

## CH II : Espaces vectoriels - révisions, compléments

Dans toute la suite, le symbole  $\mathbb{K}$  désigne l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  ou l'ensemble des complexes  $\mathbb{C}$ . Cette notation sera utilisée pour tous les résultats qui sont vérifiés pour ces deux ensembles.

### I. Structure vectorielle

#### I.1. Notion de loi de composition

##### Définition

Soit  $E$  un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne**  $\top$  sur l'ensemble  $E$  est une application  $\top : E \times E \rightarrow E$ . Autrement dit :  $\forall (x, y) \in E^2, x \top y \in E$ .  
 $\Leftrightarrow$  si 2 éléments sont dans  $E$ , alors  $x \top y \in E$ .
- Une **loi de composition externe**  $*$  sur l'ensemble  $E$  est une application  $*$  :  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ . Autrement dit :  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda * x \in E$ .  
 $\Leftrightarrow$  si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x \in E$ , alors  $\lambda * x \in E$ .

#### I.2. Notion d'espace vectoriel

##### I.2.a) Définition

##### Définition informelle

De manière informelle, un espace vectoriel  $E$  est un ensemble non vide muni d'une loi  $+$  et d'une loi  $\cdot$  qui vérifient les propriétés permettant d'effectuer toutes les manipulations algébriques raisonnables sur les éléments de  $E$ .

##### Définition

Un ensemble non vide  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  si :

- 1)  $E$  est muni d'une loi de composition interne notée  $+$  :  $E \times E \rightarrow E$  qui vérifie les propriétés suivantes.
  - a.  $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$  (commutativité)
  - b.  $\forall (x, y, z) \in E^2, x + (y + z) = (x + y) + z$  (associativité)
  - c.  $\exists 0_E \in E, \forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$  (existence d'un élément neutre)
  - d.  $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = y + x = 0_E$  ( $y$  opposé de  $x$ , noté  $y = -x$ )
- 2)  $E$  est muni d'une loi de composition externe notée  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$  qui vérifie les propriétés suivantes.
  - a.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$   
 (la loi  $\cdot$  est distributive à gauche par rapport à la loi  $+$  de  $E$ )
  - b.  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$   
 (la loi  $\cdot$  est distributive à droite par rapport à « la » loi  $+$ )
  - c.  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$   
 (associativité mixte)
  - d.  $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

##### Vocabulaire

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

- On parle aussi de  **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel**.
- Les éléments de  $E$  sont appelés **vecteurs**.
- Les éléments de  $\mathbb{K}$  participant à la multiplication externe sont parfois appelés des **scalaires**.  
 On parle ainsi de **multiplication par un scalaire** pour désigner la loi  $\cdot$ .

**Remarque**

- Étant données les propriétés listées, on peut démontrer que l'élément neutre  $0_E$  de  $E$  est unique.
- On peut aussi démontrer que tout élément  $x \in E$  admet un **unique** opposé par la loi  $+$ . Cet élément est noté  $-x$ .
- On peut enfin démontrer :

$$\lambda \cdot 0_E = 0_E \quad \text{et} \quad \forall x \in E, 0 \cdot x = 0_E$$

- La définition d'opposé étant précisée, on a aussi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, -(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x)$$

(il n'y a donc pas d'ambiguïté de notation lorsque l'on note  $-\lambda \cdot x$ )

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$$

En effet, si  $\lambda \neq 0$  est tel que  $\lambda \cdot x = 0_E$  alors :  $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = 0_E$ .  
Ainsi :  $1 \cdot x = x = 0_E$ .

- L'ensemble  $E$  est non vide. On l'a exigé en début de définition. Cela apparaît aussi dans les propriétés de  $+$  puisqu'il existe dans  $E$  un élément particulier noté  $0_E$ .
- Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev, alors deux cas se présentent :
  - ×  $E = \{0_E\}$  et dans ce cas,  $E$  ne contient qu'un seul élément et est fini.
  - ×  $E \neq \{0_E\}$  (on dit alors que  $E$  n'est pas l'ensemble réduit au vecteur nul) et dans ce cas,  $E$  contient un nombre infini d'éléments.

En effet, comme  $E \neq \{0_E\}$ , il existe un élément  $u \in E$  tel que  $u \neq 0_E$ . La loi  $\cdot$  étant externe, on a alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  :  $\lambda \cdot u \in E$ .  
On vient ainsi de créer autant d'éléments dans  $E$  qu'il y en a dans  $\mathbb{K}$ .

**I.2.b) Notion de combinaison linéaire****Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $(u_1, \dots, u_m)$  une **famille** de vecteurs de  $E$ .

- Un vecteur  $v$  est une **combinaison linéaire** des vecteurs  $u_1, \dots, u_m$  s'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$  tel que :

$$v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m$$

- Un vecteur  $v$  ainsi défini est un élément de  $E$  (c'est une conséquence directe du fait que  $+$  et  $\cdot$  sont deux lois de composition).

**II. Sous-espaces vectoriels****II.1. Aspect théorique****II.1.a) Définition****Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni des lois  $+_E$  et  $\cdot_E$

Une partie non vide  $F$  de  $E$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si :

- a)  $\forall (x, y) \in F^2, x +_E y \in F$  ( $F$  est stable pour la loi  $+_E$ )
- b)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda \cdot_E x \in F$  ( $F$  est stable pour la loi  $\cdot_E$ )

**II.1.b) Les sous-espaces vectoriels sont des espaces vectoriels****Théorème 1.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

$$F \text{ sous-espace vectoriel de } E \Rightarrow F \text{ est un espace vectoriel}$$

*Démonstration.*

- On a déjà vu que :
  - × + est une loi de composition interne pour  $F$  (car  $F$  est stable par +).
  - × · est une loi de composition externe pour  $F$  (car  $F$  est stable par ·).
- De plus, ces deux lois vérifient les axiomes des espaces vectoriels puisqu'elles font déjà de  $E$  un espace vectoriel.

Démontrons par exemple que la loi + est associative dans  $F$ .

Soit  $(x, y, z) \in F^3$ . Alors, comme  $F \subset E$ ,  $(x, y, z) \in E^3$ .

Ainsi :  $(x + y) + z = x + (y + z)$  car la loi + est associative dans  $E$ .

□

## II.2. Démontrer qu'un ensemble $F$ n'est pas un sous-espace vectoriel d'un ev $E$

### Théorème 2.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

$$F \text{ est un sev de } E \Rightarrow 0_E \in F$$

On en déduit, par contraposée :

$$0_E \notin F \Rightarrow F \text{ n'est pas un sev de } E$$

*Démonstration.*

Soit  $x \in F$  ( $F$  est non vide donc contient au moins un élément).

- $F$  étant stable par la loi  $\cdot_E$ , on en déduit que :  $0 \cdot_E x \in F$ .
- Comme  $x \in F$  et  $F \subset E$  alors  $x \in E$ .  
Or, dans  $E$  :  $0 \cdot_E x = 0_E$ .

On conclut de ces deux points que :  $0_E \in F$ .

□

## Exercice

- L'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle minorées par 1 est-il un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ?
- L'ensemble  $F = \{(1, x, y) \in \mathbb{K}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2\}$  est-il un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ?
- L'ensemble  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 1\}$  est-il un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?
- L'ensemble des suites réelles divergentes est-il un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ?
- L'ensemble  $\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0\}$  est-il un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ?

□

## II.3. Démontrer qu'un ensemble $F$ est un espace vectoriel

### II.3.a) Caractérisation des sous-espaces vectoriels d'un ev $E$

**Théorème 3** (caractérisation des sev de  $E$ ).

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $F$  une partie non vide de  $E$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

$$\Leftrightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F^2, \lambda \cdot x + y \in F$$

$$\Leftrightarrow \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F^2, x + \mu \cdot y \in F$$

( $F$  est stable par combinaison linéaire d'éléments de  $F$ )

(on évitera d'utiliser les deux dernières caractérisations : elles introduisent une dissymétrie des rôles de  $x$  et  $y$  qui n'a pas lieu d'être)

### II.3.b) Utilisation en pratique

#### Montrer qu'un ensemble $F$ est un espace vectoriel

Afin de montrer que  $F$  est un ev, il existe deux grandes possibilités.

- 1) Vérifier tous les axiomes d'espace vectoriel : plutôt long et pénible.  
(en réalité, on ne le fait jamais)
- 2) Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de référence : c'est la méthode que l'on utilise en pratique.

Démontrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(i)  $F \subseteq E$

(ii)  $F \neq \emptyset$ . En effet,  $0_E \in F$  car ...

(si ce n'est pas le cas,  $F$  n'est pas un sev de  $E$  !)

(iii) Démontrons que  $F$  est stable par combinaisons linéaires.

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Soit  $(u, v) \in F^2$ .

Il s'agit de démontrer :  $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$ .

Tout d'abord :  $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \dots$

(on réalise la somme des vecteurs  $\lambda \cdot u$  et  $\mu \cdot v$  à l'aide de la loi + définie sur  $E$ )

Or : ...

