CH IV : Intégration - rappels et compléments

I. Intégration sur un segment

I.1. Primitives sur un intervalle I

I.1.a) Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
  a) F est dérivable sur I.
  b) $F' = f$.

I.1.b) Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

La fonction f est continue sur l' **intervalle** *I*	$\Rightarrow$	*La fonction f admet une primitive sur I*

Démonstration.
Voir le cours de première année. □

Bref rappel de la démonstration

- L'idée est de construire une primitive sur I de la fonction f. Un candidat intéressant est la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array}$$

où $a \in I$. Mais encore faudrait-il donner un sens à ce symbole d'intégrale ! Cette définition précise est donnée en première année.

- Rappelons brièvement cette construction :

1) on définit les fonctions en escalier sur $[a, b]$. Une telle fonction est une fonction constante sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ (avec $i \in [\![0, n-1]\!]$) d'une subdivision $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_i < \ldots < a_n = b$ du segment $[a, b]$. On note alors $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$, ainsi que :

$$\mathscr{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a, b],\ \varphi(x) \leqslant f(x)\}$$

$$\text{et} \qquad \mathscr{E}^+(f) = \{\psi \in \mathscr{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a, b],\ f(x) \leqslant \psi(x)\}$$

où $\mathscr{E}^-(f)$ (resp. $\mathscr{E}^+(f)$) est l'ensemble des fonctions en escalier qui sont des sous-approximations (resp. sur-approximations) de f sur $[a, b]$

2) on définit la notion d'intégrale pour des fonctions en escalier comme somme des aires des rectangles formés par l'écart d'une telle fonction à l'axe des abscisses sur une subdivision adaptée.

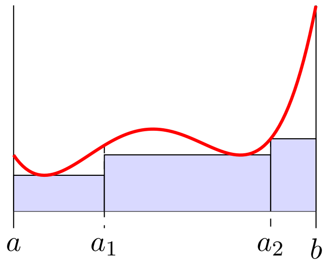
3) on démontre que l'ensemble des fonctions en escalier sur un segment $[a, b]$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ (ce qui signifie que l'on peut approcher d'aussi près que l'on veut une fonction continue sur un segment par une fonction en escalier sur ce segment),

4) l'intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment est alors définie comme la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de l'ensemble $I^-(f)$ (resp. $I^+(f)$) constitué des intégrales des fonctions en escalier qui sont des sous-approximations (resp. sur-approximations) de cette fonction.

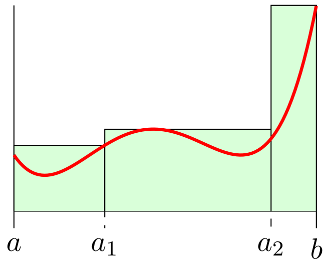
$$I^-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(t)\ dt \mid \varphi \in \mathscr{E}^-(f) \right\}$$

$$\text{et} \qquad I^+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(t)\ dt \mid \psi \in \mathscr{E}^+(f) \right\}$$

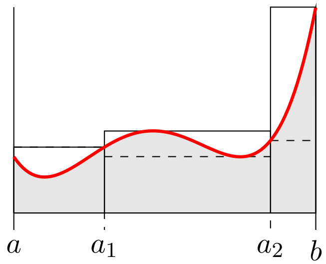
Représentation graphique.



Sous-approximation de l'aire sur la subdivision $\mathscr{S} : (a_0, a_1, a_2, a_3)$



Sur-approximation de l'aire sur la subdivision $\mathscr{S} : (a_0, a_1, a_2, a_3)$



L'aire sous la courbe sur le segment $[a, b]$ est comprise entre $m(f, \mathscr{S})$ et $M(f, \mathscr{S})$ pour la subdivision $\mathscr{S}$

I.1.c) Une fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives

Théorème 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.

Soit F une primitive de f sur I et soit $c \in I$.

1) *G est une primitive de f sur I* $\Leftrightarrow$ *Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + \lambda$*

2) *Il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en c.*
C'est la fonction $x \mapsto F(x) - F(c)$.

Démonstration.

1) $(\Rightarrow)$ Soit G est une primitive de f sur I et soit $x \in I$. Par définition :

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

On en déduit que $F'(x) - G'(x) = 0$ ou encore : $(F - G)'(x) = 0$.
La dérivée de $F - G$ étant nulle sur I, la fonction $F - G$ est constante sur cet intervalle :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ (F - G)(x) = \lambda$$

$(\Leftarrow)$ Si $G = F + \lambda$, alors G est dérivable sur I car F l'est. De plus :

$$\forall x \in I,\ G'(x) = F'(x) = f(x)$$

et G donc une primitive de f sur I.

2) Soit G une primitive de f sur I.
D'après le point précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$G(x) = F(x) + \lambda$$

Si G s'annule en c, on obtient : $G(c) = F(c) + \lambda = 0$ et donc $\lambda = -F(c)$.

□

I.2. Intégrale fonction de ses bornes

Théorème 3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** *sur un intervalle I.*

Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une prmitive de F sur I.

Soit $c \in I$.

$$\boxed{\text{La fonction } \begin{array}{rccc} H & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt \end{array} \text{ est la primitive de } f \text{ sur } I \text{ qui s'annule en } c.}$$

(Ainsi, pour tout $x \in I$, $H(x) = F(x) - F(c)$)

1) En particulier, la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et de dérivée f.

$$\boxed{\forall x \in I,\ H'(x) = F'(x) = f(x)}$$

2) Si de plus $u, v : J \to I$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle J, alors les fonctions :

$$H_1 : x \mapsto \int_c^{v(x)} f(t)\ dt, \quad H_2 : x \mapsto \int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt, \quad H_3 : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$$

sont dérivables sur J. De plus, pour tout $x \in J$:

$$H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x)), \quad H_2'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$

$$H_3'(x) = v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x))$$

Démonstration.

Comme f est continue sur I, elle admet une primitive F sur I.

1) Pour $x \in I$: $\displaystyle\int_c^x f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^x = F(x) - F(c)$.

Ainsi $H : x \mapsto F(x) - F(c)$ et H est la primitive de f sur I qui s'annule en c (*cf* Théorème 2).
En particulier, la fonction H est dérivable sur I.
Sa dérivée f étant continue sur I, la fonction H est $\mathscr{C}^1$ sur I.

2) • Remarquons tout d'abord que, pour tout $x \in J$:

$$H_1(x) = \int_c^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^{v(x)} = F(v(x)) - F(c)$$

La fonction $x \mapsto F(v(x))$ est dérivable sur J car c'est la composée de :

× v, dérivable sur J. De plus, $v(J) \subset I$.

× F, dérivable sur I.

Par la formule de dérivation d'une composée, on obtient :

$$\forall x \in J,\ (F \circ v)'(x) = F'(v(x)) \times v'(x) = f(v(x)) \times v'(x)$$

et ainsi : $\forall x \in J,\ H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x))$.

• De même : $\displaystyle\int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{c} = F(c) - F(u(x))$.

La fonction $H_2 : x \mapsto F(c) - F(u(x))$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J,\ H_2'(x) = -F'(u(x)) \times u'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$

• Enfin : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$.

La fonction $H_3 : x \mapsto F(v(x)) - F(u(x))$ est dérivable sur J et :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in J,\ H_3'(x) & = & F'(v(x)) \times v'(x) - F'(u(x)) \times u'(x) \\ & = & v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x)) \end{array}$$

□

I.3. Calcul de primitives « à vue »

Principe.
Il s'agit ici de calculer une intégrale en devinant une de ses primitives. Autrement dit, il faut être capable de voir la fonction f à intégrer comme la dérivée d'une autre fonction.

