}$$

Démonstration.

- *Existence* : Soit $f \in \mathcal{B}(I, K)$.
  Comme f est une fonction bornée, alors l'ensemble $\{\big|f(t)\big| \mid t \in I\}$ est :
  - × un sous-ensemble de $\mathbb{R}$,
  - × non vide,
  - × majoré.

  Il admet donc une borne supérieure. Ainsi $\sup\limits_{t \in I} \big|f(t)\big|$ est bien défini.
- *Homogénéité* : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

$$\|\lambda\,f\|_\infty \ = \ \sup_{t \in I} \big|\lambda\,f(t)\big| \ = \ \sup_{t \in I} \big(|\lambda|\,|f(t)|\big) \ = \ |\lambda| \sup_{t \in I} |f(t)| \ = \ |\lambda|\,\|f\|_\infty$$

- *Séparation* : Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.
  Supposons : $\|f\|_\infty = 0$.
  Comme $\sup\limits_{t \in I} \big|f(t)\big|$ est le plus petit majorant de l'ensemble $\{\big|f(t)\big| \mid t \in I\}$, on sait :

$$\forall t \in I, \quad 0 \ \leqslant \ \big|f(t)\big| \ \leqslant \ \|f\|_\infty$$

  On en déduit :

$$\forall t \in I, \quad \big|f(t)\big| \ = \ 0$$

  La fonction f est donc la fonction nulle sur I.

- *Inégalité triangulaire* : Soit $(f,g) \in \big(\mathcal{B}(I,\mathbb{K})\big)^2$.
  Soit $t \in I$. Par inégalité triangulaire sur $|\cdot|$:

$$|f(t)+g(t)| \ \leqslant \ |f(t)|+|g(t)|$$

Donc : $|f(t)+g(t)| - |f(t)| \leqslant |g(t)|$. D'où :

$$|f(t)+g(t)| - |f(t)| \ \leqslant \ \|g\|_\infty$$

On en déduit :

$$|f(t)+g(t)| \ \leqslant \ |f(t)| + \|g\|_\infty \ \leqslant \ \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Comme l'inégalité précédente est valide pour tout $t \in I$, on obtient finalement :

$$\|f+g\|_\infty \ \leqslant \ \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

I.4. Autres normes

I.4.a) Sur l'ensemble des familles sommables

Exemple
Les applications suivantes sont des normes.

1. On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites sommables.

$$\begin{array}{rccl} N_1 & : & \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & u=(u_n) & \mapsto & N_1(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| \end{array}$$

2. On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites de carrés sommables.

$$\begin{array}{rccl} N_2 & : & \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & u=(u_n) & \mapsto & N_2(u) = \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \end{array}$$

I.4.b) Sur l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I

Exemple
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les applications suivantes sont des normes.

1. On note E_1 l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_1 & : & E_1 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f(t)| \, dt \end{array}$$

2. On note E_2 l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrables sur I.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_2 & : & E_2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_I |f(t)|^2 \, dt} \end{array}$$

II. Boules sur un espace vectoriel normé

II.1. Distance associée à une norme

II.1.a) Définition

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On appelle **distance** associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E l'application d définie par :

$$\mathrm{d} \ : \ \begin{array}{rcl} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{d}(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

Exemple

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$ est la distance euclidienne manipulée dans la vie de tous les jours.

II.2. Propriétés des distances

Théorème 5.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1. Symétrie *:*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \ d(x,y) \ = \ d(y,x)}$$

2. Homogénéité *:*

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall (x,y) \in E^2, \ d\big(\lambda \cdot (x,y)\big) \ = \ |\lambda| \, d(x,y)}$$

3. Séparation *:*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \ d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y}$$

4. Inégalité triangulaire *:*

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in E^3, \ d(x,z) \ \leqslant \ d(x,y) + d(y,z)}$$

Démonstration.