(on vérifie que  $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$  vérifie la propriété définissant  $F$ )

Et ainsi  $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$ .

#### Remarque

Dans la rédaction, il est (très) souvent utile de rappeler que  $u$  et  $v$  sont des éléments de  $E$  qui vérifient la propriété d'appartenance à  $F$  :

- Comme  $u \in F$ ,  $u$  s'écrit ... et vérifie ...  
(l'appartenance de  $u$  à  $E$  lui confère une écriture particulière  
l'appartenance de  $u$  à  $F$  confère à  $u$  la propriété définissant  $F$ )
- Comme  $v \in F$ ,  $v$  s'écrit ... et vérifie ...

#### Exercice

Démontrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

- 1)  $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ .
- 2)  $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$ , où  $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .
- 3)  $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$ .
- 4)  $F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ .
- 5)  $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \mid \forall x \in \mathbb{K}, f'(x) = f(x)\}$ .
- 6)  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^t M = M\}$ .  
(c'est l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).
- 7)  $F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est convergente}\}$

Démonstration.

7) Démontrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(i)  $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(ii)  $F \neq \emptyset$ . En effet,  $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \in F$  car :  ${}^t(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ .

(iii) Démontrons que  $F$  est stable par combinaisons linéaires.

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ .

Soit  $(M, N) \in F \times F$ .

Il s'agit de démontrer :  $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in F$ .

Or :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) &= \lambda \cdot {}^t M + \mu \cdot {}^t N && \text{(par linéarité de} \\ & && \text{l'application transposée)} \\ &= \lambda \cdot M + \mu \cdot N && \text{(car } M \in F \text{ et } N \in F) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :  $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in F$ .

□

## II.4. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

### II.4.a) Définition

#### Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$  ( $A \subseteq E$ ).

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par**  $A$  et on note  $\text{Vect}(A)$  l'ensemble des vecteurs de  $E$  qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'éléments de  $A$ . Autrement dit :

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot a_i \mid p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, (a_1, \dots, a_p) \in A^p \right\}$$

- En particulier, si  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  (c'est-à-dire  $A$  fini), on a :

$$\text{Vect}(A) = \text{Vect}(a_1, \dots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot a_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \right\}$$

(on note  $\text{Vect}(a_1, \dots, a_m)$  en lieu et place de  $\text{Vect}(\{a_1, \dots, a_m\})$ )



On suppose seulement que  $A$  est une partie non vide de  $E$ .

**En aucun cas on ne suppose que  $A$  est un espace vectoriel.**

$\text{Vect}(A)$  est le « vectorialisé » de  $A$ . Partant d'une partie  $A$ , on lui ajoute tous les éléments lui permettant d'obtenir une structure vectorielle :

- × pour tout  $a \in A$ , on ajoute tous les  $\lambda \cdot a$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,
- × une fois ces ajouts effectués, on ajoute toutes les sommes finies d'éléments de cette nouvelle partie.

En résumé, partant de  $A$ , on ajoute toutes les combinaisons linéaires d'éléments de  $A$ . On construit ainsi un espace vectoriel : c'est  $\text{Vect}(A)$ .

### II.4.b) Les espaces vectoriels engendrés par une partie sont des espaces vectoriels

#### Théorème 4.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$  ( $A \subseteq E$ ).

1)  $0_E \in \text{Vect}(A)$ .

2)  $A \subseteq \text{Vect}(A)$ .

3)  $\boxed{\text{Vect}(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$

$\text{Vect}(A)$  est même le plus petit sev de  $E$  contenant  $A$  :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet F \text{ sev de } E \\ \bullet F \supseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow F \supseteq \text{Vect}(A)$$

4)  $\boxed{A \text{ est un ev} \Leftrightarrow A = \text{Vect}(A)}$

5) On a notamment :  $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$ .

6)  $A \subseteq B \Rightarrow \text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$ .

#### MÉTHODO

#### Démontrer qu'un ensemble $F$ est un espace vectoriel

Afin de montrer que  $F$  est un ev, il suffit de l'écrire sous la forme  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  où  $\mathcal{F}$  est une famille de vecteurs.

Illustrons cette méthode sur deux exemples.

1) Démontrer que  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$  est un ev.

2) Démontrer que  $\left\{ \begin{pmatrix} b & a & b+c \\ a & b & a \\ b+c & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$  est un ev.

## II.4.c) Propriétés de manipulations

### Théorème 5.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $(a, b, c) \in E^3$ .

1)  $\text{Vect}(a, 0_E) = \text{Vect}(a)$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant  $0_E$  à cette partie)

2)  $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(b, a)$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en modifiant l'ordre des termes de la partie)

3) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  :  $\text{Vect}(\lambda \cdot a, b) = \text{Vect}(a, b)$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie par multiplication par un scalaire non nul d'un élément de cette partie)

4) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $\mu \in \mathbb{K}$  :

$$\text{Vect}(a, b, \lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \text{Vect}(a, b)$$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à cette partie un vecteur qui apparaît comme CL d'éléments de cette partie)

5) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $\mu \in \mathbb{K}$  :

$$\text{Vect}(a, b, c + (\lambda \cdot a + \mu \cdot b)) = \text{Vect}(a, b, c)$$

(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à un vecteur de cette partie une CL des autres vecteurs de cette partie)

## III. Familles finies de vecteurs

### III.1. Familles génératrices d'un espace vectoriel

#### III.1.a) Définition

##### Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

- La famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est dite **génératrice de  $E$**  si :

$$E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$$

Autrement dit, si tout vecteur de  $E$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille  $(e_1, \dots, e_p)$ .

$$(e_1, \dots, e_p) \in E^p \text{ est une famille génératrice de } E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, x = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot e_i$$

- Si  $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ , on dit que la famille  $(e_1, \dots, e_p)$  **engendre  $E$** .

##### Remarque

- Par définition, une famille génératrice  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $E$  est forcément constituée de vecteurs de  $E$ . Il en résulte que l'inclusion :  $E \supset \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  est forcément vérifiée.
- Une famille  $\mathcal{F}$  est toujours génératrice de l'espace vectoriel  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  qu'elle engendre. Ainsi dire « la famille  $\mathcal{F}$  est génératrice » (sans préciser l'espace engendré) n'a pas beaucoup d'intérêt.



Lorsqu'on parle d'une famille génératrice d'un espace vectoriel  $E$ , il faut systématiquement préciser l'ensemble  $E$  engendré sans quoi ce qui est écrit n'a pas de sens.

**III.1.b) Une sur-famille d'une famille génératrice de  $E$  est génératrice de  $E$**

**Théorème 6.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

Soit  $v \in E$ .

$\begin{array}{l} \text{La famille } (e_1, \dots, e_p) \text{ est} \\ \text{génératrice de } E \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La famille } (e_1, \dots, e_p, v) \\ \text{est génératrice de } E \end{array}$
--

Plus généralement, toute sur-famille (constituée de vecteurs de  $E$ ) d'une famille génératrice de  $E$  (c'est-à-dire toute famille contenant une famille génératrice de  $E$ ), est une famille génératrice de  $E$ .

**III.2. Familles libres d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel**

**III.2.a) Notion de dépendance linéaire**

**Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(u_1, \dots, u_m)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

- On dit qu'il existe une **relation de dépendance linéaire** entre  $(u_1, \dots, u_m)$  s'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$  tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m = 0_E$$

- Cette relation est dite **triviale** si tous les scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont nuls.

**III.2.b) Notion de famille libre et propriétés immédiates**

**Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(e_1, \dots, e_m)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

- La famille  $(e_1, \dots, e_m)$  est **libre** (dans  $E$ ) si la seule relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille  $(e_1, \dots, e_m)$  est la relation triviale.

Autrement dit,  $(e_1, \dots, e_m)$  est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \right)$$

Si la famille  $(e_1, \dots, e_m)$  est libre, on dit que les vecteurs  $e_1, \dots, e_m$  sont **linéairement indépendants**.

- Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**. Cela signifie qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille  $(e_1, \dots, e_m)$ . Ainsi, la famille  $(e_1, \dots, e_m)$  est dite **liée** (dans  $E$ ) si :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i = 0_E \right) \quad \text{ET} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$$

**Théorème 7.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et soient  $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, u$  des vecteurs de  $E$ .

<p>a)</p>	$\begin{array}{l} \text{La famille} \\ (e_1, \dots, e_m) \text{ est liée} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{L'un des vecteurs de la famille s'exprime} \\ \text{comme CL des autres vecteurs de la famille} \end{array}$
<p>b)</p>	$\left. \begin{array}{l} \bullet (e_1, \dots, e_m) \text{ libre} \\ \bullet (e_1, \dots, e_m, u) \text{ liée} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Le vecteur } u \text{ s'exprime comme CL des} \\ \text{vecteurs de la famille } (e_1, \dots, e_m)$
<p>c)</p>	$\left. \begin{array}{l} \bullet (e_1, \dots, e_m) \text{ libre} \\ \bullet \text{Le vecteur } e_{m+1} \text{ ne s'exprime pas} \\ \text{comme CL des vecteurs de } (e_1, \dots, e_m) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La famille} \\ (e_1, \dots, e_m, e_{m+1}) \\ \text{est libre} \end{array}$

**III.2.c) Une sous-famille d'une famille libre est une famille libre****Théorème 8.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_m)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

*La famille  $(e_1, \dots, e_m)$  est libre  $\Rightarrow$  La famille  $(e_1, \dots, e_{m-1})$  est libre*

Plus généralement, toute sous-famille d'une famille libre (c'est-à-dire toute famille contenue dans une famille libre), est une famille libre.