Exemple

- $\displaystyle\int_0^1 5\ dt = [\ 5\ t\ ]_0^1 = 5\,(1-0) = 5$

- $\displaystyle\int_0^1 t^2\ dt = \left[\ \frac{1}{3}\ t^3\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}\,(1-0) = \frac{1}{3}$

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{t}\ dt &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\ dt \\ &= \left[\ \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\ [\ t\ \sqrt{t}\ ]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\ (1-0) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{1}{t}\ dt = [\ \ln(|t|)\ ]_{-1}^{-2} = \ln(|-2|) - \ln(|-1|) = \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$

- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\ dt = [\ \mathrm{e}^t\ ]_0^1 = (\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0) = \mathrm{e}^1 - 1$

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^3}\ dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 2t\ (t^2+1)^{-3}\ dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \frac{(t^2+1)^{-2}}{-2}\ \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4}\left[\ \frac{1}{(t^2+1)^2}\ \right]_0^1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{16}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\ dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 2t\ (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\ dt \\ &= \cancel{\frac{1}{2}}\left[\ \frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}}\ \right]_0^1 \\ &= \left[\ \sqrt{t^2+1}\ \right]_0^1 \\ &= \sqrt{2}-\sqrt{1}\ =\ \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)}\ dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)}\ dt \\ &= \frac{1}{2}\ [\ \ln(|t^2+1|)\ ]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ (\ln(2) - \cancel{\ln(1)})\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}\ dt &= -\int_1^2 \frac{-1}{t^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\ dt \\ &= -\left[\ \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\ \right]_1^2 \\ &= -\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{1}}\right) \\ &= \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

Primitives classiques.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{-*}$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$

(où λ est un réel quelconque)

Remarque

Il ne faut pas confondre x^α (avec $\alpha \neq -1$) et a^x (avec $a > 0$) :

× pour tout $x > 0$: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.

× pour tout $x \in \mathbb{R}$: $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	× u dérivable sur I. × $u \neq 0$ sur I.	$x \mapsto \ln(\vert u(x)\vert) + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$

Remarque

- Il faut penser à la forme $x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ dès que la fonction à intégrer contient une puissance. Par exemple :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\,dt &= \int_0^1 \frac{t}{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left[\frac{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}}\right]_0^1 = \Big[\sqrt{t^2+2}\,\Big]_0^1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

- Cette primitive classique est parfois présentée sous la forme suivante :

$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{(u(x))^\beta}$ (avec $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto -\dfrac{1}{\beta-1}\,\dfrac{1}{(u(x))^{\beta-1}} + \lambda$

II. Extension de la notion d'intégrale

II.1. Extension à des fonctions à valeurs complexes

Théorème 4.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction d'une variable réelle et à valeurs complexes.

1) $\boxed{f \text{ est continue sur } [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont continues sur } [a,b]}$

2) Si c'est le cas, on définit alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$$

Application

Primitive des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\ \cos(bx)$.

II.2. Extension au cas des fonctions continues par morceaux

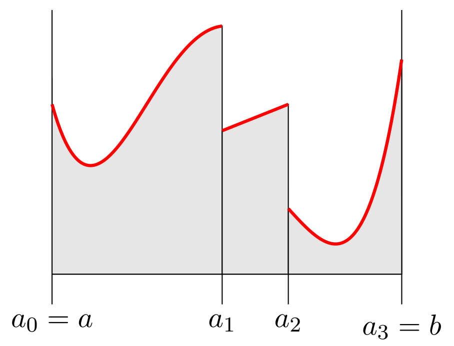
Définition

- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un segment $[a,b]$
- On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:
  - × f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
  - × f admet une limite à droite finie en a_i,
  - × f admet une limite à gauche finie en a_{i+1}.
- On peut alors, pour tout intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, considérer la fonction $\tilde{f}_i$ obtenue par prolongement par continuité de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ apparaît alors comme somme d'intégrales de fonctions continues sur un segment, ce qui démontre la bonne définition d'un tel objet :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t)\ dt}$$

- Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle I réel si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.
  On note $\mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Représentation graphique.



Remarque

- La fonction inverse est continue par morceaux sur $]0,1]$ car elle est continue par morceaux sur tout segment $[a,1]$ (où $a \in]0,1]$).
- On note f la fonction définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

  La fonction f n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.
- La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions continues sur un intervalle I sont continues par morceaux sur I.
- L'ensemble $\mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, stable par multiplication.
- Une fonction continue par morceaux sur I est aussi continue par morceaux sur tout sous-intervalle de I.

II.3. Extension à des fonctions continues sur $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$

Définition

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** $+\infty$.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ **est convergente** (en $+\infty$) si la fonction :
  $$\begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ dt}$$
  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ **diverge**.
- Soit $f :]-\infty,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]-\infty,b]$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** $-\infty$.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ **est convergente** (en $-\infty$) si la fonction :
  $$\begin{array}{ccc}]-\infty,b] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_x^b f(t)\ dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt \ = \ \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\ dt}$$
  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ **diverge**.
- Soit $f :]-\infty,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en** $-\infty$ **et** $+\infty$.
  - × On dit l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ **est convergente** (à la fois en $-\infty$ et $+\infty$) s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt \ + \ \int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt}$$
  - × Dans le cas contraire, *i.e.* si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ **est divergente**.
  (en pratique, considérer $c = 0$ suffit à conclure : cf remarque suivante)

MÉTHODO : étude de l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ où f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

1) On rappelle que f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

2) On introduit $B \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^{B} f(t)\ dt$, intégrale sur le segment $[a, B]$, admet une limite finie lorsque $B \to +\infty$.
(comme f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, f est aussi continue par morceaux sur $[a, B]$)

3) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exemple

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\ dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto t$ est continue sur $[1, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B t\ dt \ = \ \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^B \ = \ \frac{1}{2}\ \left[\ t^2\ \right]_1^B \ = \ \frac{1}{2}\ (B^2 - 1) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\ dt$ est divergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\ dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto 1$ est continue sur $[0, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^B 1\ dt = [\ t\ ]_0^B = B \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\ dt$ est divergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B \frac{1}{t}\ dt = [\ \ln(|t|)\ ]_1^B = \ln(B) - \cancel{\ln(1)} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3) On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$ est divergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_1^B \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt &= \int_1^B t^{-\frac{3}{2}}\,dt = \left[\,\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\,\right]_1^B = -2\left[\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,\right]_1^B \\ &= -2\left(\frac{1}{\sqrt{B}} - 1\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 2\end{aligned}$$

3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt = 2$.

Penser à faire apparaître les quantités comme des puissances : $\dfrac{1}{t\sqrt{t}} = t^{-\frac{3}{2}}$

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B \frac{1}{t^2}\,dt = \left[\,-\frac{1}{t}\,\right]_1^B = -\left[\,\frac{1}{t}\,\right]_1^B = -\left(\frac{1}{B} - 1\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B \mathrm{e}^{-t}\,dt = \left[\,-\mathrm{e}^{-t}\,\right]_1^B = -\left[\,\mathrm{e}^{-t}\,\right]_1^B = -(\mathrm{e}^{-B} - \mathrm{e}^{-1}) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

II.4. Extension à des fonctions continues sur $[a, b[$ ou $]a, b]$

Définition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

- Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** b.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **est convergente** (en b) si la fonction :
  $$\begin{array}{ccc} [a, b[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers b.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\ dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **diverge**.
- Soit $f :]a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** a.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **est convergente** (en a) si la fonction :
  $$\begin{array}{ccc}]a, b] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_x^b f(t)\ dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers a.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\ dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **diverge**.
- Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en** a **et** b.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **est convergente** (à la fois en a et en b) s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
  (dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in]a, b[$)
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, *i.e.* si, pour tout $c \in]a, b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **diverge**.
  (en pratique, considérer un seul élément $c \in]a, b[$ suffit)

Remarque

Cette définition est analogue à celle d'intégrale impropre en $+\infty$.
L'étude de ces intégrales généralisées est donc similaire à l'étude précédente.

MÉTHODO : étude de l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ où f est continue par morceaux sur $[a, b[$.

1) On rappelle que f est continue par morceaux sur $[a, b[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)$ est donc impropre seulement en b.