Ce sont des reformulations des propriétés d'une norme. □

II.3. Boules ouvertes, boules fermées, sphère

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soient $a \in E$ et soit $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B(a,r)$ et défini par :

$$\boxed{B(a,r) = \big\{x \in E \,|\, \mathrm{d}(a,x) < r\big\}}$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B_f(a,r)$ et défini par :

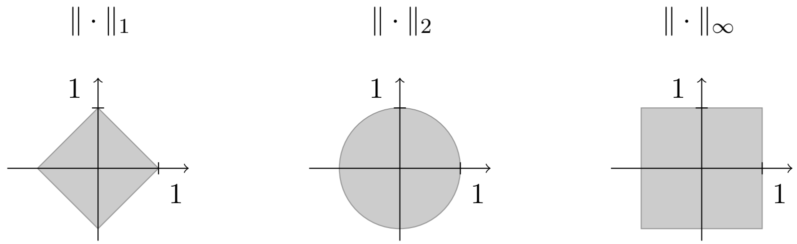
$$\boxed{B_f(a,r) = \big\{a \in E \,|\, \mathrm{d}(a,x) \leqslant r\big\}}$$

- On appelle **sphère** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $\mathbb{S}(a,r)$ et défini par :

$$\boxed{\mathbb{S}(a,r) = \big\{x \in E \ | \ \mathrm{d}(a,x) = r\big\}}$$

Exemple

On peut représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées en $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1 associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.



Remarque

- On note une inclusion entre les boules précédentes.
  On peut en fait démontrer le résultat suivant :
  Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
  Soient $a \in E$ et $r \in \,]0, +\infty[$.
  On note $B_1(a, r)$ (resp. $B_2(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r pour la norme N_1 (resp. N_2).
  Supposons : $N_1 \leqslant N_2$ (c'est-à-dire : $\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant N_2(x)$).
  Alors : $B_2(a, r) \subset B_1(a, r)$.
- On peut aussi remarquer :

$$B(a, r) \subsetneq B_f(a, r)$$

$$r \leqslant s \ \Rightarrow\ B(a, r) \subset B(a, s)$$

II.4. Les boules sont des parties convexes

II.4.a) Notion de segment dans un espace vectoriel (normé)

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $(x, y) \in E \times E$.

- On appelle segment d'extrémités x et y, noté $[x, y]$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\boxed{[x, y] \ = \ \{t \cdot x + (1 - t) \cdot y \mid t \in [0, 1]\}}$$

II.4.b) Notion de parties convexes

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $A \subset E$ une partie non vide de E.

- La partie A est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ [x, y] \ \subset\ A$$

Remarque

- Une boule d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est toujours une partie convexe.
- Démontrons-le.
  Soit $r > 0$ et soit $a \in E$.
  Soit $(x, y) \in B(a, r) \times B(a, r)$.
  Démontrons : $[x, y] \ \subset\ B(a, r)$.
  Il s'agit donc de démontrer :

$$\forall z \in [x, y],\ z \in B(a, r) \quad \text{(c'est-à-dire : } \|z - a\| < r)$$

Soit $z \in [x, y]$. Autrement dit, il existe $t \in [0, 1]$ tel que : $z = t \cdot x + (1 - t) \cdot y$.

$$\begin{aligned}
\|z - a\| &= \|t \cdot x + (1 - t) \cdot y - a\| \\
&= \|t \cdot x + (1 - t) \cdot y - \big(t \cdot a + (1 - t) \cdot a\big)\| \\
&= \|t \cdot (x - a) + (1 - t) \cdot (y - a)\| \\
&\leqslant \|t \cdot (x - a)\| + \|(1 - t) \cdot (y - a)\| \\
&\leqslant |t|\ \|x - a\| + |1 - t|\ \|y - a\| \\
&< t\, r + (1 - t)\, r \ = \ r
\end{aligned}$$

II.5. Parties bornées d'un espace vectoriel normé

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $A \subset E$ une partie de E.

- La partie A est dite bornée s'il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que : $A \subset B_f(a, r)$.
- On démontre de manière directe :

$$\begin{aligned} A \text{ est une partie bornée} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists a \in E,\ \exists r > 0,\ A \subset B_f(a, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists a \in E,\ \exists r > 0,\ A \subset B(a, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0,\ A \subset B_f(0_E, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0,\ A \subset B(0_E, r) \end{aligned}$$

Remarque

- Si $A \subset E$ est une partie non vide d' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit qu'une fonction $f : A \to E$ est bornée si son image $f(A)$ est une partie bornée de E.
  Autrement dit, f est bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in A,\ \|f(x)\| \ \leqslant\ M$$

- Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \ \leqslant\ M$.

III. Convergence des suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

III.1. Convergence et limite d'une suite

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Soit $\ell \in E$.