**III.2.d) Notion de colinéarité****Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $(u, v) \in E^2$ .

Les vecteurs  $u$  et  $v$  sont colinéaires si :

$$(\exists \alpha \in \mathbb{K}, v = \alpha \cdot u) \text{ OU } (\exists \beta \in \mathbb{K}, u = \beta \cdot v)$$

**Théorème 9.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- 1) Une famille  $(u)$  constituée uniquement d'un vecteur non nul de  $E$  est libre. (la famille  $(0_E)$  est liée)
- 2) Une famille  $(u, v)$  constituée de deux vecteurs de  $E$  est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.
- 3) Lorsque l'on considère une famille constituée de 3 vecteurs ou plus, la démonstration de la liberté se fait en revenant à la définition.

**Exercice**

1. a) La famille  $((1, 2, 1))$  est-elle libre ?  
 b) La famille  $((1, 2, 1), (1, 1, 2))$  est-elle libre ?  
 c) La famille  $((1, 2, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1))$  est-elle libre ?
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :  $f_n : x \mapsto e^{n \cdot x}$ .  
 Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(f_0, \dots, f_n)$  est libre.



**À RETENIR**

- Pour étudier la liberté d'une famille  $(e_1, \dots, e_m)$ , on suppose qu'il existe une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i = 0_E$$

- Dans le cas où les vecteurs de la famille  $(e_1, \dots, e_m)$  sont des éléments de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , cette égalité est équivalente à l'écriture d'un système d'équations linéaires homogène en les variables  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Deux cas se présentent alors :

1) ce système est de Cramer et donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (0, \dots, 0)$ .

Cela démontre que la relation de dépendance linéaire supposée en début d'énoncé est la relation triviale.

2) ce système n'est pas de Cramer (il admet alors une infinité de solutions). Ainsi, il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$  solution du système et on peut ainsi exhiber une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille  $(e_1, \dots, e_m)$ .

- Dans le cas où on étudie une famille d'éléments de  $\mathcal{F}(I, K)$  (ensemble des fonctions des  $I$  (intervalle réel non vide) dans  $\mathbb{K}$ ), on pourra utiliser des propriétés spécifiques aux fonctions (notamment évaluation en un point, calcul de limites en l'infini, dérivation) pour générer des équations permettant de conclure quant au caractère nul de l'un ou l'autre des scalaires.

### III.2.e) Intérêt des familles libres

#### Théorème 10.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_m)$  une famille **libre** de vecteurs de  $E$ .

Si un vecteur  $u \in E$  s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de  $(e_1, \dots, e_m)$  alors cette combinaison linéaire est unique.

*Démonstration.*

On procède par par l'absurde.

Supposons que  $u$  s'écrive à l'aide de deux combinaisons linéaires distinctes de  $(e_1, \dots, e_m)$ . Autrement dit, il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$  et  $(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{K}^m$  deux  $m$ -uplets distincts tels que :

$$\times u = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_m \cdot e_m$$

$$\times u = \mu_1 \cdot e_1 + \dots + \mu_m \cdot e_m$$

Par soustraction, on obtient :

$$0_E = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot e_1 + \dots + (\lambda_m - \mu_m) \cdot e_m$$

Comme  $(e_1, \dots, e_m)$  est une famille libre, cette relation de dépendance linéaire est la relation triviale.

Autrement dit, pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $\lambda_i - \mu_i = 0$  i.e.  $\lambda_i = \mu_i$ .

Ceci contredit l'hypothèse initiale. □

### III.3. Bases d'un espace vectoriel

#### III.3.a) Définition

##### Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

- La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  si :
  - 1) c'est une famille génératrice de  $E$ .
  - 2) c'est une famille libre dans  $E$ .
- Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , tout vecteur  $x \in E$  se décompose de **manière unique** sous forme d'une CL des éléments de  $\mathcal{B}$ .
- Autrement dit :

$$\begin{array}{l} (e_1, \dots, e_n) \\ \text{est une} \\ \text{base de } E \end{array} \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$$

- Les réels  $(x_1, \dots, x_n)$  sont appelés les **coordonnées** de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice**

On note  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $(P_0, P_1, P_2)$  la famille de polynômes définie par :

$$\times P_0(X) = 1,$$

$$\times P_1(X) = X,$$

$$\times P_2(X) = X^2.$$

Rappelons que la famille  $(P_0, P_1, P_2)$  est une base (c'est la base canonique) de  $E$  (*profitons-en pour rappeler que toute famille de polynômes échelonnée en degré est une famille libre*).

1. On note  $(Q_0, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}_2[X])^3$  la famille constituée des polynômes :

$$\times Q_0(X) = (X - 1)(X - 3),$$

$$\times Q_1(X) = (X - 1)(X - 2),$$

$$\times Q_2(X) = (X - 2)(X - 3).$$

Démontrer que la famille  $(Q_0, Q_1, Q_2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**III.3.b) Notion de base canonique**

On a vu précédemment que la famille  $((1, 1), (2, 1))$  est une base de  $\mathbb{K}^2$ . Cette base n'est pas unique. Par exemple, la famille  $((1, 0), (0, 1))$  est une base de  $\mathbb{K}^2$ . Cette base naturelle de  $\mathbb{K}^2$  est appelée base canonique de  $\mathbb{K}^2$ .

Les espaces vectoriels de référence sont munis d'une base canonique.

**• L'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$** 

Considérons la famille  $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , définie par :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Cette famille est libre et génératrice de  $\mathbb{K}^n$ . C'est donc une base de  $\mathbb{K}^n$ .

Ainsi, pour tout vecteur  $x \in \mathbb{K}^n$ , il existe  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$$

où  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont les coordonnées du vecteur  $x$  dans la base  $\mathcal{B}_c$ .

*Attention à ne pas confondre le vecteur  $x$  qui est un élément de  $E$  et ses coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  qui est un élément de  $\mathbb{K}^n$ .*

**• L'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$** 

Considérons la famille  $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette famille est libre et génératrice de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . C'est donc une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , il existe  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$$

où  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont coordonnées du vecteur  $x$  dans la base  $\mathcal{B}_c$ .

• **L'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

Considérons la famille  $\mathcal{B}_c = (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ , où  $E_{i,j}$  est définie par :

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & | & & & \\ & & & j & & & \end{pmatrix} - i$$

Cette famille est libre et génératrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . C'est donc une base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Ainsi, pour tout  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , il existe  $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  tel que :

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} \cdot E_{i,j}$$

et donc  $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$  sont les coordonnées de la matrice  $M$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_c$ .

**Exemple**

- On considère l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Sa base canonique est :

$$\mathcal{B}_c = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les coordonnées de la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}_c$  sont  $(3, 1, 7, 5)$ .

• **L'espace vectoriel  $\mathbb{K}_n[X]$**

Considérons la famille  $\mathcal{B}_c = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$  (pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_i(X) = X^i$ ).

Cette famille est libre et génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ . C'est donc une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Ainsi, pour tout  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ , il existe  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \dots + a_n \cdot X^n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot X^k$$

où  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  sont les coordonnées du polynôme  $P$  dans la base  $\mathcal{B}_c$ .

**Exemple**

- Déterminons les coordonnées du polynôme  $Q(X) = (X - 2)^3$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_3[X]$ . On a :

$$(X - 2)^3 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$$

Ainsi,  $(-8, 12, -6, 1)$  sont les coordonnées de  $(X - 2)^3$  dans la base  $(1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{K}_3[X]$ .

- On peut démontrer que  $\mathcal{B} = (1, X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3)$  est une base de  $\mathbb{K}_3[X]$ . Dans cette base,  $Q$  a pour coordonnées  $(0, 0, 0, 1)$ .

Quelles sont les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}_c$  dans cette base ?

$$\times 1 = 1$$

Ainsi, 1 a pour coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$  dans  $\mathcal{B}$ .

$$\times X = 2 + (X - 2)$$

Ainsi,  $X$  a pour coordonnées  $(2, 1, 0, 0)$  dans  $\mathcal{B}$ .

$$\times X^2 = 4 + 4(X - 2) + (X - 2)^2$$

Ainsi,  $X^2$  a pour coordonnées  $(4, 4, 1, 0)$  dans  $\mathcal{B}$ .

$$\times X^3 = 8 + 12(X - 2) + 6(X - 2)^2 + (X - 2)^3$$

Ainsi,  $X^3$  a pour coordonnées  $(8, 12, 6, 1)$  dans  $\mathcal{B}$ .

