CH V : Intégrales à paramètre

I. Introduction

I.1. Notion d'intégrale à paramètre

- Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
  Pour plus de lisibilité, on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- On considère une fonction f qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

  L'intégrale présente dans cette définition est appelée une intégrale à paramètre. Profitons-en pour remarquer qu'il y a deux variables différentes en jeu dans cette intégrale :
  × t est une variable **réelle**. C'est la variable d'intégration.
  × x est une variable **réelle**.
  C'est le fameux paramètre de cette intégrale à paramètre.
  Le cas où le paramètre est entier (souvent noté n) amènera à un traitement relativement similaire (à suivre !).
- Dans la suite, on note :
  × $\underline{h}_x : I \to \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} \underline{h}_x & : & I & \to & \mathbb{K} \\ & & t & \mapsto & \underline{h}_x(t) = h(x,t) \end{array}$$

  (on fixe la variable x de la fonction h et on crée ainsi une fonction $\underline{h}_x$ « en t »)

  La fonction $\underline{h}_x$ est l'intégrande - on intègre « en t » - de l'intégrale considérée.

  × $\underline{h}_t : A \to \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} \underline{h}_t & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \underline{h}_t(x) = h(x,t) \end{array}$$

  (on fixe la variable t de la fonction h et on crée ainsi une fonction $\underline{h}_t$ « en x »)
- Généralement, la fonction h n'est pas nommée dans l'énoncé. Il est conseillé de le faire.
  Précisons que les notations $\underline{h}_x$ et $\underline{h}_t$ ne sont pas usuelles et il faut donc les introduire afin que le correcteur puisse comprendre le raisonnement. Ces notations sont introduites dans un double objectif : elles font apparaître le nom h tout en s'en dissociant (à l'aide du trait tracé en dessous).
- S'il est naturel d'introduire une fonction à deux variables h lors de l'étude d'une intégrale à paramère, les hypothèses seront quant à elles exprimées sur des fonctions d'une seule variable. C'est tout l'intérêt de la notation précédente ! Comprendre les objets manipulés et la notion de variable est essentiel pour ce chapitre. Pour s'en convaincre, on peut lire le rapport de l'épreuve des Mines PSI 2 de 2019.

> *« La confusion entre une fonction et une expression est déjà assez irritante (les élèves démarrant leur copie par $g(x)$ est continue et positive ne mettent pas les correcteurs dans les meilleures dispositions) ; elle devient rédhibitoire lorsqu'il s'agit de manipuler des fonctions de plusieurs variables (que comprendre à l'énoncé brut $h(x,t)$ est continue par morceaux lors de la vérification des hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale ?). »*

- Il y a globalement deux questions sur les intégrales à paramètre :
  1) démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est bien définie pour tout $x \in A$ (où A est un intervalle donné par l'énoncé).
  Parfois, l'intervalle A n'est pas fourni et il faut alors le déterminer. Il est constitué de l'ensemble des valeurs x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est bien définie (soit en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment, soit en tant qu'intégrale impropre convergente).
  2) démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. $\mathscr{C}^2$, ..., $\mathscr{C}^k$) sur A et déterminer sa dérivée (resp. dérivée deuxième, ..., $k^{\text{ème}}$). Le résultat attendu (nécessite évidemment un théorème !) est :

$$\forall x \in A,\ f'(x) \ = \ \int_I \underline{h}_t'(x)\ dt \quad \left(= \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt\right)$$

I.2. Un exemple simple

- La notion d'intégrales à paramètre apparaît avant le chapitre dédié. En effet, dans le chapitre sur les intégrales généralisées, on trouve le critère de Riemann :

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

  Cette présentation n'est pas celle des intégrales à paramètre mais il est simple de s'y ramener.
- Considérons la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x}\ dt$$