- On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge**, ou **tend**, vers ℓ, si $\|x_n - \ell\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si :
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon\ \Big)$$
  ou encore, avec l'abus de notation habituel :
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$
  Si c'est le cas, l'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On adopte les notations usuelles $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ pour signifier que la suite (x_n) converge vers ℓ.
- On obtient de manière directe :
  $$\boxed{\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0}$$
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Démonstration.
Démontrons l'unicité de la limite.
Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux limites potentielles d'une suite (x_n).
$$0 \ \leqslant\ \|\ell_1 - \ell_2\| \ =\ \|(\ell_1 - x_n) + (x_n - \ell_2)\| \ \leqslant\ \|\ell_1 - x_n\| + \|x_n - \ell_2\|$$
Or :
× $\|\ell_1 - x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
× $\|x_n - \ell_2\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\ell_1 - \ell_2\| = \|\ell_1 - \ell_2\| = 0$. □

Exemple

1. Toute suite constante converge vers sa valeur constante.
2. Si une suite (x_n) converge vers une limite $\ell \in E$ alors : $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$.
3. Lorsque $E = \mathbb{K}$, on retrouve la notion de suite (scalaire) convergente.
4. La définition précédente permet de donner du sens à la notion de suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ convergente ou encore de suite de matrices convergentes. Le résultat suivant permet de caractériser plus facilement ces cas.

III.2. Caractérisation de la convergence des suites en dimension finie

III.2.a) Équivalence des normes en dimension finie

Théorème 6.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) $\boxed{\|\cdot\|_\infty \ \leqslant\ \|\cdot\|_2 \ \leqslant\ \|\cdot\|_1 \ \leqslant\ p \times \|\cdot\|_\infty}$

Autrement dit, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:
$$\max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k| \ \leqslant\ \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2} \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{p} |x_k| \ \leqslant\ p \times \max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k|$$

2) *Notons N_1 et N_2 deux normes sur E.*
$$\boxed{\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ \alpha\ N_1(x) \ \leqslant\ N_2(x) \ \leqslant\ \beta\ N_1(x)}$$
On dit alors que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

$$\boxed{\text{\textit{En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.}}}$$

Démonstration.

1) On démontre, de manière équivalente :

$$\|\cdot\|_\infty^2 \leqslant \|\cdot\|_2^2 \leqslant \|\cdot\|_1^2 \leqslant p \times \|\cdot\|_\infty^2$$

Autrement dit, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\Big(\max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k| \Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k| \right)^2 \leqslant p^2 \times \Big(\max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k| \Big)^2$$

2) La démonstration est hors programme. □

III.2.b) Résultat général

Théorème 7.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On suppose que E est de **de dimension finie** *$p \in \mathbb{N}^*$.*

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in E$.

Notons N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. $$\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\overset{N_1(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell \Leftrightarrow x_n \underset{n \to +\infty}{\overset{N_2(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell}$$

> *La convergence d'une suite d'éléments de E, et le cas échéant sa limite, ne dépendent pas du choix de la norme sur E.*

2. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Notons :*

× *$(\ell_1, \dots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.*

× *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans $\mathscr{B}$.*

On a alors l'équivalence suivante :

$$\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

> *La convergence d'une suite se ramène à la convergence de ses coordonnées dans une base.*

Démonstration.

1. Comme E est de dimension finie, N_1 et N_2 sont équivalentes.
Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \alpha\ N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta\ N_1(x) \qquad (*)$$

$(\Leftarrow)$ Supposons $x_n \underset{n \to +\infty}{\overset{N_2(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell$. Alors :

$$\alpha\ N_1(x_n - \ell) \leqslant N_2(x_n - \ell) \leqslant \beta\ N_1(x_n - \ell)$$

Or :

× $\alpha\ N_1(x_n - \ell) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

× $\beta\ N_1(x_n - \ell) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit, par théorème d'encadrement : $N_2(x_n - \ell) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$(\Rightarrow)$ D'après $(*)$: $\forall x \in E,\ \dfrac{1}{\beta}\ N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\ N_2(x)$.
D'où le résultat souhaité à l'aide du fonctionnement précédent.

2. • Dans le cas de la norme $\|\cdot\|_1$ et lorsque $E = \mathbb{K}^p$

Soit $(x_n) \in \left(\mathbb{K}^p\right)^{\mathbb{N}}$. On note :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans la base canonique.

× $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base canonique.

$$\begin{aligned}
x_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow}} \ell &\Leftrightarrow \|x_n - \ell\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \|\,(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}) - (\ell_1, \dots, \ell_p)\,\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \|\,(x_1^{(n)} - \ell_1, \dots, x_p^{(n)} - \ell_p)\,\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

- Dans le cas de la norme $\|\cdot\|_1$ sur E

  Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $(x_n) \in \left(E\right)^{\mathbb{N}}$. On note :

  × pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans la base $\mathscr{B}$.