- Enfin, si  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$  alors  $P$  a pour coordonnées  $(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3, a_0 + 4a_2 + 12a_3, a_2 + 6a_3, a_3)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
(il s'agit d'un changement de base : nous en reparlerons)

## IV. Espace vectoriel de dimension finie

### IV.1. Notion de dimension finie

#### Définition

un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice de cardinal fini.

### IV.2. Théorème de la base incomplète

#### Théorème 11.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev différent de  $\{0_E\}$ .

Soit  $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_m)$  une famille finie libre de  $E$ .

Soit  $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille finie génératrice de  $E$ .

(ainsi  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie)

1) Alors on peut compléter  $\mathcal{L}$  en une base de  $E$  par ajout d'éléments de  $\mathcal{G}$ .

2) La propriété précédente s'écrit de manière générale comme suit.

Si  $E$  est de dimension finie, alors toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base.

Démonstration.

- Rappelons qu'on a noté  $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille génératrice de  $E$ . La démonstration se base sur l'algorithme suivant.

```

1   $\mathcal{F}_1 \leftarrow \mathcal{L}$ 
2  Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :
3      Si  $u_i$  n'est pas combinaison linéaire de vecteurs de  $\mathcal{F}_i$  :
4           $\mathcal{F}_{i+1} \leftarrow \mathcal{F}_i \cup \{u_i\}$ 
5      Sinon :
6           $\mathcal{F}_{i+1} \leftarrow \mathcal{F}_i$ 

```

La famille  $\mathcal{F}_{p+1}$  ainsi construite est une base de  $E$ .

C'est une conséquence directe de la propriété **c)** du Théorème 7.

- Démontrons par récurrence :  $\forall i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$ ,  $\mathcal{P}(i)$  où  $\mathcal{P}(i)$  : la famille  $\mathcal{F}_i$  est libre.

#### ► Initialisation :

On a :  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}$  est libre.

D'où  $\mathcal{P}(1)$ .

#### ► Hérité : soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

Supposons  $\mathcal{P}(i)$  (la famille  $\mathcal{F}_i$  est donc libre) et démontrons  $\mathcal{P}(i+1)$ .

Deux cas se présentent :

× Si  $u_i$  n'est pas CL de vecteurs de  $\mathcal{F}_i$  :

Dans ce cas,  $\mathcal{F}_{i+1}$  est libre d'après la propriété **c)**.

× Si  $u_i$  est CL de vecteurs de  $\mathcal{F}_i$  :

Dans ce cas,  $\mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{F}_i$  est libre par hypothèse de récurrence.

D'où  $\mathcal{P}(i+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence :  $\forall i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$ ,  $\mathcal{P}(i)$ .

- Il reste alors à démontrer que la famille finale  $\mathcal{F}_{p+1}$  est génératrice de  $E$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , deux cas se présentent.

× Soit  $u_i$  n'est pas CL de vecteurs de  $\mathcal{F}_i$

Dans ce cas,  $u_i$  est ajouté à  $\mathcal{F}_{i+1}$  et appartient donc à  $\mathcal{F}_{p+1}$ .

× Soit  $u_i$  est CL de vecteurs de  $\mathcal{F}_i$

Comme  $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{p+1}$ ,  $u_i$  peut donc aussi être vu comme CL de vecteurs de la famille  $\mathcal{F}_{p+1}$ .

On en déduit :  $\text{Vect}(\mathcal{F}_{p+1}) \supset \text{Vect}(\mathcal{G}) = E$ .

Ce qui conclut la démonstration ( $\text{Vect}(\mathcal{F}_{p+1}) \subset E$  est vérifié car  $\mathcal{F}_{p+1}$  est une famille de vecteurs de  $E$ ).  $\square$

#### Exercice

Notons  $\mathcal{L} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ .

- Démontrer que  $\mathcal{L}$  est une famille libre de  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .
- Construire une base de  $E$  en complétant  $\mathcal{L}$  à l'aide de l'algorithme décrit dans le théorème de la base incomplète.

### IV.3. Théorème de la base extraite

#### Théorème 12.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev différent de  $\{0_E\}$ .

Supposons que  $E$  admet une famille génératrice finie  $\mathcal{G}$ .  
(ainsi  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie)

- 1) Alors  $E$  possède une base  $\mathcal{B}$  de cardinal fini.
  - 2) Toutes les bases de  $E$  sont finies et de même cardinal.  
Ce nombre est appelé **dimension de l'espace vectoriel**  $E$ , noté  $\dim(E)$ .
- Par convention, on note  $\dim(\{0_E\}) = 0$ .

Démonstration.

- 1) • Comme  $E \neq \{0_E\}$ ,  $\mathcal{G}$  contient au moins un élément non nul  $u$ .  
On en déduit que  $\mathcal{L} = (u)$  est une famille libre de  $E$ .
  - On a :
    - ×  $E \neq \{0_E\}$ ,
    - ×  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice finie de  $E$ ,
    - ×  $\mathcal{L}$  est une famille libre finie de  $E$ .

On est dans le cadre d'application du théorème de la base incomplète.  
On en déduit que  $\mathcal{L}$  peut être complétée en une base.
- 2) La démonstration classique consiste à introduire le lemme suivant :

$E$  possède une base de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$   $\Rightarrow$  Toute famille possédant strictement plus de  $n$  éléments est liée

La démonstration (technique) de ce lemme sera réalisée en TD.  
Une fois ce résultat démontré, on peut alors démontrer que toutes les bases de  $E$  ont même cardinal.

On procède par l'absurde.

Supposons que  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont deux bases de cardinaux différents  $n$  et  $m$ .  
Alors, on a forcément  $n < m$  ou  $n > m$ .

Ainsi, quitte à renuméroter ces bases :

$$\text{Card}(\mathcal{B}_1) = n < m = \text{Card}(\mathcal{B}_2)$$

Le lemme précédent permet de conclure que la famille  $\mathcal{B}_2$  est liée puisqu'elle est de cardinal strictement plus grand qu'une base de  $E$ .

Ceci contredit le fait que  $\mathcal{B}_2$  est une base.  $\square$

#### À RETENIR

Soit  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Toutes les bases de  $E$  ont même cardinal : ce nombre est la dimension de  $E$ .

Toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base de  $E$ .

De toute famille génératrice de  $E$  on peut extraire une base de  $E$ .

#### Remarque

- Ce théorème/définition signifie que pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit d'en déterminer une base. On obtient en particulier la dimension des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de référence :
  - ×  $\dim(\mathbb{K}^3) = 3$ .
  - ×  $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{K})) = 9$ .
  - ×  $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})) = 2$ .
  - ×  $\dim(\mathbb{K}_3[X]) = 4$ .
- Attention,  $\mathbb{C}$  est de dimension 1 en tant que  $\mathbb{C}$ -ev (engendré par la base (1)) mais il est de dimension 2 en tant que  $\mathbb{K}$ -ev (engendré par exemple par la base  $(1, i)$ ).
- Le théorème 12 permet d'affirmer que si un espace vectoriel est de dimension finie (c'est-à-dire possède une famille génératrice de cardinal fini) alors ... la dimension de cet espace vectoriel est finie.

- Il stipule que tout ev de dimension finie et différent de  $\{0_E\}$  admet une représentation finie (peut être décrit par les éléments constitutifs d'une base) même s'il possède une infinité de vecteurs (le seul ev qui ne contient qu'un nombre fini de vecteurs est  $\{0_E\}$ ).

#### IV.4. Cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension finie

##### Théorème 13.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

##### Sur les familles libres

- Toute famille libre possède au plus  $n$  vecteurs.
- Toute famille libre de  $n$  vecteurs est une base de  $E$ .
- Toute famille de  $q$  vecteurs avec  $q > n$  est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre (dans  $E$ ) est libre (dans  $E$ ).

##### Sur les familles génératrices

- Toute famille génératrice de  $E$  possède au moins  $n$  vecteurs.
- Toute famille génératrice de  $E$  de  $n$  vecteurs est une base de  $E$ .
- Toute famille de  $q$  vecteurs avec  $q < n$  n'est pas génératrice de  $E$ .
- Toute sur-famille d'une famille génératrice de  $E$  est génératrice de  $E$ .

Démonstration.

1. a) C'est le lemme évoqué dans la démonstration du théorème précédent.

b) Soit  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$  une famille libre à  $n$  vecteurs.

Montrons que tout élément  $v \in E$  peut s'écrire comme CL des  $u_1, \dots, u_n$ .  
(cela démontre que la famille  $\mathcal{F}$  est génératrice)

Soit  $v \in E$ . Alors  $(u_1, \dots, u_n, v)$  est une famille liée car elle possède  $n + 1$  vecteurs. Il existe donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$  tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n + \lambda_{n+1} \cdot v = 0_E$$

Deux cas se présentent alors :

× si  $\lambda_{n+1} = 0$  alors la précédente égalité se réécrit :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n = 0_E$$

ce qui montre que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  puisque la famille  $\mathcal{F}$  est libre.