Introduisons les notations de la section précédente :
× $I = [2, +\infty[$ et $A \subset \mathbb{R}$ est l'intervalle de bonne définition de f, intervalle à déterminer.
× la fonction h est définie par :

$$h \ : \ \begin{array}{rcl} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1}{t^x} \end{array}$$

× les fonctions $\underline{h}_{x_0}$ (pour $x_0 \in A$) et $\underline{h}_{t_0}$ (pour $t_0 \in I$) sont définies respectivement par :

$$\underline{h}_{x_0} \ : \ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t^{x_0}} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \underline{h}_{t_0} \ : \ \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{{t_0}^x} \end{array}$$

(on note ici x_0 et t_0 pour mettre en avant la différence entre variables libres x_0 et T_0 et variables liées x et t)

- On peut alors chercher à déterminer le domaine de définition de f.
  Il s'agit de savoir pour quelles valeurs de x_0 l'objet $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{x_0}}\ dt$ existe.
  Comme il s'agit d'une intégrale généralisée, la question est de savoir quelles valeurs de x_0 l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{x_0}}\ dt$ est convergente. Or, d'après le critère de Riemann,la fonction h_{x_0} est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $x_0 > 1$. On en conclut que le domaine de définition de f est $A =]1, +\infty[$.

I.3. Un exemple classique pour démarrer

- Considérons la fonction f définie par :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

- Démontrons alors que la fonction Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
Soit $x \in\ ]0,+\infty[$.
  - ► La fonction $g_x : t \mapsto t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ \ln(t)}\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
  - ► Démontrons tout d'abord la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.
    - × $\forall t \in\ ]0,1]$, $t^{x-1} \geqslant 0$.
    - × $t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{0} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.
    - × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^{1-x}}\ dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant $1-x$.
    Elle est donc convergente si et seulement si $1-x<1$, c'est-à-dire si $x>0$, ce qui est le cas.

    Par théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente.

  - ► Démontrons maintenant la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.
    - × $\forall t \in [1,+\infty[$, $t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
    - × $t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
    En effet : $\dfrac{t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{x+1}\ \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
    - × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2>1)$. Elle est donc convergente.

    Par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente.

On en conclut, que pour tout $x>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente ce qui signifie que la fonction Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

Remarque

- Lorsque l'énoncé demande de déterminer l'ensemble de définition d'une fonction, il faut mettre en place un raisonnement du type :

$$\begin{array}{rl} & \text{La quantité } \Gamma(x) \text{ est bien définie} \\ \Leftrightarrow & \text{Le réel } x \text{ appartient à l'intervalle} \ldots \end{array}$$

- Ici, l'énoncé est différent : on demande de démontrer que la fonction Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$. Non seulement l'intervalle nous est fourni mais en plus on ne demande de résultat que sur cet intervalle et pas sur le reste des réels. On peut donc limiter l'étude à cet intervalle.
- En réalité, avec le raisonnement effectué, on peut conclure que le domaine de définition de la fonction Γ est $]0, +\infty[$. En effet, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente quelle que soit la valeur de x. Ainsi, la convergence de l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ ne dépend que de celle de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ et le critère d'équivalence démontre que la convergence de celle-ci a lieu si et seulement si $x > 0$.

I.4. La notion d'intégrabilité : rappel

Définition

Soit $I = |c, d| \subset \mathbb{R}$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur I.

On dit que la fonction g est intégrable sur I si :

× g est continue (par morceaux) sur I.

× l'intégrale $\displaystyle\int_I g(t)\ dt$ est **absolument** convergente sur I.

Remarque

- On a noté ici $I = |c, d|$ l'intervalle considéré de sorte à considérer tous les cas. Le cas le plus simple est celui où g est continue par morceaux sur le segment $[c, d]$ (où $(c, d) \in \mathbb{R}^2$). Ce cas est le cadre idéal de l'intégration et permet à lui seul de conclure que la fonction g est intégrable sur $[c, d]$.
- Dans le cas où l'on considère une intégrale généralisée (et pas une intégrale sur un segment comme dans le point précédent), il convient d'insister sur l'importance de l'hypothèse d'**absolue** convergence. Pour démontrer l'intégrabilité d'une fonction sur I, on raisonne donc sur la fonction $|g|$.