2) On introduit $B \in [a, b[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$, intégrale sur le segment $[a, B]$, admet une limite finie lorsque $B \to b$.
(comme f est continue par morceaux sur $[a, b[$, f est aussi continue par morceaux sur $[a, B]$)

3) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exemple

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\ dt$.

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-2}$ est continue sur $[0, 2[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(t)$ est donc impropre seulement en 2.

2) Soit $B \in [0, 2[$. $\displaystyle\int_0^B \frac{1}{t-2}\ dt = [\ \ln(|t-2|)\ ]_0^B = [\ \ln(2-t)\ ]_0^B = \ln(2-B) - \ln(2) \underset{B\to 2}{\longrightarrow} -\infty$

3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\ dt$ est donc divergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$.

1) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)$ est donc impropre seulement en 0.

2) Soit $A \in]0, 1]$.
On procède alors par intégration par parties (IPP).
(on y reviendra plus tard dans le chapitre)

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) = 1 & v(t) = t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[A, 1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^1 \ln(t)\ dt &= [\ t\ln(t)\ ]_A^1 - \int_A^1 1\ dt \\ &= -A\ \ln(A) - (1-A) \\ &= A - A\ \ln(A) - 1 \underset{A\to 0}{\longrightarrow} -1 \end{aligned}$$

3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$ est donc convergente.
De plus : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt = -1$.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)$ est donc impropre seulement en 0.

  2) Soit $A \in\ ]0,1]$.
  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) = t & v(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[A,1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^1 t\ \ln(t)\ dt &= \left[\ \frac{t^2}{2}\ \ln(t)\ \right]_A^1 - \frac{1}{2}\int_A^1 t\ dt \\ &= -\frac{A^2}{2}\ \ln(A) - \frac{1}{2}\left[\ \frac{t^2}{2}\ \right]_A^1 \\ &= -\frac{A^2}{2}\ \ln(A) - \frac{1}{4}\ \left[\ t^2\ \right]_A^1 \\ &= \frac{1}{4}\ A^2 - \frac{1}{2}\ A^2\ \ln(A) - \frac{1}{4} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

  En effet : $\displaystyle\lim_{A\to 0} A^2\ \ln(A) = \lim_{A\to 0} A \times A\ \ln(A) = 0$.

  3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$ est donc convergente.
  De plus : $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt = -\frac{1}{4}$.

Remarque

- Comme $t\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut prolonger la fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ par continuité en posant $f(0) = 0$. En notant toujours f la fonction ainsi prolongée, l'objet $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ n'est plus une intégrale impropre mais l'intégrale sur un segment de la fonction f continue sur $[0,1]$.

  De telles intégrales sont appelées **intégrales faussement impropres**.

- Ce constat permet de démontrer que l'objet $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est bien défini. Toutefois, cela ne permet pas de connaître la valeur de cette intégrale. Si l'énoncé exige cette valeur, il est nécessaire d'effectuer l'étape *2)* (on introduit $x \in\ ]0,1]$, on travaille sur une intégrale sur un segment et on détermine la limite lorsque $x \to 0$).

II.5. Extension à des fonctions continues sur un intervalle quelconque

II.5.a) Intervalle ouvert quelconque

On a vu précédemment la notion d'intégrale impropre en ∞ et la notion d'intégrale impropre en un point. On peut aussi considérer des intégrales impropres à la fois en un point et en l'infini.

Définition

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

- Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre à la fois en a et b**.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **est convergente** (à la fois en a et en b) s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ sont toutes deux convergentes.
    (dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in]a, b[$)
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donnée par :
    $$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt}$$
  - × Dans le cas contraire, *i.e.* si, pour tout $c \in]a, b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **diverge**.
    (en pratique, considérer un seul élément $c \in]a, b[$ suffit)

Remarque

Cette définition recouvre tous les cas précédents d'intégrale doublement impropre. L'étude de telles intégrales s'effectue donc de manière similaire.

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.

2) • Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$.

(i) La fonction f est continue sur $]0, 1]$.

(ii) Soit $A \in]0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\int_A^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt &= -\int_A^1 \frac{-1}{2\sqrt{t}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\, dt \\
&= -\left[\, \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\, \right]_A^1 \\
&= -(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-\sqrt{A}}) \\
&= \mathrm{e}^{-\sqrt{A}} - \frac{1}{\mathrm{e}} \underset{A \to 0}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

(iii) On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$ est convergente.
De plus : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

- Étudions maintenant la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$.

  (i) La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$.

  (ii) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_1^B \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt &= -\left[\ e^{-\sqrt{t}}\ \right]_1^B \\ &= -(e^{-\sqrt{B}} - e^{-1}) \\ &= \frac{1}{e} - e^{-\sqrt{B}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}\end{aligned}$$

  (iii) On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{e}$.

3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt &= \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} \\ &= 1\end{aligned}$$

III. Calcul des intégrales impropres convergentes

Afin de calculer la valeur d'intégrales impropres convergentes, il est souvent avantageux de se ramener à un calcul d'intégrales sur un segment, suivi d'un passage à la limite.

III.1. Primitive à vue d'une intégrale impropre : un exemple

Exemple

- Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

  2) Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\, dt &= \int_0^B e^t\ (1+e^t)^{-2}\, dt \\ &= \left[\ \frac{(1+e^t)^{-1}}{-1}\ \right]_0^B \\ &= -\left[\ (1+e^t)^{-1}\ \right]_0^B \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

  3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\, dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\, dt = \frac{1}{2}$.

- Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ est continue sur $[0, \sqrt{2}[$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} f(t)$ est donc impropre seulement en $\sqrt{2}$.

  2) Soit $B \in [0, \sqrt{2}[$.

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt &= -\frac{1}{2}\int_0^B (-2t)\ (2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt \\ &= -\frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{(2-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]_0^B \\ &= -(\sqrt{2-B^2}-2) \underset{B\to\sqrt{2}}{\longrightarrow} 2\end{aligned}$$

  3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt = 2$.

III.2. Intégration par parties

III.2.a) Notion de « crochet généralisé »

Définition

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur $I = [a, b[$ (resp. $]a, b[$ ou $]a, b]$).

- Cas $I = [a, b[$: si la fonction f admet une limite finie en b, on note :

$$[\ f(t)\ ]_a^b \ = \ \lim_{t\to b} f(t) - f(a)$$

- Cas $I =]a, b]$: si la fonction f admet une limite finie en a, on note :

$$[\ f(t)\ ]_a^b \ = \ f(b) - \lim_{t\to b} f(t)$$

- Cas $I =]a, b[$: si la fonction f admet une limite finie en a et une limite finie en b, on note :

$$[\ f(t)\ ]_a^b \ = \ \lim_{t\to b} f(t) - \lim_{t\to a} f(t)$$

Si l'un ou l'autre de ces cas est vérifié, on dit que le crochet généralisé est convergent. Dans le cas contraire, on dit qu'il est divergent.

III.2.b) Intégration par parties d'une intégrale généralisée

Théorème 5.

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soient $u, v : I \to \mathbb{K}$ *deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur l'intervalle réel* $I = [a, b[$ *(resp.* $]a, b]$ *ou* $]a, b[$*).*

1) *En cas de convergence des trois termes en présence :*

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt = [\ u(t)\ v(t)\ ]_a^b - \int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt}$$

Ce qu'on peut lire :

$$\boxed{\int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt = [\ u(t)\ v(t)\ ]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt}$$

2) *De plus, si deux de des trois termes ci-dessous sont convergents, alors il en est de même du troisième.*
En particulier, si le crochet converge, alors les deux intégrales ont même nature (toutes les deux divergentes `OU` *toutes les deux convergentes).*

Remarque

- Afin de faciliter l'écriture de l'intervalle $[a, b[$ (resp. $]a, b]$ ou $]a, b[$), on a supposé $a < b$. Cette hypothèse n'est en réalité utile que pour les résultats mettant en jeu des inégalités (croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire). On peut donc écrire une intégration par parties pour une intégrale généralisée $\displaystyle\int_{+\infty}^0 \dots\ dt$ (pour peu que les termes en présence convergent).
- Profitons-en pour rappeler que si f est continue sur $[a, b]$ alors :

$$\int_b^a f(t)\, dt\ =\ [\ F(t)\ ]_b^a\ =\ F(a) - F(b)\ =\ -(F(b) - F(a))\ =\ -\int_b^a f(t)\, dt$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Ce résultat est aussi valable sur les intégrales généralisées convergentes (si l'intégrale est impropre en b, on écrit l'égalité précédente en remplaçant x par b et on considère alors la limite lorsque x tend vers b).