D'où  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = (0, \dots, 0)$ . Contradiction !

× si  $\lambda_{n+1} \neq 0$  alors  $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} \cdot u_1 + \dots + -\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \cdot u_n$

c) Déjà fait.

d) Déjà fait.

2. a) Considérons une famille génératrice de  $E$ .

On procède par l'absurde. On suppose que cette famille possède strictement moins de  $n$  vecteurs. Alors, on peut extraire de cette famille une base de  $E$  de cardinal  $m < n$ . Impossible !

b) Considérons une famille génératrice de  $E$  possédant  $n$  vecteurs.

On procède par l'absurde. On suppose que cette famille n'est pas une base de  $E$ . Alors, on peut en extraire une base de cardinal  $m < n$ . Impossible !

c) On procède de nouveau par l'absurde. On reprend la démonstration précédente : si  $E$  admettait une famille génératrice de  $q$  vecteurs, on pourrait en extraire une base de cardinal  $m \leq q < n$ . Impossible !

d) Déjà fait. □

##### À RETENIR

Soit  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Toute famille libre de  $n$  vecteurs est une base de  $E$ .

Toute famille génératrice de  $E$  de  $n$  vecteurs est une base de  $E$ .

$\text{Card} \left( \begin{array}{c} \text{famille} \\ \text{libre de } E \end{array} \right) \leq \text{Card} \left( \begin{array}{c} \text{base} \\ \text{de } E \end{array} \right) \leq \text{Card} \left( \begin{array}{c} \text{famille} \\ \text{génératrice de } E \end{array} \right)$
---

## MÉTHODO

Démontrer qu'une famille finie  $\mathcal{F}$  est une base d'un espace vectoriel  $F$  de dimension finie  $p \in \mathbb{N}^*$

Pour démontrer qu'une famille  $\mathcal{F}$  est une base d'un espace vectoriel  $F$ , on peut opter pour l'une des rédactions suivantes (le choix dépend du contexte).

1) Démontrer que  $\mathcal{F}$  est une famille libre et génératrice de  $F$ .

La famille  $\mathcal{F}$  est :

× génératrice de  $F$ ,

× libre.

C'est donc une base de  $F$ .

**Exemple classique d'utilisation**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 2X\}$  est un ev et en déterminer une base (on commence par démontrer  $F = \text{Vect}(\dots)$ ).

2) Démontrer que  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $E$  de cardinal minimal

La famille  $\mathcal{F}$  est :

× génératrice de  $F$ ,

× telle que :  $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$ .

C'est donc une base de  $F$ .

**Exemple classique d'utilisation**

La famille  $\mathcal{F} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est :

× génératrice de  $\mathbb{K}^3$ .

En effet, tout vecteur  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$  s'écrit :

$$(a, b, c) = a \cdot (1, 0, 1) + b \cdot (0, 1, 0) + (c - a) \cdot (0, 0, 1)$$

× telle que :  $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$ .

Ainsi,  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{K}^3$ .

3) Démontrer que  $\mathcal{F}$  est une famille libre de cardinal maximal ( $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F)$ )

La famille  $\mathcal{F}$  est :

× libre,

× telle que :  $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$ .

C'est donc une base de  $F$ .

**Exemple classique d'utilisation**

La famille  $\mathcal{F} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est :

× libre (à démontrer!).

× telle que :  $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$ .

Ainsi,  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{K}^3$ .

#### IV.5. Dimension d'un sous-espace vectoriel

**Théorème 14.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ .

Soit  $F$  un sev de  $E$ .

1) Alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$ .

$$2) \left. \begin{array}{l} \bullet F \text{ sev de } E \text{ de dimension finie} \\ \bullet \dim(F) = \dim(E) \end{array} \right\} \Rightarrow F = E$$

Démonstration.

1) Deux cas se présentent.

× Si  $F = \{0_E\}$  alors  $F = \text{Vect}(0_E)$  et ainsi  $(0_E)$  est une famille génératrice de  $F$ . On en conclut que  $F$  est de dimension finie. Enfin :

$$\dim(F) = 0 \leq \dim(E)$$

× Si  $F \neq \{0_E\}$  on considère l'ensemble :

$$\mathcal{P} = \{\text{Card}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \text{ est une famille libre de } F\}$$

- Cette partie de  $\mathbb{N}^*$  est :
  - ▶ non vide. En effet, comme  $F \neq \{0_E\}$ , l'ensemble  $F$  possède un élément  $u \neq 0_E$ . La famille  $(u)$  est alors une famille libre de  $F$ . On en déduit que  $1 \in \mathcal{P}$ .
  - ▶ majorée par  $n$ . En effet, comme  $F \subset E$ , alors toute famille libre  $\mathcal{L}$  de  $F$  est aussi une famille libre de  $E$ . On en déduit alors :

$$\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E) = n$$

On en déduit que  $\mathcal{P}$  admet un plus grand élément. Notons  $p$  cet élément et  $\mathcal{L}_p$  une famille libre de  $F$  de cardinal  $p$ .

- La famille  $\mathcal{L}_p$  est une famille libre de cardinal maximal de  $F$ . On peut alors démontrer que c'est une famille génératrice de  $F$ . On procède par l'absurde. On suppose que  $\mathcal{L}_p$  n'est pas une famille génératrice de  $F$ . On en déduit qu'il existe un élément  $v \in F$  qui ne s'écrit pas comme CL des éléments de  $\mathcal{L}_p$ . On en conclut alors que  $\mathcal{L}_p \cup \{v\}$  est une famille libre de  $F$ , de cardinal  $p + 1 > p$ . Impossible!
- Comme  $\mathcal{L}_p$  est une famille génératrice de  $F$ , alors  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. De plus, comme  $\mathcal{L}_p$  est libre, c'est une base de  $F$ . En particulier :  $\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{L}_p)$  et comme démontré précédemment :

$$\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{L}_p) \leq n = \dim(E)$$

- 2) Supposons :  $\dim(F) = \dim(E)$ .  
 Soit  $\mathcal{B}$  est une base de  $F$ . Alors, par définition :  $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(F)$ .  
 On en déduit :  $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$ .  
 Ainsi  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $E$  telle que  $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$ .  
 C'est donc une base de  $E$ . D'où  $F = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ .  $\square$

## MÉTHODO

**Démontrer l'égalité entre deux espaces vectoriels de dimension finie**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Pour démontrer l'égalité entre ces deux espaces vectoriels, on peut rédigier comme suit.

- 1) Tout d'abord :  $F \subset E$ .
- 2) Or :  $\dim(F) = \dim(E)$ .

On en conclut :  $E = F$ .

**IV.6. Notion d'hyperplan****Définition**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- On appelle **hyperplan** de  $E$  tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $\dim(E) - 1$ .

**Exemple**

1. Les hyperplans d'un plan sont les droites vectorielles incluses dans ce plan. Les hyperplans d'un espace de dimension 3 sont les plans vectoriels inclus dans cet espace.
2. Les ensembles  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , des matrices diagonales, triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, symétriques, antisymétriques, sont des sous-espaces de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , de dimension  $n$ ,  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\frac{n(n-1)}{2}$  respectivement. En particulier,  $\mathcal{T}_2^\pm(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$  sont des hyperplans de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .
3. Pour  $n \leq p$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}_p[X]$  (c'est un hyperplan si  $n = p - 1$ ).



## V. Produit cartésien d'espaces vectoriels

### V.1. Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels

#### Définition

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $(E_1, +_1, \cdot_1), (E_2, +_2, \cdot_2), \dots, (E_p, +_p, \cdot_p)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- On appelle **produit cartésien** des espaces  $E_1, E_2, \dots, E_p$  l'ensemble des  $p$ -uplets tels que, dont le  $k^{\text{ème}}$  terme (pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ) est un élément de  $E_k$ . On le note :

$$\prod_{k=1}^p E_k = E_1 \times \dots \times E_p = \{(u_1, \dots, u_p) \mid \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_k \in E_k\}$$

- On munit cet ensemble des opérations  $+$  et  $\cdot$  induites par les opérations des  $E_k$ . Autrement dit, pour tout  $(u_1, \dots, u_p)$  et  $(v_1, \dots, v_p)$  éléments de  $E_1 \times \dots \times E_p$  et tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$ , on note :

$$(u_1, \dots, u_p) + (v_1, \dots, v_p) = (u_1 +_1 v_1, \dots, u_p +_p v_p)$$

$$\text{et} \quad \lambda \cdot (u_1, \dots, u_p) = (\lambda \cdot_1 u_1, \dots, \lambda \cdot_p u_p)$$



- Il faut bien lire cette définition. Les éléments  $u_1, \dots, u_p$  sont des vecteurs (des éléments des espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$ ) et pas des scalaires (des éléments de  $\mathbb{K}$ ).
- On peut par exemple considérer le produit cartésien :  $\mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3$ . Un élément  $u \in \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3$  s'écrit sous la forme :  $(u_1, u_2)$  avec  $u_1 \in \mathbb{K}^3$  et  $u_2 \in \mathbb{K}^3$ . Les éléments  $u_1$  et  $u_2$  sont ici des vecteurs de  $\mathbb{K}^3$  et peuvent donc s'écrire sous la forme :  $u_1 = (x_1, x_2, x_3)$  et  $u_2 = (y_1, y_2, y_3)$  où les éléments  $x_1, x_2, x_3$  et  $y_1, y_2, y_3$  sont des réels. Par exemple :

$$u = ((1, 1, 0), (1, 0, 1)), \quad u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1)$$

### V.2. Structure vectorielle d'un produit cartésien

#### Théorème 15.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $E_1, E_2, \dots, E_p$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- L'ensemble  $\prod_{k=1}^p E_k$  muni des opérations  $+$  et  $\cdot$  présentées dans la définition est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- a) Si les espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimensions finies, alors l'espace vectoriel  $\prod_{k=1}^p E_k$  l'est aussi.

b) De plus, en cas de dimension finie :

$$\dim \left( \prod_{k=1}^p E_k \right) = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$$

(ainsi : « la dimension d'un produit d'espaces vectoriels est la somme des dimensions »)

*Démonstration.*

Pour plus de lisibilité, on note dans la suite :  $E = \prod_{k=1}^p E_k = E_1 \times \dots \times E_p$  et  $0_1, \dots, 0_p$  les éléments neutres respectifs de  $E_1, \dots, E_p$ .