  × $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow}} \ell \quad &\Leftrightarrow \quad \|x_n - \ell\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \|\,(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}) - (\ell_1, \dots, \ell_p)\,\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \|\,(x_1^{(n)} - \ell_1, \dots, x_p^{(n)} - \ell_p)\,\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![1,p]\!],\ |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

- Dans le cas d'une norme N sur E

  Avec les notations précédentes.

$$\begin{aligned}
x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell \quad &\Leftrightarrow \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow}} \ell \qquad \textit{(car } N \textit{ et } \|\cdot\|_1 \textit{ sont équivalentes)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![1,p]\!],\ |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

□

Remarque

- Ce résultat est très utile en pratique. Lorsqu'on travaille sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, la nature d'une suite ne dépend pas de la norme utilisée. Par exemple :

  × la suite $\left((1 - \frac{1}{n})\ X^2 + X - \frac{e^{i\,n}}{n}\right)_n$ est convergente, de limite $X^2 + X$.

  × la suite $\left(\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 1 \\ -\frac{e^{i\,n}}{n} & 1 \end{pmatrix}\right)_n$ est convergente, de limite $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.2.c) Traduction du résultat général pour les suites dans les espaces de dimension finie usuels

- Soient $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On retrouve la caractérisation connue :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \text{ et } \mathrm{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell).$$

- Soient pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p}) \in \mathbb{K}^p$, et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{K}^p$. Alors :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow \ \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k.$$

- Soient pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = (a_{n,i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $L = (\ell_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors :

$$A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \ \Leftrightarrow \ \forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!],\ a_{n,i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_{i,j}.$$

- Soient pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum\limits_{k=0}^{p} a_{n,k} X^k \in \mathbb{K}_p[X]$, et $L = \sum\limits_{k=0}^{p} \ell_k X^k \in \mathbb{K}_p[X]$. Alors :

$$P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \ \Leftrightarrow \ \forall\, k \in [\![0,p]\!],\ a_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k.$$

Exemple

1. Soit $a \in \mathbb{K}$. Étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, et soit F un sous-espace de E. Si une suite d'éléments de F converge, alors sa limite appartient à F.

Remarque
La convergence d'une suite d'éléments de E, et la valeur de son éventuelle limite, peuvent dépendre du choix de la norme lorsque E n'est pas de dimension finie.

Exercice
Étudier la convergence de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ lorsque l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

a. $\|P\| = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\, dt$. ***b.*** $\|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$.

III.3. Propriétés des suites convergentes

III.3.a) Propriétés algébriques

Théorème 8.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ deux suites.
Soient $\ell_1 \in E$ et $\ell_2 \in E$.
Soti $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. **Linéarité**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\[2ex] \bullet\ y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\, x_n + \mu\, y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2}$$

2. **Produit externe**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R} \\[2ex] \bullet\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n\, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\, \ell}$$

Démonstration.
Analogue au cas des suites numériques vu en première année, en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$ pour les éléments de E. $\square$

Exercice
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \big(\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})\big)^{\mathbb{N}}$, $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \big(\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})\big)^{\mathbb{N}}$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
Si $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$, alors $A_nB_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} AB$ (dans $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$).

Démonstration.
Considérer les suites des coefficients des matrices A_nB_n. $\square$

III.3.b) Autres propriétés

Théorème 9.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

1. $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \text{La suite } (x_n) \text{ est bornée}}$

(c'est-à-dire : $\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leqslant M$*)*

2. a) $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

b) $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|}$

3. a) *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une application strictement croissante.*

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge vers } \ell \quad \Rightarrow \quad \text{La suite } (x_{\varphi(n)}) \text{ converge vers } \ell}$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, alors toute suite extraite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la même limite.*

b) *Propriété de recouvrement*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \\[2ex] \bullet\ x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Démonstration.
Analogue au cas des suites numériques vu en première année, en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$. □

IV. Topologie dans un espace vectoriel normé

IV.1. Intérieur d'une partie

IV.1.a) Définition

Définition Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** à D s'il existe une boule ouverte non vide de centre a et incluse dans D.
- On appelle **intérieur** de D et on note $\mathring{D}$, l'ensemble des éléments de E qui sont des points intérieurs à D.