- Le programme officiel précise : « *On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés.* ».

  Cela signifie qu'il n'y aura jamais de point de barème accordé au fait que les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$. Pour autant, il faut quand même signaler, avant l'écriture d'une intégration par parties d'une intégrale généralisée, que les termes en présence convergent.

Démonstration.

- La fonction uv est $\mathscr{C}^1$ sur I comme produit de deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur I.
  De plus :
$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$
- Ainsi, la fonction $u\,v$ est une primitive sur I de $u'\,v + u\,v'$.
  Cette dernière fonction est continue sur $[a, b]$ par somme/produit de fonctions continues sur $[a, b]$ (comme u est de classe $\mathscr{C}^1$, u' est de classe $\mathscr{C}^0$).
- On en déduit :
$$\int_a^b (u'v + uv')(t)\ dt = [\ u(t)\, v(t)\ ]_a^b$$
- Enfin, par linéarité de l'intégrale :
$$\int_a^b (u'v + uv')(t)\ dt = \int_a^b (u'v)(t)\ dt + \int_a^b (uv')(t)\ dt$$

□

Remarque

Effectuer une IPP consiste donc à écrire la fonction dont on doit calculer l'intégrale comme un produit de deux fonctions $(u \times v')$:

× dont l'une sera dérivée ($u \rightsquigarrow u'$),

× et l'autre sera intégrée ($v' \rightsquigarrow v$).

III.2.c) Nature et calcul d'une intégrale généralisée via une intégration par parties : illustration sur un exemple

Exemple

Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \dfrac{1}{t} & u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \\[2ex] v'(t) = \dfrac{1}{t^2}\, e^{\frac{1}{t}} & v(t) = -e^{\frac{1}{t}} \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^B \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\, dt &= \left[-\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} \right]_1^B - \int_1^B \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt \\ &= \left(e^1 - \frac{e^{\frac{1}{B}}}{B} \right) - \left[-e^{\frac{1}{t}} \right]_1^B \\ &= \left(\cancel{e^1} - \frac{e^{\frac{1}{B}}}{B} \right) - \left(\cancel{e^1} - e^{\frac{1}{B}} \right) \\ &= e^{\frac{1}{B}} - \frac{e^{\frac{1}{B}}}{B} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

3) On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.

Remarque

- Tout le calcul précédent est présenté à l'aide d'intégrales de fonctions continues sur un segment. Il ne requiert donc pas de démonstration de convergence.
- Rappelons que l'écriture :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\, dt = \left[-\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt$$

requiert quant à elle la justification **préalable** de convergence des trois termes en présence. Cela a tendance à conduire à une rédaction inutilement lourde.

Exemple

- $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\, dt = [\, t\ln(t)\,]_1^2 - \int_1^2 1\, dt = 2\ln(2) - 1$
- $\displaystyle\int_1^2 t^2 \ln(t)\, dt = \frac{1}{3} [\, t^3 \ln(t)\,]_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 t^2\, dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 t^k \ln(t)\, dt = \frac{1}{k+1} \left[\, t^{k+1} \ln(t)\, \right]_1^2 - \frac{1}{k+1} \int_1^2 t^k\, dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 (\ln(t))^2\, dt = [\, (\ln(t))^2\,]_1^2 - 2 \int_1^2 \ln(t)\, dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\, dt = -\frac{1}{2} [\, (t^2+1)^{-1} \ln(t)\,]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)}\, dt$

  Or $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$ donc ...
- $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{t^2}\, dt = \frac{1}{2} \left[\, t^2 e^{t^2}\, \right]_0^1 - \int_0^1 t e^{t^2}\, dt = \dots$

$\boxed{\texttt{À RETENIR}}$

Il faut s'empresser de dériver la fonction ln : en la dérivant, on tombe sur le calcul de la primitive d'une fonction rationnelle.

Application : calcul d'une primitive de $\ln$

Soit $x > 0$.

Le calcul précédent fournit la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

$$\int_1^x \ln(t)\ dt = [\ t\ln(t)\ ]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x\ln(x) - (x-1)$$

III.3. Changement de variable dans le cas d'une intégrale généralisée

III.3.a) Rappel de $1^{\text{ère}}$ année : changement de variable pour une intégrale sur un segment

Théorème 6.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur un intervalle I.

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq I$.

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt}$$

Démonstration.

- La fonction f est continue sur l'intervalle I.
  Elle admet donc une primitive F sur I de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt &= [\ F(t)\ ]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= (F\circ\varphi)(\beta) - (F\circ\varphi)(\alpha) = [\ (F\circ\varphi)(t)\ ]_\alpha^\beta\end{aligned}$$

- Par composée, la fonction $F\circ\varphi$ est $\mathscr{C}^1$ sur J. De plus :

$$(F\circ\varphi)' = F'\circ\varphi \times \varphi' = f\circ\varphi\times\varphi'$$

- On en déduit :

$$[\ (F\circ\varphi)(t)\ ]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\times\varphi'(t)\ dt$$

□

Remarque

- Lorsque l'on cherche à calculer une intégrale par changement de variable, on part de l'intégrale de gauche $\left(\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt\right)$ pour obtenir celle de droite $\left(\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt\right)$.
  Généralement l'intégrale de gauche arrive sous la forme $\displaystyle\int_0^1 \dots$ (par exemple).
  (les bornes de l'intégrale sont des valeurs et n'apparaissent pas naturellemnt sous la forme d'images de la fonction φ)
  Il s'agit alors, connaissant φ, de trouver une valeur α (resp. β) telle que $\varphi(\alpha) = 0$ (resp. $\varphi(\beta) = 1$). Il n'est pas nécessaire, pour démontrer le résultat, que la fonction φ soit injective. En conséquence, il peut exister plusieurs valeurs de α (resp. β) telles que $\varphi(\alpha) = 0$ (resp. $\varphi(\beta) = 1$).

- Pour illustrer ce propos, considérons l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{t}\ dt$.
  Appliquons maintenant le théorème précédent avec $\varphi : t \mapsto t^2$.

  $\varphi(t) = t^2$ et $\varphi'(t) = 2\,t$
  - $\varphi(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow (\alpha = 1\ \texttt{OU}\ \alpha = -1)$
  - $\varphi(\beta) = 2 \Leftrightarrow \beta^2 = 2 \Leftrightarrow (\beta = \sqrt{2}\ \texttt{OU}\ \beta = -\sqrt{2})$

  En appliquant le théorème, on aboutit aux intégrales suivantes :

$$\int_1^{\sqrt{2}} |t|\times 2t\ dt \qquad \int_{-1}^{\sqrt{2}} |t|\times 2t\ dt \qquad \int_{-1}^{-\sqrt{2}} |t|\times 2t\ dt \qquad \int_1^{-\sqrt{2}} |t|\times 2t\ dt$$

  Laquelle est « la bonne » ? En réalité, elles sont toutes valides.
  Il n'y a donc pas, a priori, de meilleur choix.

- Afin de fixer l'un des choix précédents, il est assez classique d'exiger que la fonction $\varphi : I \to J$ choisie pour le changement de variable soit une bijection strictement croissante I sur J. Dans ce cas, la question précédente ne se pose plus puisque $\varphi(\alpha)$ admet comme un unique antécédent par φ l'élément α.

Aspect pratique

- Si on se réfère au théorème précédent, un changement de variable est la donnée d'une fonction φ.