- Les lois  $+$  et  $\cdot$  sont définies à l'aide des lois dont sont munis les espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$ . Ce faisant, les lois  $+$  et  $\cdot$  héritent des propriétés qui sont vérifiées par les lois  $+_i$  et  $\cdot_i$ .
  - On peut par exemple démontrer que la loi  $+$  est commutative. Soient  $u = (u_1, \dots, u_p) \in E$  et  $v = (v_1, \dots, v_p) \in E$ . Alors :

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, \dots, u_p) + (v_1, \dots, v_p) \\ &= (u_1 +_1 v_1, \dots, u_p +_p v_p) \\ &= (v_1 +_1 u_1, \dots, v_p +_p u_p) \quad (\text{car les lois } +_1, \dots, +_p \text{ sont commutatives}) \\ &= (v_1, \dots, v_p) + (u_1, \dots, u_p) \\ &= v + u \end{aligned}$$

- On peut aussi démontrer que  $0_E = (0_1, \dots, 0_p)$  est un élément neutre (et donc le seul) de  $E$ .
- 2. • Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , notons :  $n_j = \dim(E_j)$  et notons :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{B}_1 = (e_1^{(1)}, \dots, e_{n_1}^{(1)}) & \text{une base de } E_1 \\ \mathcal{B}_2 = (e_1^{(2)}, \dots, e_{n_2}^{(2)}) & \text{une base de } E_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}_p = (e_1^{(p)}, \dots, e_{n_p}^{(p)}) & \text{une base de } E_p \end{array}$$

notons de plus, pour tout  $i \in \llbracket 1, n_j \rrbracket$  :

$$\begin{array}{c} u_i^{(j)} = (0_1, \dots, 0_{i-1}, e_i^{(j)}, 0_{i+1}, \dots, 0_p) \in E \\ | \\ i^{\text{ème}} \text{ position} \end{array}$$

Notons enfin :

$$\mathcal{B} = (u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}, u_1^{(2)}, \dots, u_{n_2}^{(2)}, \dots, u_1^{(p)}, \dots, u_{n_p}^{(p)})$$

- Démontrons alors que cette famille  $\mathcal{B}$  est génératrice de  $E$ .

Soit  $v = (v_1, \dots, v_p) \in E$ .

Par définition de  $E$ , pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $v_j \in E_j$  et il existe donc un unique  $n_j$ -uplet  $(\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_{n_j}^{(j)}) \in \mathbb{K}^{n_j}$  tel que :

$$v_j = \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i^{(j)} \cdot e_i^{(j)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & v \\ &= (v_1, \dots, v_p) \\ &= (v_1, 0_2, \dots, 0_p) + \dots + (0_1, \dots, 0_{p-1}, v_p) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i^{(1)} \cdot e_i^{(1)}, 0_2, \dots, 0_p \right) + \dots + \left( 0_1, \dots, 0_{p-1}, \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i^{(p)} \cdot e_i^{(p)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i^{(1)} \cdot (e_i^{(1)}, 0_2, \dots, 0_p) + \dots + \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i^{(p)} \cdot (0_1, \dots, 0_{p-1}, e_i^{(p)}) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i^{(1)} \cdot u_i^{(1)} + \dots + \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i^{(p)} \cdot u_i^{(p)} \\ &= \sum_{j=1}^p \left( \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i^{(j)} u_i^{(j)} \right) \end{aligned}$$

- Démontrons maintenant que cette famille  $\mathcal{B}$  est libre.

Soit  $(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_{n_2}^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(p)}, \dots, \lambda_{n_p}^{(p)}) \in \mathbb{K}^{n_1 + \dots + n_p}$ .

Supposons :  $\sum_{j=1}^p \left( \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i^{(j)} u_i^{(j)} \right) = 0_E (*)$ .

En reprenant le calcul précédent, on obtient :

$$\left( \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i^{(1)} \cdot e_i^{(1)}, \dots, \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i^{(p)} \cdot e_i^{(p)} \right) = (0_1, \dots, 0_p)$$

et ainsi :  $\sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i^{(1)} \cdot e_i^{(1)} = 0_1, \dots, \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i^{(p)} \cdot e_i^{(p)} = 0_p$ .

Comme  $\mathcal{B}_1$  est une base de  $E_1$ , on en déduit :  $\lambda_1^{(1)} = \dots = \lambda_{n_1}^{(1)} = 0$ .

...

Comme  $\mathcal{B}_p$  est une base de  $E_p$ , on en déduit :  $\lambda_1^{(p)} = \dots = \lambda_{n_p}^{(p)} = 0$ .

Ainsi, la famille  $\mathcal{B}$  est libre.

- Cette famille  $\mathcal{B}$  est donc une base de  $E$ , et comme elle est de cardinal  $n_1 + n_2 + \dots + n_p$ , on a le résultat voulu.  $\square$

**Remarque**

- Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, alors le théorème précédent permet de conclure que  $E^p = E \times E \times \dots \times E$  (produit cartésien de  $p$  copies de  $E$ ), est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. De plus si  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $E^p$  est de dimension finie  $n \times p$ . En particulier :  $\dim(\mathbb{K}^p) = p$ .
- En tant que  $\mathbb{C}$ -ev,  $\mathbb{C}^2$  est de dimension 2. On peut donc en exhiber une base de cardinal 2. C'est par exemple le cas de la famille  $((1, 0), (0, 1))$ . En tant que  $\mathbb{K}$ -ev,  $\mathbb{C}^2$  est de dimension 4 (puisque  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension 2). On peut donc en exhiber une base de cardinal 4. Par exemple, la famille  $((1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i))$  est une base du  $\mathbb{K}$ -ev  $\mathbb{C}^2$ .

## VI. Somme de sous-espaces vectoriels

### VI.1. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

**Définition**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des sous-espaces d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

- On appelle **somme** des sous-espaces  $F_1, F_2, \dots, F_p$  l'ensemble des sommes d'éléments pris dans les sous-espaces  $F_1$  à  $F_p$ . On la note :

$$\sum_{k=1}^p F_k = F_1 + \dots + F_p = \left\{ \sum_{k=1}^p u_k \mid \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_k \in F_k \right\}$$

- On dit que la somme  $F_1 + \dots + F_p$  est **directe**, ou que les sous-espaces  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont en **somme directe**, si :

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \left( \sum_{k=1}^p u_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_k = 0_E \right)$$

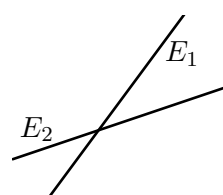
Si une somme  $F_1 + \dots + F_p$  est directe, on la note :  $\bigoplus_{k=1}^p F_k = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ .

- On dit que les sous-espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont **supplémentaires** dans  $E$  si :

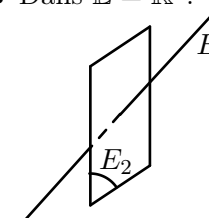
$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

### Représentations graphiques de sous-espaces supplémentaires en dimension 2 et 3

- Dans  $E = \mathbb{K}^2$ .



- Dans  $E = \mathbb{K}^3$ .



