CH VIII : Intégrales à paramètre

I. Introduction

I.1. Notion d'intégrale à paramètre

- Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
  Pour plus de lisibilité, on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- On considère une fonction f qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

  L'intégrale présente dans cette définition est appelée une intégrale à paramètre. Profitons-en pour remarquer qu'il y a deux variables différentes en jeu dans cette intégrale :
  × t est une variable **réelle**. C'est la variable d'intégration.
  × x est une variable **réelle**. C'est le fameux paramètre de cette intégrale à paramètre.
  Le cas où n est un paramètre entier est un cas particulier qui amènera à un traitement relativement similaire (à suivre !).
- Dans la suite, on note :
  × $\underline{h}_x : I \to \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} \underline{h}_x & : & I & \to & \mathbb{K} \\ & & t & \mapsto & \underline{h}_x(t) = h(x,t) \end{array}$$

  (on fixe la variable x la fonction h et on crée ainsi une fonction $\underline{h}_x$ « en t »)
  La fonction $\underline{h}_x$ est l'intégrande - on intègre « en t » - de l'intégrale considérée.
  × $\underline{h}_t : A \to \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} \underline{h}_t & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \underline{h}_t(x) = h(x,t) \end{array}$$

  (on fixe la variable t la fonction h et on crée ainsi une fonction $\underline{h}_t$ « en x »)
- Généralement, la fonction h n'est pas nommée dans l'énoncé. Il est conseillé de le faire.
  Précisons que les notations $\underline{h}_x$ et $\underline{h}_t$ ne sont pas usuelles et il faut donc les introduire afin que le correcteur puisse comprendre le raisonnement. Ces notations sont introduites dans un double objectif : elles font apparaître le nom h tout en s'en dissociant (à l'aide du trait tracé en dessous).
- Il y a globalement deux questions sur les intégrales à paramètre :
  1) démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est bien définie pour tout $x \in A$ (où A est un intervalle donné par l'énoncé).
  Parfois, l'intervalle A n'est pas fourni et il faut alors le déterminer. Il est constitué de l'ensemble des valeurs x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est bien définie.
  2) démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. $\mathscr{C}^2$, ..., $\mathscr{C}^k$) sur A et déterminer sa dérivée (resp. dérivée deuxième, ..., $k^{\text{ème}}$). Le résultat attendu (nécessite évidemment un théorème qui) est :

$$\forall x \in A,\ f'(x) \ = \ \int_I \underline{h}_t'(x)\ dt \quad \left(= \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt \right)$$

I.2. Un exemple simple

- La notion d'intégrales à paramètre apparaît avant le chapitre dédié. En effet, dans le chapitre sur les intégrales généralisées, on trouve le critère de Riemann :

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

Cette présentation n'est pas celle des intégrales à paramètre mais il est simple de s'y ramener.

- Considérons la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x}\, dt$$

Introduisons les notations de la section précédente :

× $I = [2, +\infty[$ et $A \subset \mathbb{R}$ est l'intervalle de bonne définition de f, intervalle à déterminer.

× la fonction h est définie par :

$$\begin{array}{rccl} h & : & A \times I & \to & \mathbb{K} \\ & & (x,t) & \mapsto & \dfrac{1}{t^x} \end{array}$$

× les fonctions $\underline{h}_{x_0}$ (pour $x_0 \in A$) et $\underline{h}_{t_0}$ (pour $t_0 \in I$) sont définies respectivement par :

$$\begin{array}{rcccl} \underline{h}_{x_0} & : & I & \to & \mathbb{K} \\ & & t & \mapsto & \dfrac{1}{t^{x_0}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} \underline{h}_{t_0} & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{{t_0}^x} \end{array}$$

(on note ici x_0 et t_0 pour mettre en avant la différence entre variable libre x_0 et variable liée x)

- On peut alors chercher à déterminer le domaine de définition de f.

Il s'agit de savoir pour quelles valeurs de x_0 l'objet $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{x_0}}\, dt$ existe bien. Comme il s'agit d'une intégrale généralisée, la question est de savoir quelles valeurs de x_0 l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{x_0}}\, dt$ est convergente. Or, d'après le critère de Riemann,la fonction h_{x_0} est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $x_0 > 1$. On en conclut que le domaine de définition de f est $A =]1, +\infty[$.

I.3. La notion d'intégrabilité : rappel

Définition

Soit $I = |c, d| \subset \mathbb{R}$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur I.