  $\hookrightarrow$ calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\varphi : t \mapsto \ln(t)$.

  $$\left|\begin{array}{l} \varphi(t) = \ln(t) \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = \dfrac{1}{t} \\ \bullet\ \varphi(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = e \\ \bullet\ \varphi(\beta) = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta = e^2 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[e, e^2]$.
  On obtient : $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_e^{e^2} \frac{1}{t+1}\,\frac{1}{t}\,dt$.
  On termine ce calcul en remarquant : $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

- Il est fréquent que le cours de physique propose une présentation symbolique du changement de variable. Exposons brièvement cette présentation.

  $\hookrightarrow$ calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = e^t}$

  $$\left|\begin{array}{l} u = e^t \quad \text{donc } t = \ln(u) \qquad \textit{(on voit alors naturellement apparaître la fonction } \varphi : u \mapsto \ln(u)\textit{)} \\ \hookrightarrow du = e^t\ dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{1}{e^t}\,du = \dfrac{1}{u}\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = e^1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = e^2 \end{array}\right.$$

  En remplaçant dt par $\dfrac{1}{u}\,du$ et e^t par u, on obtient :

  $$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u}\,du$$

  ce qui correspond au calcul précédent.

- L'idée du changement de variable est de faire disparaître une partie « gênante » de la quantité $f(t)$. Ainsi, il est relativement fréquent de poser le changement de variable : « u = la racine présente dans l'intégrale ».

  <u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}}$.
  L'idée est de poser « $u = \sqrt{t}$ » et donc $t = u^2$.
  On pose donc le changement de variable $\varphi : t \mapsto t^2$.

  $$\left|\begin{array}{l} \varphi(t) = t^2 \ \text{ donc } \ \varphi'(t) = 2t \\ \bullet\ \varphi(\alpha) = 1 \ \Rightarrow\ \alpha = 1 \\ \bullet\ \varphi(\beta) = 2 \ \Rightarrow\ \beta = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

  On obtient :

  $$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2+t}\,2t\ dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{t}(t+1)}\,2\cancel{t}\ dt \\ &= 2\left[\ \ln(|t+1|)\ \right]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) \end{aligned}$$

- <u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt$.
  L'idée est de poser « $u = \sqrt{1+e^t}$ » et donc $t = \ln(u^2-1)$.
  On pose donc le changement de variable $\varphi : t \mapsto \ln(t^2-1)$.

  $$\left|\begin{array}{l} \varphi(t) = \ln(t^2-1) \ \text{ donc } \ \varphi'(t) = \dfrac{2t}{t^2-1} \\ \bullet\ \varphi(\alpha) = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = \sqrt{2} \\ \bullet\ \varphi(\beta) = 1 \ \Rightarrow\ \beta = \sqrt{1+e} \end{array}\right.$$

  On obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{\cancel{t}}\,\frac{2\cancel{t}}{t^2-1}\,du$.

  On termine ce calcul en remarquant que : $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{t-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{t+1}$.

III.3.b) Changement de variable pour une intégrale impropre

Théorème 7.

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *et* $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ *une fonction continue par morceaux sur* $I = [a, b[$ *(resp.* $]a, b[$ *ou* $]a, b]$*).*

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ *bijection strictement croissante de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]\alpha, \beta[$.

1) Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ *et* $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt$ *sont de même nature.*

2) De plus, en cas de convergence :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt\ =\ \int_\alpha^\beta \big(f \circ \varphi\big)(t)\ \varphi'(t)\ dt}$$

Remarque

- Le fait que l'on travaille sur des intégrales généralisées a une conséquence un peu pénible : on ne peut pas forcément écrire $\varphi(\alpha)$ (si $\alpha = -\infty$ par exemple) ni $\varphi(\beta)$ (si $\beta = +\infty$ par exemple). Généraliser le résultat des fonctions continues sur un segment est donc un peu plus subtil qu'attendu. On pourrait éventuellement remplacer a par $\lim\limits_{x \to \alpha} \varphi(x)$ (resp. b par $\lim\limits_{x \to \beta} \varphi(x)$).
- Le programme officiel fait quant à lui le choix d'ajouter la contrainte que φ soit une bijection strictement croissante. Cette hypothèse permet de conclure $a = \lim\limits_{x \to \alpha} \varphi(x)$ (resp. $b = \lim\limits_{x \to \beta} \varphi(x)$).
- Il est aussi possible de procéder à un changement de variable avec une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ qui est une bijection strictement décroissante. Dans ce cas, si l'une des intégrales en présence est convergente, on peut conclure :
$$\int_a^b f(t)\ dt\ =\ \int_\beta^\alpha (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt\ =\ -\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt$$
- Le programme officiel autorise le changement de variable directement sur les intégrales généralisées. Cependant, cela a tendance à complexifier inutilement la recherche de bornes de l'intégrales résultat. Il est souvent pertinent de faire les calculs sur un segment et de conclure par un passage à la limite.
- Il est enfin noté qu'on « applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels ». On peut notamment considérer que les changements de variables affines sont usuels.

III.3.c) Changement de variable pour une intégrale impropre par calcul sur un segment

Exemple

Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 1}$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^t + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) Soit $B \in [0, +\infty[$. Posons le changement de variable $\varphi : t \mapsto \ln(t)$.

$\varphi(t) = \ln(t)$ donc $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$

- $\varphi(\alpha) = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = 1$
- $\varphi(\beta) = B \ \Rightarrow\ \beta = \mathrm{e}^B$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^B \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 1} &= \int_1^{\mathrm{e}^B} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^{\mathrm{e}^B} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^B} \frac{dt}{t} - \int_1^{\mathrm{e}^B} \frac{dt}{t+1} = \big[\ \ln(|t|)\ \big]_1^{\mathrm{e}^B} - \big[\ \ln(|t+1|)\ \big]_1^{\mathrm{e}^B} \\
&= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^B}{\mathrm{e}^B + 1}\right) + \ln(2) \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(2)
\end{aligned}$$

car $\dfrac{e^B}{e^B+1} \underset{B\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^B}{e^B} = 1$ et donc : $\ln\left(\dfrac{e^B}{e^B+1}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.

3) Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \ln(2)$.

Remarque

- En vertu du théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées, la fonction $\varphi :]1,+\infty[\to]0,+\infty[$ étant une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, on peut aussi directement conclure que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,dt$ sont de même nature.
- Le problème intervient alors pour le calcul de cette dernière intégrale. On utilise une décomposition en éléments simples et le fait que l'intégrale est linéaire. Ce qui est vrai ... pour peu que les intégrales en présence soient convergentes ! Ce n'est pas le cas. Il convient alors d'effectuer la fin de calcul sur un segment (comme réalisé plus haut).

III.3.d) Changement de variable pour une intégrale généralisée : un exemple issu des concours

Exemple `(CCINP 2021)`

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$.

1. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

2. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,e^{-t}\,dt$$

Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

III.3.e) Changement de variable et parité dans le cas d'une intégrale impropre

Théorème 8.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

Soit $f :]-a,a[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $]-a,a[$.