### VI.2. Caractérisation de la propriété de somme directe

**Théorème 16.**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des sous-espaces d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1) Cas général

La somme  $F_1 + \dots + F_p$  est directe

$\Leftrightarrow$  Tout élément de  $F_1 + \dots + F_p$  se décompose de manière unique en somme d'éléments des sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_p$

$\Leftrightarrow$  La concaténation de bases  $\mathcal{B}_1$  de  $F_1, \dots, \mathcal{B}_p$  de  $F_p$  est une famille libre de  $F_1 + \dots + F_p$

$\Leftrightarrow$  La concaténation de bases  $\mathcal{B}_1$  de  $F_1, \dots, \mathcal{B}_p$  de  $F_p$  est une base de  $F_1 + \dots + F_p$

$\Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \left( \sum_{i=1}^j F_i \right) \cap F_{j+1} = \{0_E\}$

2) Cas de deux sous-espaces

Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous-espaces de  $E$ , alors :

$$F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont en somme directe} \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

**Remarque**

- Attention à bien lire le résultat de ce théorème. Le résultat énoncé pour  $p = 2$  ne se généralise pas comme on pourrait le penser en première lecture. Plus précisément, le fait que les intersections multiples soient égales à l'ensemble réduit au vecteur nul est une condition nécessaire mais non suffisante.

$$\text{La somme } F_1 + \dots + F_p \text{ est directe} \Rightarrow F_1 \cap \dots \cap F_p = \{0_E\}$$

$$\text{La somme } F_1 + \dots + F_p \text{ est directe} \Rightarrow \left( \forall (j, k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, j \neq k \Rightarrow F_j \cap F_k = \{0_E\} \right)$$

(le sens réciproque est faux pour chacune des ces 2 propriétés)

**Exemple**

1. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  alors les droites vectorielles  $\text{Vect}(e_1), \dots, \text{Vect}(e_n)$  sont supplémentaires dans  $E$ . Plus généralement, si  $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  est une partition d'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , alors les sous-espaces  $\text{Vect}(\mathcal{B}_1), \dots, \text{Vect}(\mathcal{B}_p)$  sont supplémentaires dans l'espace vectoriel  $E$ .
2. Notons  $D_1 = \text{Vect}((1, 0))$ ,  $D_2 = \text{Vect}((0, 1))$  et  $D_3 = \text{Vect}((1, 1))$  dans  $\mathbb{K}^2$ . Alors :

$$\mathbb{K}^2 = D_1 \oplus D_2 = D_2 \oplus D_3 = D_1 \oplus D_3 = D_1 + D_2 + D_3$$

La dernière somme n'est pas directe, même si  $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$  et  $D_j \cap D_k = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$  pour tout couple d'éléments distincts  $(j, k) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$ .

3. L'ensemble des matrices carrées peut s'écrire comme somme des sous-espaces vectoriels des matrices diagonales et de ceux des matrices triangulaires inférieures et supérieures :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$$

Cette somme n'est pas directe.

En revanche, si l'on note  $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$  (resp.  $\mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K})$ ) le sous-espace des matrices strictement triangulaires supérieures (resp. strictement triangulaires inférieures), alors on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K})$$

**VI.3. Une somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel****Théorème 17.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- 1) La somme  $F_1 + \dots + F_p$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- 2) La somme  $F_1 + \dots + F_p$  est même le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant les sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_p$ . Plus précisément :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet F \text{ sev de } E \\ \bullet \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, F \supseteq F_i \end{array} \right\} \Rightarrow F \supseteq \sum_{k=1}^p F_k$$

**VI.4. Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie****VI.4.a) Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels****Théorème 18.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Supposons que les espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont de **dimensions finies**.

**1) Cas général**

$$\text{a. Alors } \sum_{k=1}^p F_k \text{ est de dimension finie et : } \dim \left( \sum_{k=1}^p F_k \right) \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k)$$

b. De plus, il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

**2) Cas de deux sous-espaces (formule de Grassmann)**

Dans le cas où  $p = 2$ , on peut même être plus précis.

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$$

(cela permet de retrouver au passage que  $F_1$  et  $F_2$  sont en somme directe ssi  $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$ )

*Démonstration.*

1. • Comme les espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont de dimensions finies notées respectivement  $n_1, \dots, n_p$ , ils possèdent des bases de cardinaux finis. On note  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  des bases respectives de ces sous-espaces vectoriels. Notons  $\mathcal{F}$  la famille obtenue par concaténation de ces bases. La famille  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $F_1 + \dots + F_p$  (à démontrer!). Ainsi,  $F_1 + \dots + F_p$  est de dimension finie et :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\mathcal{F}) &\geq \dim(F_1 + \dots + F_p) \\ \parallel \\ n_1 + \dots + n_p &= \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p) \end{aligned}$$

- Avec les notations ci-dessus et par le théorème 16 :

La somme  $F_1 + \dots + F_p$  est directe

- $\Leftrightarrow$  La famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $F_1 + \dots + F_p$   
 $\Leftrightarrow$  La famille  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $F_1 + \dots + F_p$   
 $\Leftrightarrow \text{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(F_1 + \dots + F_p)$   
 $\Leftrightarrow \text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F_1 + \dots + F_p)$

2. Comme  $F_1$  et  $F_2$  sont des espaces vectoriels de dimensions finies, alors  $F_1 \cap F_2$  est un espace vectoriel de dimension finie que l'on note, par exemple,  $p \in \mathbb{N}$ .

Considérons alors  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F_1 \cap F_2$ .

- En particulier, c'est une famille libre de  $F_1 \cap F_2$  et donc de  $F_1$ .  
D'après le théorème de la base incomplète, il existe donc  $q \in \mathbb{N}$  et  $(f_1, \dots, f_q)$  une famille de vecteurs de  $F_1$  tels que  $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $F_1$ .
- En particulier, c'est une famille libre de  $F_1 \cap F_2$  et donc de  $F_2$ .  
D'après le théorème de la base incomplète, il existe donc  $r \in \mathbb{N}$  et  $(g_1, \dots, g_r)$  une famille de vecteurs de  $F_2$  tels que  $\mathcal{B}_2 = (e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$  est une base de  $F_2$ .

Notons alors :  $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ .

Démontrons que cette famille est une base de  $F_1 + F_2$ .

- Démontrons que la famille  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $F_1 + F_2$ .

Soit  $u \in F_1 + F_2$ . Il existe donc  $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$  tel que :  $u = u_1 + u_2$ .

- × Comme  $\mathcal{B}_1$  est une base de  $F_1$ , il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$  tel que :

$$u_1 = \alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_p \cdot e_p + \mu_1 \cdot f_1 + \dots + \mu_q \cdot f_q$$

- × Comme  $\mathcal{B}_2$  est une base de  $F_2$ , il existe  $(\beta_1, \dots, \beta_p, \nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+r}$  tel que :

$$u_2 = \beta_1 \cdot e_1 + \dots + \beta_p \cdot e_p + \nu_1 \cdot g_1 + \dots + \nu_r \cdot g_r$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \cdot e_1 + \dots + (\alpha_p + \beta_p) \cdot e_p \\ &\quad + \mu_1 \cdot f_1 + \dots + \mu_q \cdot f_q \\ &\quad + \nu_1 \cdot g_1 + \dots + \nu_r \cdot g_r \end{aligned}$$

La famille  $\mathcal{F}$  est donc bien génératrice de  $F_1 + F_2$ .

- Démontrons que la famille  $\mathcal{F}$  est libre.

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+q+r}$ . Supposons :

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p + \mu_1 \cdot f_1 + \dots + \mu_q \cdot f_q + \nu_1 \cdot g_1 + \dots + \nu_r \cdot g_r = 0_E \quad (*)$$

On en déduit :

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p + \mu_1 \cdot f_1 + \dots + \mu_q \cdot f_q}_{u \in F_1} = \underbrace{-\nu_1 \cdot g_1 - \dots - \nu_r \cdot g_r}_{v \in F_2}$$

- × Comme  $u$  s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de  $\mathcal{B}_1$ , c'est un élément de  $F_1$ .
- × Comme  $v$  s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de  $\mathcal{B}_2$ , c'est un élément de  $F_2$ .
- × Comme  $u = v$  alors  $u$  et  $v$  sont des éléments de  $F_1 \cap F_2$ .

Il existe donc  $(\delta_1, \dots, \delta_p) \in \mathbb{K}^p$  tel que  $u = \sum_{i=1}^p \delta_i \cdot e_i$ . Cela s'écrit :

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p + \mu_1 \cdot f_1 + \dots + \mu_q \cdot f_q = \delta_1 \cdot e_1 + \dots + \delta_p \cdot e_p$$

La famille  $\mathcal{B}_1$  étant une famille libre, on obtient, par identification :

$$\lambda_1 = \delta_1, \dots, \lambda_p = \delta_p, \quad \text{et} \quad \mu_1 = 0, \dots, \mu_q = 0$$

On obtient alors, en réinjectant dans (\*) :

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p + \nu_1 \cdot g_1 + \dots + \nu_r \cdot g_r = 0_E$$

La famille  $\mathcal{B}_2$  étant libre, on en déduit :

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0, \quad \text{et} \quad \nu_1 = 0, \dots, \nu_r = 0$$

Ainsi, la relation de dépendance linéaire (\*) est la relation triviale et la famille  $\mathcal{F}$  est libre. □

#### VI.4.b) Caractérisation du caractère supplémentaire à l'aide de la dimension

##### Théorème 19.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Supposons que les espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont de **dimensions finies**.