Remarque

- Lorsque $E = \mathbb{R}$, l'ensemble des points intérieurs à ;
  - × $D = [0,1[$ est $\mathring{D} =]0,1[$,
  - × $D =]0,1[$ est $\mathring{D} =]0,1[$,
  - × $D =]0,+\infty[$ est $\mathring{D} =]0,+\infty[$,
  - × $D = [0,+\infty[$ est $\mathring{D} =]0,+\infty[$.
- Si $a \in \mathring{D}$, et si $(u_n) \in E$ est une suite de E qui converge vers a alors à partir d'un certain rang, $x_n \in A$.

IV.1.b) Partie ouverte d'un espace vectoriel normé

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- On dit que D est une **partie ouverte** si tout élément de D est intérieur à D.

Remarque

- Les parties E et $\varnothing$ sont des ouverts de E.
- La partie $D \subset E$ est un ouvert de E si et seulement si $D = \mathring{D}$.

Théorème 10.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) *Une boule ouverte est un ouvert de E.*

2) a)
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ D_1 \text{ est un ouvert de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un ouvert de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{La partie } D_1 \cup D_2 \\ \text{est un ouvert de } E\end{array}$$

b) *Une réunion finie de parties ouvertes est une partie ouverte.*

c) *Une réunion infinie de parties ouvertes est une partie ouverte.*

3) a)
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ D_1 \text{ est un ouvert de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un ouvert de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{La partie } D_1 \cap D_2 \\ \text{est un ouvert de } E\end{array}$$

b) *Une intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.*

c) *Une intersection infinie de parties ouvertes* `N'`*est* `PAS` *forcément une partie ouverte.*

IV.2. Adhérence d'une partie

IV.2.a) Définition

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- Un élément $a \in E$ est dit **adhérent** à D si **toute** boule ouverte non vide de centre a rencontre D.
- On appelle **adhérence** de D et on note $\overline{D}$, l'ensemble des éléments de E qui sont des points adhérents à D.

Remarque

- Lorsque $E = \mathbb{R}$, l'ensemble des points adhérents à :
  - $\times$ $D = [0,1[$ est $\overline{D} = [0,1]$,
  - $\times$ $D =]0,1[$ est $\overline{D} = [0,1]$,
  - $\times$ $D =]0,+\infty[$ est $\overline{D} = [0,+\infty[$,
  - $\times$ $D = \ [0,+\infty[$ est $\overline{D} = [0,+\infty[$.
- Tout point de D est un point adhérent à D.

Théorème 11. *(caractérisation séquentielle)*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

Soit $a \in E$.

$$\boxed{a \in \overline{D} \ \Leftrightarrow \ \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}},\ x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a}$$

(tout élément de $\overline{D}$ est limite d'une suite d'éléments de D)

Démonstration.

($\Rightarrow$) Soit $a \in \overline{D}$. Par définition, on a alors, pour tout $r > 0$:

$$B(a,r) \cap D \neq \varnothing \qquad (*)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \frac{1}{n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant $(*)$ en $r = r_n$, on obtient : $B(a, r_n) \cap D \neq \varnothing$.
Notons alors x_n un élément de $B(a, r_n) \cap D$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$0 \ \leqslant \ \|x_n - a\| \ \leqslant \ \frac{1}{n+1}$$

Or :

$\times$ $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$\times$ $\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\|x_n - a\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe une suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Démontrons $a \in \overline{D}$. Il s'agit de démontrer :

$$\forall r > 0,\ B(a,r) \cap D \neq \varnothing$$

Soit $r > 0$. Comme $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - a\| \ \leqslant \ \varepsilon$$

On applique alors cette propriété en $\varepsilon = r$.
On obtient alors qu'il existe n_0 tel que : $x_{n_0} \in B(a,r)$.
Comme de plus : $x_{n_0} \in D$, on en conclut : $x_{n_0} \in B(a,r) \cap D$ et ainsi :

$$B(a,r) \cap D \neq \varnothing$$

□

IV.2.b) Partie fermée d'un espace vectoriel normé

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- On dit que D est une **partie fermée** si tout élément adhérent à D est un point de D.

Remarque

- Les parties E et $\varnothing$ sont des ouverts de E.
- La partie $D \subset E$ est un ouvert de E si et seulement si $D = \overline{D}$.