- *Si f est paire :*

  1) *Les intégrales $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{a} f(t)\,dt$ sont de même nature.*

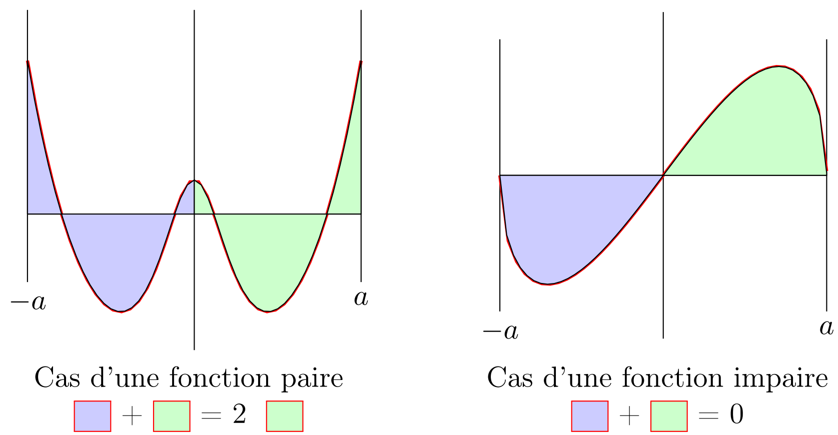
  2) *Si l'une des intégrales est convergente :* $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^{a} f(u)\,du}$

- *Si f est impaire :*

  1) *Les intégrales $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{a} f(t)\,dt$ sont de même nature.*

  2) *Si l'une des intégrales est convergente :* $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0}$

Représentation graphique. *(Cas d'une intégrale sur un segment)*



Cas d'une fonction paire $\quad$ Cas d'une fonction impaire

Exemple

- Étude et nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\ dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ est continue sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
  De plus, elle est impaire car, pour tout $t \in\ ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:
  $$f(-t) \;=\; \frac{-t}{\sqrt{2-(-t)^2}} \;=\; \frac{-t}{\sqrt{2-t^2}} \;=\; -f(t)$$

  2) On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\ dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\ dt$ sont de même nature.

  3) En cas de convergence (c'est le cas), on a alors :
  $$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\ dt = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\ dt + \int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\ dt = 0$$

- Étude et nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto t$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)$ est donc impropre à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$.
  De plus, la fonction f est impaire car, pour tout $t \in\ ]-\infty, +\infty[$:
  $$f(-t) \;=\; -t \;=\; -f(t)$$

  2) On en conclut que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\ dt$ sont de même nature (ce qui n'est pas une grande nouvelle !).

  On `NE` peut `PAS` pour autant en conclure :
  $$\xcancel{\int_{-\infty}^{+\infty} t\ dt \;=\; \int_{-\infty}^{0} t\ dt + \int_{0}^{+\infty} t\ dt \;=\; 0}$$
  (l'hypothèse de convergence est primordiale !)

Remarque

- Insistons sur le fait que le changement de variable requiert une hypothèse de convergence.
- Ainsi, dans le dernier exemple, la parité de la fonction f n'est en fait d'aucune utilité : on ne peut effectuer le changement de variable puisque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\ dt$ est divergente.

IV. Intégrales classiques

Théorème 9.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$

(critère de Riemann)

2) $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0}$

Démonstration.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $B \in [1, +\infty[$.

Si $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^B \frac{1}{t}\, dt = [\ \ln(|t|)\ ]_1^B = \ln(B)$

Comme $\ln(B) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ est divergente.

Si $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_1^B \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \int_1^B t^{-\alpha}\, dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^B = \frac{B^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$

Enfin si $-\alpha+1 < 0$ alors $B^{-\alpha+1} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et si $-\alpha+1 > 0$ alors $B^{-\alpha+1} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) La fonction $f : t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $B \in [0, +\infty[$.

Si $\alpha = 0$: $\displaystyle\int_0^B 1\, dt = [\ t\ ]_0^B = B$

Comme $B \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ est divergente.

Si $\alpha \neq 0$: $\displaystyle\int_0^B e^{-\alpha t}\, dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^B = -\left(\frac{e^{-\alpha B}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha B}}{\alpha}$

Enfin si $\alpha > 0$ alors $e^{-\alpha B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et si $\alpha < 0$ alors $e^{-\alpha B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Remarque

- La démonstration nous permet de connaître la valeur de ces intégrales (lorsqu'elles sont convergentes) :

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1 \text{ alors } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha - 1}}$$

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 0 \text{ alors } \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt = \frac{1}{\alpha}}$$

- Par application de la relation de Chasles (dans le cas des intégrales généralisées), on démontre :

$$\forall a > 0, \quad \boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\int_b^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0}$$

(il faut bien comprendre que les intégrales $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^b e^{-\alpha t}\, dt$ sont des intégrales sur un segment d'une fonction continue sur ce segment)

Théorème 10.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1}$$

(critère de Riemann)

Démonstration.
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$. Soit $A \in]0,1]$.

Si $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_A^1 \frac{1}{t}\,dt = [\ \ln(t)\ ]_A^1 = \ln(A)$

Comme $\ln(A) \underset{A\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente.

Si $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_A^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \int_A^1 t^{-\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_A^1 = \frac{1}{-\alpha+1} - \frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

Enfin si $-\alpha+1>0$ alors $A^{-\alpha+1} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 0$,

et si $-\alpha+1<0$ alors $A^{-\alpha+1} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. □

Remarque

- D'après la relation de Chasles (dans le cas des intégrales généralisées) :

$$\forall b > 0,\quad \boxed{\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ est convergente} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha < 1}$$

(il faut bien comprendre que les intégrales $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ *est une intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment)*

Remarque

- Quelle est la nature de $\displaystyle\int_a^\gamma \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ (où $\gamma > a$) ?

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est continue sur $]a,\gamma]$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_a^\gamma f(t)$ est donc impropre seulement en a.

  2) Par changement de variable affine, les intégrales :

  $$\int_a^\gamma \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\gamma-a} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \quad \text{sont de même nature.}$$

  3) Ainsi : $\boxed{\displaystyle\int_a^\gamma \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt \text{ est convergente } \Leftrightarrow\ \alpha < 1}$.

- Quelle est la nature de $\displaystyle\int_\delta^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt$ (où $\delta < b$) ?

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est continue sur $[\delta, b[$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_\delta^b f(t)$ est donc impropre seulement en b.

  2) Par changement de variable affine, les intégrales :

  $$\int_\delta^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{b-\delta} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

  sont de même nature.

  3) Ainsi : $\boxed{\displaystyle\int_\delta^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt \text{ est convergente } \Leftrightarrow\ \alpha < 1}$.

- De la même manière :

$$\boxed{\int_\gamma^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{\gamma-a}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow\ \alpha > 1}$$

et $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow\ \alpha > 1}$

Théorème 11.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *et soit* $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *tels que :* $a < \gamma$ *et* $\delta < b$.
Soit $f :]a,\gamma] \to \mathbb{K}$ *et* $g : [\delta, b[\to \mathbb{K}$ *deux fonctions continues par morceaux.*

1) $\boxed{\displaystyle\int_a^\gamma f(t)\,dt \textit{ est convergente en } a \ \Leftrightarrow\ \int_0^{\gamma-a} f(t+a)\,dt \textit{ est convergente en } 0}$

2) $\boxed{\displaystyle\int_\delta^b g(t)\,dt \textit{ est convergente en } b \ \Leftrightarrow\ \int_0^{b-\delta} g(b-t)\,dt \textit{ est convergente en } 0}$

V. Propriétés des intégrales généralisées

> On écrit les propriétés pour les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ impropres en b. **Les autres cas donnent lieu à des résultats similaires**.

V.1. Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

Théorème 12.

Soit $a < b \leqslant +\infty$.
Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$).
Supposons de plus que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.
Soit $c \in [a,b[$.

1) *L'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ est convergente en b.*

2) *De plus, on a :* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt}$

Démonstration.
On fait ici la démonstration pour une fonction f continue sur $[a,b[$.
On pourra alors appliquer ce résultat à toutes les fonctions $\tilde{f}_i$ (*cf* définition de continuité par morceaux) car elles sont continues sur un segment ce qui permet de conclure que le résultat est vérifié pour toutes les fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$.

1) La fonction f est continue sur $[a,b[$.

2) Soient $B \in [a,b[$ et $c \in [a,b[$:

$$\int_a^B f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^B f(t)\ dt$$

et donc
$$\int_a^c f(t)\ dt = \int_a^B f(t)\ dt - \int_c^B f(t)\ dt$$

Par hypothèse, $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque $B \to b$.