  En particulier, si g est à valeurs complexes, la notation $|g|$ désigne le module de la fonction g.

> Ainsi, même si une fonction g est à valeurs complexes, la question de l'intégrabilité revient `TOUJOURS` à une démonstration de convergence d'une intégrale d'une fonction à valeurs réelles (positives).

II. Théorème d'interversions

II.1. Interversion des symboles d'intégration et de limite

II.1.a) Interversion des symboles $\displaystyle\int_I$ et $\displaystyle\lim_{x\to a}$

Théorème 1.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

où :

× *$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.*
(on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

× *$h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.*
(on introduit, pour tout $t \in I$ et $x \in A$, les fonctions $\underline{h}_x : t \mapsto h(x,t)$ et $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$)

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^0 \text{ - étude « en } x \text{ »}}$

- *Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur A.*

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = h(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*
- *Il existe une fonction φ* **intégrable sur** *I telle que :*

$$\forall x \in A, \forall t \in I,\ |\, \underline{h}_t(x)\,| \leqslant \varphi(t)$$

(cela démontre au passage que la fonction $t \mapsto \underline{h}_t(x)$ est intégrable sur I)

Alors la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur A.

Remarque

- Dans le programme officiel il est précisé, dans la section consacré aux intégrales, qu'on *« évite tout excès de rigueur dans la rédaction »*. La première conséquence citée est qu'il n'est pas nécessaire de rappeler les hypothèses de régularité des fonctionns en jeu lors des calculs d'intégrale par intégrations par parties et des changements de variable. La deuxième conséquence concerne le chapitre des intégrales à paramètre. Il est signalé :
  × *« De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration ».*
  × *« Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux ».*

  En résumé : on pourra affirmer (sans démonstration) la continuité par morceaux.
- Il est précisé dans le programme officiel *« En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation »*. Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (a,b) \in A^2, \text{ Il existe une fonction } \varphi \text{ intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \forall x \in [a,b], \forall t \in I,\ |\, \underline{h}_t(x)\,| \leqslant \varphi(t) \end{array}}$$

- Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a, b]$ produit une fonction φ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'ypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a, \beta|$ où β est la borne haute de A. Évidemment, on peut aussi travailler sur $|\alpha, b]$ si l'expression de φ n'utilise que b.

- Ce théorème doit être compris comme une machine à intervertir les symboles lim et $\displaystyle\int$. En effet, pour tout $a \in A$:

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\lim_{x\to a} \int_I h(x,t)\ dt & = & \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) & \\
& = & f(a) & \textit{(car } f \textit{ est continue en } a\in A\textit{)} \\
& = & \displaystyle\int_I h(a,t)\ dt & \\
& = & \displaystyle\int_I \underline{h}_t(a)\ dt & \\
& = & \displaystyle\int_I \left(\lim_{x\to a} \underline{h}_t(x)\right)\ dt & \textit{(car } \underline{h}_t \textit{ est continue en } a\in A\textit{)} \\
& = & \displaystyle\int_I \left(\lim_{x\to a} h(x,t)\right)\ dt &
\end{array}$$

On peut ainsi conclure :

$$\boxed{\forall a \in A,\ \lim_{x\to a} \int_I h(x,t)\ dt \ = \ \int_I \left(\lim_{x\to a} h(x,t)\right)\ dt}$$

- Rappelons qu'on a noté $A = |\alpha,\beta|$. Ce théorème permet d'intervertir les symboles $\displaystyle\lim_{x\to a}$ et $\displaystyle\int_I$ pour tout $a\in A$. Si A est de la forme $]\alpha,\beta|$ (dans ce cas, $\alpha \notin A$), on peut se poser la question de savoir si on peut intervertir les symboles $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}$ et $\displaystyle\int_I$.
De manière similaire, si A est de la forme $|\alpha,\beta[$ (dans ce cas, $\beta\notin A$), on peut se demander si on peut intervertir les symboles $\displaystyle\lim_{x\to\beta}$ et $\displaystyle\int_I$.
En résumé, peut-on intervertir les symboles lorsque l'on considère la limite en une borne de A non contenue dans A ? C'est l'objet du théorème de convergence dominée à paramètre continu.