On dit que la fonction g est intégrable sur I si :

× g est continue (par morceaux) sur I.

× l'intégrale $\int_I g(t)\, dt$ est **absolument** convergente sur I.

Remarque

- On a noté ici $I = |c, d|$ l'intervalle considéré de sorte à considérer tous les cas. Le cas le plus simple est celui où g est continue par morceaux sur le segment $[c, d]$ (où $(c, d) \in \mathbb{R}^2$). Ce cas est le cadre idéal de l'intégration et permet à lui seul de conclure que la fonction g est intégrable sur $[c, d]$.
- Dans le cas où l'on considère une intégrale généralisée (et pas une intégrale sur un segment comme dans le point précédent), il convient d'insister sur l'importance de l'hypothèse d'**absolue** convergence. Pour démontrer l'intégrabilité d'une fonction sur I, on raisonne donc sur la fonction $|g|$.

  En particulier, si g est à valeurs complexes, la notation $|g|$ désigne le module de la fonction g.

Ainsi, même si une fonction g est à valeurs complexes, la question de l'intégrabilité revient `TOUJOURS` à une démonstration de convergence d'une intégrale d'une fonction à valeurs réelles (positives).

II. Théorème d'interversions

II.1. Interversion des symboles d'intégration et de limite

II.1.a) Interversion des symboles $\displaystyle\int_I$ et $\displaystyle\lim_{x\to a}$

Théorème 1.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

où :

× *$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.*
(on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

× *$h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.*
(on introduit, pour tout $t \in I$ et $x \in A$, les fonctions $\underline{h}_x : t \mapsto h(x,t)$ et $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$)

(i) $\boxed{\textit{Caractère } \mathscr{C}^0 \textit{ - étude « en } x \textit{ »}}$

- *Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur A.*

(ii) $\boxed{\textit{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textit{ »}}$

- *Il existe une fonction φ* **intégrable sur** *I telle que :*

$$\forall x \in A, \forall t \in I,\ |\, \underline{h}_t(x) \,| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur A.

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (a,b) \in A^2, \text{ Il existe une fonction } \varphi \text{ intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \forall x \in [a,b], \forall t \in I,\ |\, \underline{h}_t(x) \,| \leqslant \varphi(t) \end{array}}$$

- Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]$ produit une fonction φ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'hypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a, \beta|$ où β est la borne haute de A. Évidemment, on peut aussi travailler sur $|\alpha, b]$ si l'expression de φ n'utilise que b.
- Ce théorème doit être compris comme une machine à intervertir les symboles $\lim$ et $\displaystyle\int$. En effet, pour tout $a \in A$:

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\lim_{x\to a} \int_I h(x,t)\ dt & = & \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) & \\ & = & f(a) & \textit{(car } f \textit{ est continue en } a \in A\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_I h(a,t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_I \underline{h}_t(a)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_I \left(\lim_{x\to a} \underline{h}_t(x) \right)\ dt & \textit{(car } \underline{h}_t \textit{ est continue en } a \in A\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_I \left(\lim_{x\to a} h(x,t) \right)\ dt & \end{array}$$

On peut ainsi conclure :

$$\boxed{\forall a \in A,\ \lim_{x\to a} \int_I h(x,t)\ dt \ = \ \int_I \ \left(\lim_{x\to a} h(x,t)\right) \ dt}$$

- Rappelons qu'on a noté $A = |\alpha, \beta|$. Ce théorème permet d'intervertir les symboles $\lim\limits_{x\to a}$ et $\displaystyle\int_I$ pour tout $a \in A$. Si A est de la forme $]\alpha, \beta|$ (dans ce cas, $\alpha \notin A$), on peut se poser la question de savoir si on peut intervertir les symboles $\lim\limits_{x\to\alpha}$ et $\displaystyle\int_I$.
  De manière similaire, si A est de la forme $|\alpha, \beta[$ (dans ce cas, $\beta \notin A$), on peut se demander si on peut intervertir les symboles $\lim\limits_{x\to\beta}$ et $\displaystyle\int_I$.
  En résumé, peut-on intervertir les symboles lorsque l'on considère la limite en une borne de A non contenue dans A ? C'est l'objet du théorème de convergence dominée à paramètre continu.