3) On en déduit que $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ admet aussi une limite finie lorsque $B \to b$ et, par passage à la limite :

$$\int_a^c f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt - \int_c^B f(t)\ dt \qquad \square$$

Remarque

- L'hypothèse $c \in [a,b[$ permet d'assurer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ est bien définie. En effet, comme f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et $c \in [a,b[$, alors f est continue par morceaux sur le segment $[a,c]$.
- Cependant, il est parfaitement légitime d'écrire (par exemple) :

$$\int_5^{+\infty} f(t)\ dt = \int_5^0 f(t)\ dt + \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$$

pour peu que lest intégrales en présence sont convergentes et que la fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

V.2. Linéarité de l'intégrale généralisée

Théorème 13.

Soient $a < b \leqslant +\infty$.
Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux sur $[a,b[$.
Supposons que les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont convergentes.

1) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda\cdot f + \mu\cdot g)(t)\ dt$ *est convergente.*

2) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$, $\boxed{\displaystyle\int_a^b (\lambda\cdot f + \mu\cdot g)(t)\ dt = \lambda\int_a^b f(t)\ dt + \mu\int_a^b g(t)\ dt}$

Démonstration.

1) La fonction f est continue sur $[a,b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)$ est donc impropre seulement en b.

2) Soit $B \in [a,b[$. Par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^B (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\ dt \ = \ \lambda \int_a^B f(t)\ dt \ + \ \mu \int_a^B g(t)\ dt$$

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont convergentes donc $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^B g(t)\ dt$ admettent chacune une limite finie lorsque $B \to b$. On en déduit que $\displaystyle\int_a^B (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque $B \to b$.

3) Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\ dt \ = \ \lambda \int_a^b f(t)\ dt \ + \ \mu \int_a^b g(t)\ dt$$

□

Remarque
Pour le Théorème 12 et le Théorème 13, l'hypothèse $a < b$ n'est pas primordiale. Elle sert essentiellement à simplifier les écritures d'intervalle. Si on ne la supposait pas, on devrait alors distinguer le cas $a < b$ (qui permet d'écrire l'intervalle $[a,b[$) du cas $b < a$ (qui permet d'écrire l'intervalle

V.3. Techniques de majoration, minoration

On considère dans ce paragraphe des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (hypothèse primordiale pour pouvoir utiliser l'opérateur d'inégalité $\leqslant$).

V.3.a) Positivité

Théorème 14.

Soit $a < b \leqslant +\infty$.
Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a,b[$.
Supposons de plus que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.

a) $\boxed{f \geqslant 0 \text{ sur } [a,b[\ \Rightarrow \ \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \ \geqslant \ 0}$

b) $\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b[\\ \bullet\ f \ > \ 0 \text{ sur } [a,b[\end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \ > \ 0}$

c) $\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b[\\ \bullet\ f \geqslant 0 \text{ sur } [a,b[\\ \bullet\ \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f = 0 \text{ sur } [a,b[}$

Tous ces résultats exploitent le fait que les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant ($a < b$), hypothèse primordiale pour conclure.

Démonstration.

a) 1) La fonction f est continue sur $[a,b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)$ est donc impropre seulement en b.

2) Soit $B \in [a,b[$. Par positivité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^B f(t)\ dt \geqslant 0$$

Comme $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque $B \to b$. On obtient le résultat souhaité en passant à la limite dans cette inégalité.

b) Si $f \neq 0$, alors $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt > 0$. Cependant, le passage à la limite dans cette inégalité ne permet pas de conclure (l'inégalité stricte devient large).

Soit $c \in\ ]a,b[$ *(l'hypothèse $c > a$ est importante).*
La relation de Chasles fournit :

$$\int_a^b f(t)\ dt = \underbrace{\int_a^c f(t)\ dt}_{>0} + \underbrace{\int_c^b f(t)\ dt}_{\geqslant 0} > 0$$

Le deuxième résultat est une application du point ***a)***.
La première intégrale est une intégrale sur le segment $[a,c]$ de la fonction f continue sur $[a,c]$. On applique le résultat issu du chapitre d'intégration sur un segment à la fonction $f > 0$ sur $[a,c]$.
(rappel : si F est une primitive de f alors $F' = f > 0$ sur $[a,b[$. Ainsi, F est strictement croissante et si $c < b$ alors $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt = F(b) - F(c) > 0$)

c) On procède par l'absurde. On suppose :

× f continue, positive, d'intégrale nulle sur $[a,b[$,

× $f \neq 0$ sur $[a,b[$: il existe donc $x_0 \in\ [a,b[$ tel que $f(x_0) > 0$.

La continuité de f assure alors que f est strictement positive dans un voisinage de x_0. Autrement dit, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in\ [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\ \cap\ [a,b[,\ f(x) > 0$$

Ainsi :

$$\underbrace{\int_a^b f(t)\ dt = \underbrace{\int_a^{x_0-\delta} f(t)\ dt}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)\ dt}_{>0} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{b} f(t)\ dt}_{\geqslant 0}}_{>\ 0}$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale. □

V.3.b) Croissance de l'intégrale

Théorème 15.

Soit $a < b \leqslant +\infty$.
Soient $f, g : [a,b[\ \to \mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a,b[$.
Supposons de plus que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont convergentes.
Et supposons enfin : $\forall t \in [a,b[,\ f(t) \leqslant g(t)$.
Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt}$$

Démonstration.
La fonction $g - f$ est :

× continue sur $[a,b[$,

× vérifie : $\forall t \in [a,b[,\ (g-f)(t) \geqslant 0$.

De plus, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b (g-f)(t)\ dt$ est convergente car $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont convergentes.
Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant $(b > a)$:

$$\int_a^b (g-f)(t)\ dt \geqslant 0$$

Enfin, par linéarité : $\displaystyle\int_a^b (g-f)(t)\ dt = \int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt.$ □

Remarque
Pour les propriétés de positivité et de majoration, l'hypothèse $a < b$ est primordiale. Il convient de la citer lors de l'utilisation de ces théorèmes.
On pourra adopter la rédaction suivante :

« les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant »

VI. Le cas des fonctions continues positives

Dans cette section, on s'intéresse exclusivement à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (et même, plus précisément, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).

VI.1. Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue positive

VI.1.a) Théorème fondamental dans le cas d'une intégrale impropre en b

Théorème 16.

Soit $a < b \leqslant +\infty$.

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.

Supposons de plus : $\forall x \in [a, b[,\ f(x) \geqslant 0$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ est majorée}}$

2) *Si F est non majorée, $\lim\limits_{x \to b} F(x) = +\infty$.*

Démonstration.

- Par définition, F est la primitive de f sur $[a, b[$ qui s'annule en c.
  On en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b[$. De plus :

$$\forall x \in [a, b[,\ F'(x) = f(x) \geqslant 0$$

  Ainsi, F est croissante sur $[a, b[$.
- En vertu du théorème de la limite monotone, F admet donc une limite éventuellement infinie (à gauche) en b. De plus :
  × cette limite est finie si F est majorée.
  × cette limite est $+\infty$ si F non majorée. □

VI.1.b) Théorème fondamental dans le cas d'une intégrale impropre en a

Théorème 17.

Soient $-\infty \leqslant a < b$ et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$. Notons $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\, dt$. Supposons : $\forall x \in]a, b],\ f(x) \geqslant 0$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad G \text{ est majorée}}$

2) *Si G est non majorée, $\lim\limits_{x \to a} G(x) = +\infty$.*

Démonstration.