##### 1) Cas général

a. Les espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont supplémentaires dans  $E$

$$\Leftrightarrow E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet E = F_1 + \dots + F_p \\ \bullet \text{La somme } F_1 + \dots + F_p \text{ est directe} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \dim(E) = \dim(F_1 + \dots + F_p) \\ \bullet \dim(F_1 + \dots + F_p) = \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p) \end{cases}$$

b. Les espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont supplémentaires dans  $E$

$$\Leftrightarrow E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet E = F_1 + \dots + F_p \\ \bullet \text{La somme } F_1 + \dots + F_p \text{ est directe} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet E = F_1 + \dots + F_p \\ \bullet \text{Tout élément de } F_1 + \dots + F_p \text{ se décompose de manière} \\ \text{unique en somme d'éléments des sous-espaces vectoriels} \\ F_1, \dots, F_p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Tout élément de } E \text{ se décompose de manière unique en somme} \\ \text{d'éléments des sous-espaces vectoriels } F_1, \dots, F_p$$

$$\Leftrightarrow \text{La concaténation de bases } \mathcal{B}_1 \text{ de } F_1, \dots, \mathcal{B}_p \text{ de } F_p \\ \text{est une base de } E$$

2) *Cas de deux sous-espaces*

*Les espaces  $F_1$  et  $F_2$  sont supplémentaires dans  $E$*

$$\Leftrightarrow E = F_1 \oplus F_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet E = F_1 + F_2 \\ \bullet \text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \dim(E) = \dim(F_1 + F_2) \\ \bullet F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \\ \bullet F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

**Remarque**

- Revenons sur le point 2. Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note :

$$n_k = \dim(F_k) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_k = (e_{k,1}, \dots, e_{k,n_k}) \text{ une base de } F_k$$

Notons alors  $\mathcal{B}$  la famille concaténée des bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ , c'est-à-dire la famille :

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_{1,1}, \dots, e_{1,n_1}}_{\mathcal{B}_1}, \underbrace{e_{2,1}, \dots, e_{2,n_2}}_{\mathcal{B}_2}, \dots, \underbrace{e_{p,1}, \dots, e_{p,n_p}}_{\mathcal{B}_p})$$

Si les sous-espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont supplémentaires dans  $E$ , alors la famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ . Cette base est dite **adaptée** aux sous-espaces supplémentaires  $F_1, \dots, F_p$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , et dans le cas  $n = 2$ , la famille :

$$\left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{base de } \mathcal{S}_2(\mathbb{K})}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{dirige } \mathcal{A}_2(\mathbb{K})} \right)$$

est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  adaptée à  $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{A}_2(\mathbb{K})$ .

MÉTHODO

**Démontrer qu'un espace vectoriel s'écrit comme somme de 2 supplémentaires**

On considère un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On souhaite démontrer que  $E$  s'écrit sous la forme  $E = F_1 \oplus F_2$  où  $F_1$  et  $F_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On pourra alors penser à l'une ou l'autre des méthodes suivantes. Ces méthodes doivent toutes être connues car le contexte peut imposer naturellement l'une d'entre elles.

- 1) Dans le cas où seul l'un des sous-espaces vectoriels est spécifié, il suffit d'utiliser le théorème de la base incomplète.
- 2) Utilisation de la caractérisation par unicité de la décomposition de tout élément de  $E$  sous forme d'une somme d'éléments de  $F_1$  et  $F_2$ . Il est alors classique d'utilise le raisonnement par analyse-synthèse.
- 3) Utilisation des caractérisations de la supplémentarité à l'aide de la dimension.

**Illustration de ces procédés sur des exemples**

- 1) Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que pour toute application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , il existe  $G$  sous-espace vectoriel de  $E$  tel que :  $E = G \oplus \text{Ker}(f)$ .

*Démonstration.*

Soit  $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de de  $\text{Ker}(f)$ . C'est une famille libre de  $\text{Ker}(f)$  et donc de  $E$ .

On peut donc la compléter en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ .

On note alors  $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ .

La base  $\mathcal{B}$  étant une concaténation d'une base de  $\text{Ker}(f)$  et de  $G$ , on a bien :  $E = G \oplus \text{Ker}(f)$ . □

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.*

Il s'agit de démontrer que toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se décompose de manière unique comme somme d'une matrice antisymétrique  $A$  et d'une matrice symétrique  $S$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Analyse :**

Supposons que  $M$  s'écrive sous la forme  $M = A + S$  (\*) où  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors :

$${}^t(M) = {}^t(A) + {}^t(S) = -A + S \quad (**)$$

En sommant (\*) et (\*\*), on obtient :  $S = \frac{1}{2} ({}^t(M) + M)$ .

En soustrayant (\*\*) à (\*), on obtient :  $A = \frac{1}{2} (M - {}^t(M))$ .

(la décomposition (\*) fournit une unique valeur pour  $A$  et  $S$ , ce qui assure l'unicité de la solution)

**Synthèse :**

Notons  $S = \frac{1}{2} ({}^t(M) + M)$  et  $A = \frac{1}{2} (M - {}^t(M))$ . Alors :

$$\begin{aligned} {}^tA &= \frac{1}{2} {}^t(M - M) & {}^tS &= \frac{1}{2} {}^t({}^t(M) + M) \\ &= \frac{1}{2} (M - {}^t(M)) = -A & &= \frac{1}{2} (M + {}^t(M)) = S \end{aligned}$$

Donc  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

Donc  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

Enfin :  $A + S = \frac{1}{2} ({}^t(M) - M) + \frac{1}{2} ({}^t(M) + M) = M$ .

On a bien :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

□

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.*

• La famille  $\mathcal{F} = (E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . On en déduit :

$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \text{Card}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

La famille  $\mathcal{G}$  obtenue en concaténant les familles  $\mathcal{G}_1 = (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$  et  $\mathcal{G}_2 = (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) &= \text{Card}(\mathcal{G}) \\ &= \text{Card}(\mathcal{G}_1) + \text{Card}(\mathcal{G}_2) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{n-1} i \right) + n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n}{2} ((n-1) + 2) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n}{2} ((n-1) + (n+1)) \\ &= \frac{n}{2} \times 2n \\ &= n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

Finalement :  $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ .



- Soit  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors :

$$\times {}^tM = -M \text{ car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

$$\times {}^tM = M \text{ car } M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit :  $M = -M$  et donc :  $2M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ .

$$\text{Finalement : } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}.$$

$$\text{On a bien : } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

□

Notons enfin que l'écriture sous forme d'une somme de supplémentaires amène naturellement à considérer une base adaptée au problème (une famille issue de la concaténation d'une base de  $F_1$  et d'une base de  $F_2$ ). Cette base peut être introduite lors de la démonstration de la décomposition sous forme de somme ou plus tard dans l'exercice.

#### VI.4.c) Caractérisation des hyperplans par leurs supplémentaires

##### Théorème 20.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Les hyperplans de  $E$  sont les supplémentaires des droites vectorielles de  $E$ .

$$H \text{ est un hyperplan de } E \Leftrightarrow \exists a \in E, E = H + \text{Vect}(a)$$

Démonstration.

- 1) Si  $H$  est un hyperplan de  $E$ , alors pour tout  $a \in E \setminus H$  :

$$\times H \cap \text{Vect}(a) = \{0_E\} \text{ donc la somme } H + \text{Vect}(a) \text{ est directe.}$$

$$\times \dim(H + \text{Vect}(a)) = \dim(H) + \dim(\text{Vect}(a)) = (\dim(E) - 1) + 1$$

$$\text{Ainsi : } E = H \oplus \text{Vect}(a).$$

- 2) Soit  $H$  le supplémentaire d'une droite vectorielle  $D$  de  $E$  ( $E = H \oplus D$ ).

Alors par la formule de Grassmann :

$$\dim(E) = \dim(H) + \dim(D) = \dim(H) + 1$$

donc  $H$  est un hyperplan de  $E$ .

□

##### Remarque

- Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ , différent de  $\{0_E\}$ , possède un supplémentaire.

Pour le démontrer, il suffit de considérer une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  de  $F$  (où on a noté  $p = \dim(F) \in \mathbb{N}$ ). Comme  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $F$  et donc de  $E$ , on peut compléter cette famille en une base de  $E$ .

Il existe donc  $q \in \mathbb{N}$  et  $(f_1, \dots, f_q) \in \mathbb{E}^q$  tel que :

$$(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q) \text{ est une base de } E$$

$$\text{Ainsi : } E = F \oplus \text{Vect}(f_1, \dots, f_q).$$

- (CULTURE)

Dans le cas où  $E$  n'est pas de dimension finie, la démonstration du théorème de la base incomplète faite dans ce cours ne tient plus. En effet, la terminaison de l'algorithme présent dans la démonstration est fournie par le fait qu'en un nombre fini d'étapes on peut inspecter toute la famille  $\mathcal{G}$ . Cela ne signifie pas que le théorème de la base incomplète est faux en dimension infinie. Il est vérifié si on accepte « l'axiome du choix ». Cette discussion nécessite une compréhension plus fine de la théorie des ensembles. Ce n'est pas l'objet de ce cours.