II.1.b) Interversion des symboles $\displaystyle\int_I$ et $\lim\limits_{x\to\alpha}$

Théorème 2.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $]\alpha, \beta|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

où :

× *$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.*
(on pourra noter $I = |c, d|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

× *$h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.*
(on introduit, pour tout $t \in I$ et $x \in A$, les fonctions $\underline{h}_x : t \mapsto h(x,t)$ et $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)$)

(i) $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } x \text{ »}}$

- *Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t$ admet une limite finie $\ell(t)$ en α.*
  ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{x\to\alpha} \underline{h}_t(x) = \ell(t)$)

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- *Il existe une fonction φ* **intégrable sur** *I telle que :*

$$\forall x \in A, \forall t \in I,\ |\,\underline{h}_t(x)\,| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

× *la fonction $\ell : I \to \mathbb{K}$ est intégrable sur I.*

× *la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ admet une limite finie en α définie par :*

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \int_I h(x,t)\ dt \ = \ \int_I \ \left(\lim_{x\to\alpha} h(x,t)\right) \ dt}$$

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{1+t^2}\ dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Justifier que f tend vers 0 en $+\infty$.

II.2. Dérivation sous le symbole d'intégration

Théorème 3.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On considère la fonction :

$$f \ : \ A \to \mathbb{K}$$
$$x \mapsto \int_I h(x,t)\ dt$$

où :

× *$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.*

× *$h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.*

(i) *Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en x »*

- *Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.*
- *On détermine $\underline{h}_t'$ (dérivée « en x »).*

(ii) *Intégrabilité (par domination) - étude « en t »*

- *Intégrabilité (sans forcément dominer)*

  0. *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x)$ est intégrable sur I.*

- *Intégrabilité par domination*

  1. *Il existe une fonction φ* **intégrable sur** *I telle que :*

$$\forall x \in A, \forall t \in I,\ \left| \underline{h}_t'(x) \right| \leqslant \varphi(t)$$

$$\left(\text{ce qui s'écrit :} \forall x \in A, \forall t \in I,\ \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t)\right)$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.

De plus : $\boxed{\forall x \in A,\ f'(x) = \displaystyle\int_I \underline{h}_t'(x)\ dt}$ $\left(= \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\ dt\right)$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall (a,b) \in A^2, \text{ il existe une fonction } \varphi \text{ intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \forall x \in [a,b], \forall t \in I,\ \left| \underline{h}_t'(x) \right| \leqslant \varphi(t)\end{array}}$$

Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a, b]$ produit une fonction φ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'hypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a, \beta|$ où β est la borne haute de A. Évidemment, on peut aussi travailler sur $|\alpha, b]$ si l'expression de φ n'utilise que b.

Exercice 2 *(d'après* `CCINP 2019 - PSI`*)*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)}\ dt$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.

4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Exercice 3 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Énoncer le théorème sous le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

b) Résoudre (E).

Exercice 4 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*
On pose : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\ dt$.

2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3. Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 5 *(d'après* `CCINP 2016 - MP`*)*

1. ***a)*** Soit $x \in]0,+\infty[$.
Démontrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) On note alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ dt$$

(fonction Gamma d'Euler)

Démontrer : $\forall x \in]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0$.

c) Démontrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 6 *(d'après* `CCINP 2015 - PSI`*)*

1. **L'intégrale de Gauss**

a) Montrer que l'intégrale de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est convergente sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ dt\right)^2,\ G(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2\,(t^2+1)}}{t^2+1}\ dt$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, puis préciser les dérivées d'ordre 1 de F et de G.

c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F'(x) + G'(x) = 0$$

et en déduire la valeur de $F + G$.

d) Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

e) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. **Les fonctions u et v**

a) Montrer que les fonctions :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\ \cos(t\,x)}{\sqrt{x}}\ dx \quad \text{et} \quad v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\ \sin(t\,x)}{\sqrt{x}}\ dx$$

sont bien définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *(d'après* `CCINP 2020 - PSI`*)*

Pour $x > 0$, on note : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx}\, dt$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin(t)\, dt$ et $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(t)\, dt$.

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|\sin(t)| \leqslant t$.

2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de G.

5. Trouver une expression simple pour G et pour H.
(on pourra calculer $H(x) + iG(x)$)

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(\alpha t)\, dt$.

6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Exercice 8 *(d'après* `Centrale 2023 - PSI`*)*

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2}}{t^2+1}\, dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

4. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\, g'(x)\ g(x)$.