II.1.b) Interversion des symboles $\displaystyle\int_I$ et $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}$

Théorème 2.

Soit $A\subset\mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $]\alpha,\beta|$ où $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $\beta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc}
f & : & A & \to & \mathbb{K} \\
& & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt
\end{array}$$

où :

× *$I\subset\mathbb{R}$ est un intervalle réel.*
(on pourra noter $I = |c,d|$ où $c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $d\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$)

× *$h : A\times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A\times I$.*
(on introduit, pour tout $t\in I$ et $x\in A$, les fonctions $\underline{h}_x : t\mapsto h(x,t)$ et $\underline{h}_t : x\mapsto h(x,t)$)

(i) *Existence d'une limite finie - étude « en x »*

- *Pour tout $t\in I$, la fonction $\underline{h}_t : x\mapsto h(x,t)$ admet une limite finie $\ell(t)$ en α (autrement dit : $\forall t\in I,\ \displaystyle\lim_{x\to\alpha} \underline{h}_t(x) = \ell(t)$).*
- *La fonction ℓ est continue par morceaux sur I.*

(ii) *Intégrabilité (par domination) - étude « en t »*

- *Pour tout $x\in A$, la fonction $t\mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = h(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*
- *Il existe une fonction φ* **intégrable sur** *I telle que :*

$$\forall x\in A, \forall t\in I,\ \ |\,\underline{h}_t(x)\,| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $\ell : I\to\mathbb{K}$ est intégrable sur I.
De plus, la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ admet une limite finie en α définie par : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\int_I h(x,t)\ dt \ = \ \int_I \left(\lim_{x\to\alpha} h(x,t)\right)\ dt}$.

II.2. Dérivation sous le symbole d'intégration

Théorème 3.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

où :

× *$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.*

× *$h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.*

(i) *Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en x »*

- *Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.*
- *On détermine $\underline{h}_t'$ (dérivée « en x »).*

(ii) *Intégrabilité (par domination) - étude « en t »*

- *Intégrabilité (sans forcément dominer)*

  0. *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x)$ est intégrable sur I.*

- *Intégrabilité par domination*

  1. ▸ *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(1)}(x)$ est continue par morceaux sur I.*

  ▸ *Il existe une fonction φ* **intégrable sur** *I telle que :*

$$\forall x \in A, \forall t \in I,\ \left|\underline{h}_t^{(1)}(x)\right| \leqslant \varphi(t)$$

$$\left(\text{ce qui s'écrit :} \forall x \in A, \forall t \in I,\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\right)$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.

De plus : $\boxed{\forall x \in A,\ f'(x) = \displaystyle\int_I \underline{h}_t'(x)\ dt}$ $\left(= \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\ dt\right)$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (a,b) \in A^2, \text{ il existe une fonction } \varphi \text{ intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \forall x \in [a,b], \forall t \in I,\ \left|\underline{h}_t'(x)\right| \leqslant \varphi(t) \end{array}}$$

Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]$ produit une fonction φ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'hypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a, \beta|$ où β est la borne haute de A. Évidemment, on peut aussi travailler sur $|\alpha, b]$ si l'expression de φ n'utilise que b.

Exercice 1 *(d'après* `CCINP 2019 - PSI`*)*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)}\ dt$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.

4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Exercice 2 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Énoncer le théorème sous le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

b) Résoudre (E).

Exercice 3 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \forall t \in \,]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, dt$.

2. Pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3. Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 4 *(d'après* `CCINP 2016 - MP`*)*

1. ***a)*** Soit $x \in \,]0,+\infty[$.
Démontrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) On note alors, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt$$

(fonction Gamma d'Euler)

Démontrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0$.

c) Démontrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 5 *(d'après* `CCINP 2015 - PSI`*)*

1. **L'intégrale de Gauss**

a) Montrer que l'intégrale de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est convergente sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \right)^2,\ G(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2\,(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, puis préciser les dérivées d'ordre 1 de F et de G.

c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F'(x) + G'(x) = 0$$

et en déduire la valeur de $F + G$.

d) Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

e) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. **Les fonctions u et v**

a) Montrer que les fonctions :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\, \cos(t\,x)}{\sqrt{x}}\, dx \quad \text{et} \quad v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\, \sin(t\,x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

sont bien définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *(d'après* `CCINP 2020 - PSI`*)*

Pour $x > 0$, on note : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx}\, dt$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin(t)\, dt$ et $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(t)\, dt$.

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de G.

5. Trouver une expression simple pour G et pour H.
(on pourra calculer $H(x) + iG(x)$)

En déduire, pour $\alpha \in\ ]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(\alpha t)\, dt$.

6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et démontrer que f est continue sur ce domaine de définition.

2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{\left(1+t^x\right)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt$$

En déduire le sens de variation de f.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8 *(d'après* `Centrale 2023 - PSI`*)*

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2}}{t^2+1}\, dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

4. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\,g'(x)\, g(x)$.

6. Vérifier : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \big(g(x)\big)^2$.

7. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$, puis conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}\, dt$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et étudier les variations de f.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

II.3. Dérivation k fois sous le symbole d'intégration

Théorème 4.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

où :

× *$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.*

× *$h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.*

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^k \text{ - étude « en } x \text{ »}}$

- *Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.*
- *On détermine alors les dérivées successives $\underline{h}_t^{(1)}$, ..., $\underline{h}_t^{(k)}$.*

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- *Intégrabilité (sans forcément dominer)*

  0. *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x)$ est intégrable sur I.*

  1. *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(1)}(x)$ est intégrable sur I.*

  ...

  k-1. *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(k-1)}(x)$ est intégrable sur I.*

- *Intégrabilité par domination*

  k. ▸ *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(k)}(x)$ est continue par morceaux sur I.*

  ▸ *Il existe une fonction φ* **intégrable sur** *I telle que :*

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ \left| \underline{h}_t^{(k)}(x) \right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.

De plus : $\boxed{\forall j \in [\![0,k]\!], \forall x \in A, \ f^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \underline{h}_t^{(j)}(x)\ dt}$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Ce dernier théorème peut être utilisé pour démontrer qu'une fonction f définie par une intégrale à paramètre est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A. Pour ce faire, on démontre que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 *(d'après* `CCINP 2023 - PSI`*)*

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \int_0^\pi \cos\big(x \sin(t)\big)\ dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\ dt$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III. Suites et séries de fonctions intégrables

III.1. Théorème de convergence dominée

Théorème 5.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \displaystyle\int_I h_n(t)\ dt$ *où :*

× *$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.*
(on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

× *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n : I \to \mathbb{K}$ est une fonction définie sur I (on définit une suite de fonctions (h_n)).*

Soit $h : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

(i) *Existence d'une limite finie - étude « en n »*

- *La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur I vers la fonction h.*
  $\left(\forall t \in I,\ \lim\limits_{n \to +\infty} h_n(t) = h(t) \right)$
- *La fonction h est continue par morceaux sur I.*

(ii) *Intégrabilité (par domination) - étude « en t »*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction h_n est continue par morceaux sur I.*
- *Il existe une fonction φ* **intégrable sur** *I telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ |h_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

× *la fonction h est intégrable sur I.*

× *la suite $\left(\displaystyle\int_I h_n(t)\ dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie en $+\infty$ définie par :*

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_I h_n(t)\ dt = \int_I \left(\lim_{n \to +\infty} h_n(t) \right)\ dt = \int_I h(t)\ dt}$$

Exercice 11 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n\, \mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + t^n\, \mathrm{e}^{-t}}\ dt$.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 12 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.