Théorème 12. *(caractérisation séquentielle)*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

D est une partie fermée de E	$\Leftrightarrow$	*Toute suite convergente constituée d'éléments de D converge vers un élément de D*

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que D est une partie fermée. Alors $D = \overline{D}$.
Soit $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de D. On note a sa limite.
Alors $a \in \overline{D}$ (d'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence).
Ainsi : $a \in \overline{D} = D$.

($\Leftarrow$) Supposons que toute suite convergente constituée d'éléments de D converge vers un élément de D.
De manière évidente : $D \subset \overline{D}$. Il reste donc à démontrer : $\overline{D} \subset D$.
Soit $a \in \overline{D}$. Alors il existe $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
Par hypothèse, $a \in D$. □

Théorème 13.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) • *Une boule fermée est un fermé de E.*
• *Une sphère est un fermé de E*

2) a)

• *D_1 est un fermé de E* • *D_2 est un fermé de E*	$\Rightarrow$	*La partie $D_1 \cap D_2$ est un fermé de E*

b) *Une intersection finie de parties fermées est une partie fermée.*

c) *Une intersection infinie de parties fermées est une partie fermée.*

3) a)

• *D_1 est un fermé de E* • *D_2 est un fermé de E*	$\Rightarrow$	*La partie $D_1 \cup D_2$ est un fermé de E*

b) *Une réunion finie de parties fermées est une partie fermée.*

c) *Une réunion infinie de parties fermées* `N'`*est* `PAS` *forcément une partie fermée.*

IV.3. Partie dense

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soit $D \subset E$ une partie de E.

• On dit que D est une **partie dense de** E (ou que D est dense dans E) si $\overline{D} = E$.

Théorème 14. *(caractérisation séquentielle)*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soit $D \subset E$ une partie de E.

$$\boxed{D \text{ est dense dans } E \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in E,\ \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}},\ \|x_n - a\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

(tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de D)

Remarque

• L'ensemble E est dense dans E.
• L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
• L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
• L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ `N'`est `PAS` dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
• L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

• Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit d'exhiber une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons : $M_k = M - \dfrac{1}{k}\, I_n$. Alors $M_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

• Il reste à montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, M_k est inversible. On démontre en réalité que cette propriété est vérifiée à partir d'un certain rang. En effet, la fonction :

$$x \mapsto \det(M - x\, I_n)$$

est polynomiale de degré n et admet donc au plus n racines. On obtient alors le résultat souhaité.

□

IV.4. Topologie et normes équivalentes

Théorème 15.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On note N_1 et N_2 deux **normes équivalentes** *de E.*

1) *Tout ouvert de (E, N_1) est un ouvert de (E, N_2).*

2) *Tout fermé de (E, N_1) est un fermé de (E, N_2).*

(des normes équivalents définissent la même topologie : mêmes ouverts, mêmes fermés, mêmes suites convergentes)

V. Continuité des fonctions entre deux espaces vectoriels normés

V.1. Limite d'une fonction et continuité

V.1.a) Définition

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

Soit $f : D \to F$ une fonction définie sur D et à valeurs dans F.

Soit $a \in \overline{D}$ et soit $\ell \in F$.

1. Limite d'une fonction f en un point adhérent

- On dit que f admet la limite ℓ au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ \Big(\|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon\Big)$$

  Si c'est le cas, l'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de la fonction f en a.

- On adopte les notations usuelles $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ pour signifier que f admet la limite ℓ en a.

2. Continuité d'une fonction f en un point et sur une partie

- On dit que f est **continue en** $a \in D$ si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.

- On dit que f est **continue** (sur D) si f est continue en tout point de la partie D.
  On note alors $\mathscr{C}(D, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur D et à valeurs dans F.

Remarque

- Toute fonction constante est continue sur la partie D sur laquelle elle est définie.
- Si $E = F$, la fonction identité est continue sur E.
- Lorsque $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{K}$, on retrouve les notions connues de fonction (scalaire) convergente en un point, continue en un point, ou continue sur son domaine de définition.
- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

V.1.b) Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Théorème 16.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de D.

Soit $f : D \to F$ une fonction définie sur D et à valeurs dans F.

Soit $a \in \overline{D}$ et soit $\ell \in F$.