6. Vérifier : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \big(g(x)\big)^2$.

7. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$, puis conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}\, dt$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et étudier les variations de f.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 10

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et démontrer que f est continue sur ce domaine de définition.

2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x\ \ln(t)}{\left(1+t^x\right)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt$$

En déduire le sens de variation de f.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

II.3. Dérivation k fois sous le symbole d'intégration

Théorème 4.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (formellement A est de la forme $|\alpha, \beta|$ où $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On considère la fonction :

$$f \; : \; \begin{array}{ccl} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt \end{array}$$

où :

× *$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.*

× *$h : A \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables réelles définie sur $A \times I$.*

(i) $\boxed{\textit{Caractère } \mathscr{C}^k \textit{ - étude « en } x \textit{ »}}$

- *Pour tout $t \in I$, la fonction $\underline{h}_t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.*
- *On détermine alors les dérivées successives $\underline{h}_t^{(1)}, \ldots, \underline{h}_t^{(k)}$.*

(ii) $\boxed{\textit{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textit{ »}}$

- *Intégrabilité (sans forcément dominer)*

  0. *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x)$ est intégrable sur I.*

  1. *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(1)}(x)$ est intégrable sur I.*

  ...

  k-1. *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(k-1)}(x)$ est intégrable sur I.*
- *Intégrabilité par domination*

  k. *Il existe une fonction φ* **intégrable sur** *I telle que :*

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ \left| \underline{h}_t^{(k)}(x) \right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A.

De plus : $\boxed{\forall j \in [\![0, k-1]\!], \forall x \in A, \ f^{(j)}(x) = \displaystyle\int_I \underline{h}_t^{(j)}(x)\ dt}$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Ce dernier théorème peut être utilisé pour démontrer qu'une fonction f définie par une intégrale à paramètre est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A. Pour ce faire, on démontre que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11 *(d'après* `CCINP 2023 - PSI`*)*
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \int_0^\pi \cos\big(x \sin(t)\big)\ dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n \ = \ \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\ dt$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III. Suites et séries de fonctions intégrables (retour)

III.1. Théorème de convergence dominée

Théorème 5.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \displaystyle\int_I h_n(t)\ dt$ *où :*

× $I \subset \mathbb{R}$ *est un intervalle réel.*
(on pourra noter $I = |c, d|$ *où* $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*)*

× *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $h_n : I \to \mathbb{K}$ *est une fonction définie sur* I *(on définit une suite de fonctions* (h_n)*).*

Soit $h : I \to \mathbb{K}$ *une fonction.*

(i) *Existence d'une limite finie - étude « en n »*

- *La suite de fonctions* (h_n) *converge simplement sur* I *vers la fonction* h.
  $\left(\forall t \in I, \ \lim\limits_{n \to +\infty} h_n(t) = h(t) \right)$

(ii) *Intégrabilité (par domination) - étude « en t »*

- *Il existe une fonction* φ **intégrable sur** I *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \ |\, h_n(t) \,| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

× *la fonction* h *est intégrable sur* I.

× *la suite* $\left(\displaystyle\int_I h_n(t)\ dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ *admet une limite finie en* $+\infty$ *définie par :*

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n \ = \ \lim_{n \to +\infty} \int_I h_n(t)\ dt \ = \ \int_I \left(\lim_{n \to +\infty} h_n(t) \right)\ dt \ = \ \int_I h(t)\ dt}$$

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel que, « pour l'application pratique de ces énoncés, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux ». On se permet donc, dans ce cours, de placer entre parenthèses les hypothèses relatives à la continuité par morceaux.
- Dans le chapitre sur les suites et séries de fonctions, on a vu le théorème d'interversion de symboles suivant :

> Soient (f_n) une suite de fonctions et f une fonction définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
>
> Supposons que :
>
> × pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,
>
> × la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.
>
> Alors :
>
> $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt \ = \ \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\ dt \ = \ \int_a^b f(t)\ dt}$$

Il est alors légitime de se poser la question du théorème à utiliser en pratique. Remarquons tout d'abord que le théorème d'interversion par hypothèse de convergence uniforme ne s'applique que dans le cas **d'intégrales sur un segment**. Ainsi :

× dans le cas d'une intégrale généralisée, on raisonnera exclusivement à l'aide du théorème de convergence dominée.

× dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte de l'exercice peut amener à utiliser l'un ou l'autre des énoncés.