2. ***a)*** Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 13 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + n^2\, x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

2. Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 14
Déterminer les limites des suites (I_n) dont le terme général est :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + \mathrm{e}^x}$ ***2.*** $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x)\right)^{\frac{1}{n}}\ dx$ ***3.*** $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^n}$

III.2. Théorème d'intégration terme à terme

Théorème 6.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$.

(i) $\boxed{\textit{Existence d'une limite finie - étude « en n »}}$

- *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*
  ($\forall t \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$)
- *La fonction S est continue par morceaux sur I.*

(ii) $\boxed{\textit{Intégrabilité - étude « en t »}}$

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.*

(iii) $\boxed{\textit{Hypothèse spécifique}}$

- *La série numérique $\sum \int_I |f_n(t)|\, dt$ converge.*

Alors :

× *la fonction S est intégrable sur I.*

× *la suite $\left(\int_I S_n(t)\, dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.*

De plus :

$$\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\, dt\right)}$$

ou encore :

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\, dt &= \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right) dt \\ &= \int_I S(t)\, dt \\ &= \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt \end{aligned}}$$

Exercice 15 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes.

On pose $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n\, t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

1. a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\, \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right|\, dt$.

b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n\, t^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-t}\right) dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 16 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \mapsto t^n \ \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ \ln(t) \ dt$.

2. Prouver que $f : t \mapsto \mathrm{e}^t \ \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t \ \ln(t) \ dt \ = \ -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ n!}$$

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Exercice 17

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} \ dt \ = \ -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 18

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \ \mathrm{e}^{-nt}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right) \ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t) \ dt\right)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^n \ \ln(n)}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right) \ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} f_n(t) \ dt\right)$.

Remarque

- Dans les chapitres sur les suites et séries de fonctions, on verra le théorème d'interversion de symboles suivant :

> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
>
> Supposons que :
>
> × $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$,
>
> × la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
>
> Alors :
>
> $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) \ dt\right) \ = \ \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \ dt\right) \ dt}$$

- Ce théorème n'est pas encore accessible puisque la notion de convergence uniforme n'a pas encore été définie. Le fait que deux théorèmes différents permettent de conclure quant à la possibilité d'intégrer terme à terme se poser la question du théorème à utiliser en pratique. La remarque précédente s'applique :
  × dans le cas d'une intégrale généralisée, on raisonnera exclusivement à l'aide du théorème d'intégration terme à terme.
  × dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte de l'exercice peut amener à utiliser l'un ou l'autre des énoncés.
- Dans le cas où la série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\,f_n(t)\,| \ dt$ diverge, on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On pourra alors tenter d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n) des sommes partielles associée à la série de fonctions $\sum f_n$.

Théorème de convergence dominée appliqué à (S_n)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$.

(i) $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } n \text{ »}}$

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
  ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$)
- La fonction S est continue par morceaux sur I.

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.
- Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |\,S_n(t)\,| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

× la fonction S est intégrable sur I.

× la suite $\left(\displaystyle\int_I S_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie définie par :

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt &= \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right)\ dt \\ &= \int_I S(t)\ dt = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt\end{aligned}}$$

ou encore : $\boxed{\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\ dt\right)}$

Exercice 19

On étudie dans cet exercice deux cas où on ne peut directement appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la suite (f_n) et où il faut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n).

1. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n\ t^{n+a}$.
On souhaite démontrer :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t)\ dt\right)$$

a) Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

b) Conclure.
(on pourra appliquer le théorème de convergence dominée convenablement)

2. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n\ t^{a\,n}$.
On souhaite démontrer :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t)\ dt\right)$$

a) Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

b) Conclure.
(on pourra appliquer le théorème de convergence dominée convenablement)