1) *Tout d'abord :*

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow\ \Big(\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}},\ \big(\ x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \ \Rightarrow\ f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell\ \big)\Big)}$$

Ainsi, si f admet une limite en a et si (x_n) est une suite convergeant vers a alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) \ =\ \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$$

2) *On en déduit :*

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad f \text{ continue en } a \\ \Leftrightarrow\ \Big(\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}},\ \big(\ x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f\big(\lim\limits_{n \to +\infty} x_n\big)\ \big)\Big) \end{array}}$$

Démonstration.
Analogue au cas des fonctions scalaires vu en première année. □

Remarque

- On a vu précédemment que dans les espaces vectoriels normés de dimmensions finies, toutes les normes sont équivalentes. Lorsque E et F sont de dimensions finies, les notions de limite de fonction et de continuité ne dépendent pas des normes choisies sur E et F.
- Si F est de dimension finie, alors la notion de limite d'une fonction f en un point a se ramène à la limite en a des fonctions coordonnées de f dans une base $\mathscr{B}$ de F.

  Plus précisément, si on note,

  × $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.

  × pour tout $x \in D$, $(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{K}^p$ les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathscr{B}$,

  alors on peut démontrer :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow\ \forall\, k \in [\![1, p]\!],\ f_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_k$$

Exemple

- Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, on obtient qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue si et seulement si ses fonctions partie réelle et partie imaginaire le sont.
- Les fonctions

V.1.c) Opérations algébriques sur les limites

Théorème 17.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés.*

Soit $D \subset E$ *une partie de* E*.*

Soient $f, g : D \to F$ *deux fonctions définies sur* D *et à valeurs dans* F*.*

Soit $\varphi : D \to \mathbb{K}$ *une fonction définie sur* D *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$*.*

Soient $(\ell, \ell_1, \ell_2) \in E \times E \times E$*.*

1. **Linéarité**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \bullet\ g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\ f(x) + \mu\ f(y) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\ \ell_1 + \mu\ \ell_2}$$

En particulier :

× *une CL de fonctions continues en* a *est continue en* a*.*

× *une CL de fonctions continues sur* D *est continue sur* D*.*

2. **Produit externe**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ \varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K} \\ \bullet\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x)\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\ \ell}$$

En particulier, le produit de deux fonctions continues en a (resp. D), dont l'une est scalaire, est une fonction continue en a (resp. D).

V.1.d) Composition de limites

Théorème 18.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$*,* $(F, \|\cdot\|_F)$*,* $(G, \|\cdot\|_G)$ *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés.*

Soit $D \subset E$ *une partie de* E*.*

Soient $f_1 : E \to F$ *une fonction définie sur une partie* $D \subset E$ *et à valeurs dans* F*.*

Soient $f_2 : F \to G$ *une fonction définie sur une partie* $f_1(D) \subset F$ *et à valeurs dans* G*.*

Soit $(\ell_1, \ell_2) \in E \times E$*.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_1(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \bullet\ f_2(y) \underset{y \to \ell_1}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (f_2 \circ f_1)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2}$$

En particulier, toute fonction $f = f_2 \circ f_1$ *telle que :*

× f_1 *est continue sur une partie* $D \subset E$*.*

× f_2 *est continue sur* $f_1(D)$*.*

est continue sur D*.*

Démonstration.
Analogue au cas des fonctions scalaires vu en première année. □

V.1.e) Continuité des focntions polynomiales

Théorème 19.

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé.*

On suppose E *de dimension finie* $p \in \mathbb{N}^*$*.*

Soit $\mathscr{B}$ *une base de* E*.*

Alors toute fonction $f : E \to \mathbb{K}$ *qui est polynomiale en les coordonnées dans* $\mathscr{B}$ *est continue.*

V.1.f) Continuité et topologie

Théorème 20.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soient $f : E \to F$ une fonction définie sur E et à valeurs dans F.

$$\begin{array}{ll} & \text{La fonction } f \text{ est continue sur } E \\ \Leftrightarrow & \text{L'image réciproque par } f \text{ d'un ouvert de } F \text{ est un ouvert de } E \\ \Leftrightarrow & \text{L'image réciproque par } f \text{ d'un fermé de } F \text{ est un fermé de } E \end{array}$$

Théorème 21.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue sur E.

1) Les parties de E définies par les conditions $f(x) = 0$, $f(x) \leqslant 0$ ou $f(x) \geqslant 0$, sont fermées.

2) Les parties de E définies par les conditions $f(x) \neq 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$, sont ouvertes.

Démonstration.

1) Notons $D = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D qui converge vers un élément $a \in E$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D$, donc $f(x_n) = 0$, et par continuité de f sur E, donc en a, on a $f(x_n) \to f(a)$. Donc $f(a) = 0$, i.e. $a \in D$.