- Pour compléter le dernier point, il faut aussi remarquer que le théorème de convergence dominée présente des hypothèses très faibles. En réalité, on peut démontrer que si le théorème d'interversion par convergence uniforme s'applique, alors le théorème de convergence dominée s'applique. En effet, si l'on suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur un segment $[a, b]$ vers une fonction f alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b],\ |f_n(t)| &= \left| \big(f_n(t) - f(t)\big) + f(t) \right| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} + \|f\|_{\infty,[a,b]} \end{aligned}$$

  Or : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \leqslant 1$$

  Il suffit alors de considérer la fonction $\varphi : t \mapsto 1 + \|f\|_{\infty,[a,b]}$ qui est intégrable sur le segment $[a, b]$ car constante.
- Finalement :

L'interversion par convergence uniforme s'applique	$\Rightarrow$	L'interversion par convergence dominée s'applique
L'interversion par convergence uniforme ne s'applique pas	$\Leftarrow$	L'interversion par convergence dominée ne s'applique pas

`À RETENIR`

- Dans le cas d'une intégrale généralisée, on travaillera exclusivement à l'aide du théorème de convergence dominée.
- Dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte doit guider le choix du théorème.
- Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont les moins exigeantes.

Exercice 12 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\,dt$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 13 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^n}\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.

2. ***a)*** Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 14 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + n^2\,x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

2. Soit $a \in \,]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 15

Déterminer les limites des suites (I_n) dont le terme général est :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + \mathrm{e}^x}$ ***2.*** $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^{\frac{1}{n}}\,dx$ ***3.*** $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^n}$

III.2. Théorème d'intégration terme à terme

Théorème 6.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

(i) *Existence d'une limite finie - étude « en n »*

- *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*
  ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$)

(ii) *Intégrabilité - étude « en t »*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.*

(iii) *Hypothèse spécifique*

- *La série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\, f_n(t) \,|\ dt$ converge.*

Alors :

× *la fonction S est intégrable sur I.*

× *la suite $\left(\displaystyle\int_I S_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie définie par :*

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt &= \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t) \right)\ dt \\ &= \int_I S(t)\ dt \\ &= \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)\ dt \end{aligned}}$$

ou encore :

$$\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\ dt \right)}$$

Exercice 16 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n\ t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

1. a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\ dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right|\ dt$.

b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\ t^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t} \right)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 17 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \mapsto t^n\ \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\ \ln(t)\ dt$.

2. Prouver que $f : t \mapsto \mathrm{e}^t\ \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t\ \ln(t)\ dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ n!}$$

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Exercice 18

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1 - t^2}\ dt \ = \ -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 19

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\ \mathrm{e}^{-nt}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^n\ \ln(n)}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)$.

Exercice 20

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1 - t^2}\ dt \ = \ -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Remarque

- Dans les chapitres sur les suites et séries de fonctions, on a vu le théorème d'interversion de symboles suivant :

> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
>
> Supposons que :
>
> × $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,
>
> × la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
>
> Alors :
>
> $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ dt\right) \ = \ \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)\ dt}$$

- Il est, là aussi, légitime de se poser la question du théorème à utiliser en pratique. La remarque précédente s'applique :
  - × dans le cas d'une intégrale généralisée, on raisonnera exclusivement à l'aide du théorème d'intégration terme à terme.
  - × dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte de l'exercice peut amener à utiliser l'un ou l'autre des énoncés.

- Dans le cas où la série numérique $\sum \int_I |\, f_n(t) \,|\ dt$ diverge, on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On pourra alors tenter d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n) des sommes partielles associée à la série de fonctions $\sum f_n$:

> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
>
> ***(i)*** $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } n \text{ »}}$
>
> - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I
> ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$)
>
> ***(ii)*** $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$
>
> - Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I,\ |\, S_n(t) \,| \leqslant \varphi(t)$$
>
> Alors :
>
> $\times$ la fonction S est intégrable sur I.
>
> $\times$ la suite $\left(\displaystyle\int_I S_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie définie par :
>
> $$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt &= \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right)\ dt \\ &= \int_I S(t)\ dt = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt \end{aligned}}$$
>
> ou encore : $\boxed{\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\ dt\right)}$

Exercice 21

On étudie dans cet exercice deux cas où le théorème de convergence dominée ne s'applique pas.

1. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n\ t^{n+a}$.
Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t)\ dt\right)$.

2. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n\ t^{a\,n}$.
Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t)\ dt\right)$.