Démonstration analogue pour $f(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$, les inégalités larges passant à la limite.

2) Les complémentaires de ces parties, définis par les conditions $f(x) = 0$, $f(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$, sont fermés par le point précédent. Donc ces parties sont ouvertes.

□

V.2. Théorème de compacité - théorème des bornes atteintes

Théorème 22.

- *Soit E un espace vectoriel normé* **de dimension finie**.
- *Soit $D \subset E$ une partie non vide de E.*
- *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction sur une partie D de E, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est continue sur } D \\ \bullet\ D \text{ est une partie fermée, bornée de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ est bornée et atteint} \\ \text{ses bornes sur } D \end{array}$$

Autrement dit :

$$\exists\,(a, b) \in D \times D,\ \forall\,x \in D,\ f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

Démonstration.

- On admet le théorème de Bolzano-Weierstrass, qui stipule que toute suite bornée d'un espace E de dimension finie admet une sous-suite convergente.
- Par définition de la borne supérieure $\sup f(D)$ (éventuellement $+\infty$ à ce stade), il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \to \sup f(D)$.

  Or la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car D l'est, donc quitte à remplacer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'une de ses sous-suites, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $b \in E$ (Bolzano-Weierstrass).

  Or cette limite b est adhérente à D (car c'est une limite de points de D) et D est fermée, donc b appartient à D. Et comme f est continue sur D, donc en b, on a alors $f(x_n) \to f(b)$.

  Ainsi par unicité de la limite, $f(b) = \sup f(D)$ (qui est donc fini).
- On procède de même pour trouver $a \in D$ tel que $f(a) = \inf f(D)$. □

Remarque

Ce résultat généralise celui connu pour les fonctions scalaires : toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$.

V.3. Applications lipschitziennes

V.3.a) Définition

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soit f une fonction définie sur une partie D de E et à valeurs dans F.

- On dit que f est **lipschitzienne** (sur D) si :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, (x,\, y) \in D \times D, \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \alpha \|x - y\|_E$$

- Une telle constante α est appelée une constante (ou un rapport) de Lipschitz pour f.

Exemple

1. Les fonctions constantes sont les fonctions lipschitziennes de rapport 0.

2. Toute homothétie $\alpha \mathrm{id}_E$ d'un espace vectoriel normé E est lipschitzienne de rapport $|\alpha|$.

3. La norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ d'un espace vectoriel normé E est lipschitzienne de rapport 1.

V.3.b) Continuité des applications lipschitziennes

Théorème 23.
Toutes application lipschitzienne est continue (réciproque fausse).

Démonstration.
Immédiat vu les définitions. Pour la fausseté de la réciproque, considérer la fonction carré sur $\mathbb{R}$. □

V.3.c) Caractère lipschitzien des fonctions linéaires

Théorème 24.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

On suppose E **de dimension finie**.

1) $$\boxed{f \in \mathscr{L}(E,F) \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant \alpha \|x\|_E}$$

2) Toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est lipschitzienne, donc continue.

3) Toute application n-linéaire de E^n dans F est continue.

Démonstration.

1. On démontre le résultat dans le cas où la norme $\|\cdot\|_E$ sur E est la norme $\|\cdot\|_\infty$ associée à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E. Le cas général est admis.
Pour $x = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k e_k \in E$, on a alors $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |x_k|$, donc par linéarité de f puis inégalité triangulaire :

$$\|f(x)\|_F = \|\sum_{k=1}^{p} x_k f(e_k)\|_F \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k| \|f(e_k)\|_F \leqslant \big(\sum_{k=1}^{p} \|f(e_k)\|_F\big) \|x\|_\infty$$

d'où le résultat avec $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{p} \|f(e_k)\|_F$.

2. Vu *1)*, on a alors par linéarité :

$$\forall\, (x,y) \in E \times E,\ \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leqslant \alpha \|x-y\|_E$$

donc f est lipschitzienne (de rapport α relativement au choix des normes).

□

Remarque

- La fonction déterminant est continue.
- Le produit matriciel définit une fonction continue.
- Si E n'est pas de dimension finie, la continuité d'une application linéaire sur E n'est pas garantie, et peut dépendre du choix de la norme sur E.

Exemple
Étudier la continuité de l'évaluation $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$, lorsque :

a. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|P\| = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\, dt$.

b. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$.