- La fonction f étant continue sur $]a, b]$, elle admet une primitive F sur $]a, b]$.
  Alors, pour tout $x \in]a, b]$:

$$\int_x^b f(t)\, dt = [\ F(t)\ ]_x^b = F(b) - F(x)$$

  La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b]$ et :

$$\forall x \in [a, b[,\ G'(x) = -F'(x) = -f(x) \leqslant 0$$

  Ainsi, G est décroissante sur $]a, b]$.
- En vertu du théorème de la limite monotone, G admet donc une limite éventuellement infinie (à droite) en a. De plus :
  × cette limite est finie si G est majorée.
  (oui, la condition est bien G majorée et pas minorée !)
  × cette limite est $+\infty$ si G non majorée. □

VI.1.c) Cas d'une intégrale doublement impropre

Considérons $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $]a, b[$. On se ramène au cas précédent en passant à la définition :

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ est convergente} \Leftrightarrow \exists c \in]a, b[,\ \int_a^c f(t)\, dt \text{ et } \int_c^b f(t)\, dt \text{ sont convergentes}$$

VI.2. Règles de comparaison

VI.2.a) Comparaison par inégalité

Théorème 18.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Supposons de plus : $\forall x \in [a, b[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

1. *Alors on a :*

a) $$\boxed{\int_a^b g(t)\, dt \text{ est convergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\, dt \text{ est convergente}}$$

b) $$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt \text{ est divergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(t)\, dt \text{ est divergente}}$$

2. *De plus, dans le cas de la convergence, on a :*

$$\boxed{0 \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt}$$

Démonstration.

1. Soit $x \in [a, b[$. Comme :

× f et g sont continues sur $[a, x]$,

× $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, x]$,

× les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant,

on conclut (technique de majoration du chapitre intégration sur un segment) :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_a^x g(t)\, dt \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & \leqslant & F(x) & \leqslant & G(x) \end{array}$$

a) Comme $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente, la propriété précédente énonce que G est majorée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b[$: $G(x) \leqslant M$. Et donc, pour tout $x \in [a, b[$, on a :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant G(x) \leqslant M$$

Ainsi, F est elle aussi majorée par M, ce qui démontre que $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente.

b) Dans ce cas, $F(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$ et ainsi $G(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Inégalité obtenue par passage à la limite dans l'inégalité précédente. □

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) × Pour tout $t \in [1, +\infty[$: $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t^2} \leqslant e^{-t}$.

× Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$ est convergente.

Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$ est convergente.

Exercice

Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t + \sqrt{t}}\, dt$ **b)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}}$ **c)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} t^2 \ln\left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right) dt$

VI.2.b) Comparaison par domination

Théorème 19.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions :
$\times$ *continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).*
$\times$ *positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).*
Supposons de plus : $f(t) = \underset{t\to b}{O}(g(t))$ (resp. $f(t) = \underset{t\to a}{O}(g(t))$).

a. $\boxed{\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt \text{ est convergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\, dt \text{ est convergente}}$

b. $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \text{ est divergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(t)\, dt \text{ est divergente}}$

Démonstration.
On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente.

- Comme $f(t) = \underset{t\to b}{O}(g(t))$, il existe $A \in [a, b[$ et $M > 0$ tel que :

$$\forall t \in \,]a, b[, \ \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leqslant M$$

Ainsi :

$$\forall t \in \,]a, b[, \ 0 \leqslant f(t) \leqslant M\, g(t)$$

- Comme l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b M\, g(t)\, dt$ (on ne change pas la nature d'une intégrale généralisée en multipliant son intégrande par un réel $M > 0$.
On en conclut, par le critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente. $\square$

Remarque

- Rappelons : $\boxed{f(t) = \underset{t\to b}{o}\big(g(t)\big) \ \Rightarrow \ f(t) = \underset{t\to b}{O}\big(g(t)\big)}$

- Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente en b.
Grâce à la remarque ci-dessus, on obtient :

$$f(t) = \underset{t\to b}{o}\big(g(t)\big) \ \Rightarrow \ f(t) = \underset{t\to b}{O}\big(g(t)\big) \ \Rightarrow \ \int_a^b f(t)\, dt \text{ est convergente en } b$$

Autrement dit, on peut écrire un théorème de comparaison par négligeabilité (en remplaçant $\underset{t\to b}{O}$ par $\underset{t\to b}{o}$).

Exemple

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

2) $\times$ $\forall t \in [0, +\infty[$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$
$\times$ $\mathrm{e}^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$
$\times$ Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.
Ainsi, par le théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est convergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\ dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$.

2) × $\forall t \in [2, +\infty[,\ \dfrac{1}{\ln(t)} \geqslant 0$

× $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$.

(comprendre que $\dfrac{1}{\ln(t)}$ est grand devant $\dfrac{1}{t}$)

× Or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$ est divergente.

Ainsi, par le théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\ dt$ est divergente.

VI.2.c) Comparaison par équivalence

Théorème 20.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions :

× *continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).*

× *positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).*

Supposons de plus : $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$ (resp. $f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)$).

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont de même nature.

Démonstration.

- Comme $f(t) \underset{t\to b}{\sim} (g(t))$, on a : $\displaystyle\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$.

  Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in\ [b-\delta, b+\delta]\ \cap\ [a, b[,\ \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

  Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in\ [b-\delta, b]$:

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| < \frac{1}{2} \quad \text{et donc} \quad 0 \leqslant \frac{1}{2}\ g(t) \leqslant f(t) \leqslant \frac{3}{2}\ g(t)$$

- En utilisant le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, on en conclut :

$$\int_{b-\delta}^b g(t)\ dt \text{ est convergente} \ \Leftrightarrow\ \int_{b-\delta}^b f(t)\ dt \text{ est convergente}$$

Il suffit alors de remarquer que $\displaystyle\int_a^b \dots\ dt$ est convergente ssi $\displaystyle\int_{b-\delta}^b \dots\ dt$ est convergente pour conclure. □

Exemple

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est donc impropre seulement en 0.

  2) $\times$ $\forall t \in\,]0,1]$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$

  $\times$ $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

  $\times$ Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\, dt$ est divergente.

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\, dt$ est divergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4t^2+2t-1}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{4t^2+2t-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

  2) $\times$ $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$

  $\times$ $\dfrac{1}{4t^2+2t-1} \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\,t^2}$

  $\times$ Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4\,t^2}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 (> 1).

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4t^2+2t-1}\, dt$ est convergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{\sqrt{t}}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est donc impropre seulement en 0.

  2) $\times$ $\forall t \in\,]0,1]$, $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$

  $\times$ $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

  $\times$ Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en 0, d'exposant $\frac{1}{2}$ (< 1).

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{\sqrt{t}}\, dt$ est convergente.

VI.3. Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue négative

- Dans le cas où la fonction f considérée est continue par morceaux et négative sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$), on se ramène aux cas précédents en considérant la fonction $-f$ qui est positive sur cet intervalle.
- En réalité, les théorèmes précédents auraient pu être énoncés dans le cas de fonctions continues par morceaux négatives. La bonne hypothèse est donc celle de fonction continue par morceaux et **de signe constant** sur l'intervalle considéré.

VII. Le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$

On traite ici le cas des fonctions à valeurs complexes ou le cas des fonctions à valeurs réelles et de signe quelconque. On se ramène au cas précédent à l'aide de la notion de convergence absolue.

VII.1. Notion de convergence absolue

Définition

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$, resp. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$).

- On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b \mid f(t) \mid\, dt$ est convergente.

VII.2. Inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées

Théorème 21.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

1) $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \text{ est absolument convergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\, dt \text{ est convergente}}$

2) *Dans le cas où $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est absolument convergente (en b) :*

$$\boxed{\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b \mid f(t) \mid\, dt}$$

Démonstration.

1) On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente (en b).

Démonstration dans le cas où f est à valeurs réelles

Notons $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.

$\times$ $f^+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$ est la partie positive de f.

$\times$ $f^- : x \mapsto -\min(f(x), 0) = \max(-f(x), 0)$ est la partie négative de f.

- $\times$ On a : $\forall t \in [a, b[, \ \ 0 \ \leqslant \ f^+(t) \ \leqslant \ |f(t)|$.

  $\times$ Or $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

  Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f^+(t)\, dt$ est aussi convergente.
- $\times$ On a : $\forall t \in [a, b[, \ \ 0 \ \leqslant \ f^-(t) \ \leqslant \ |f(t)|$.

  $\times$ Or $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

  Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f^-(t)\, dt$ est aussi convergente.

Enfin, on remarque :

$$f = f^+ - f^-$$

On en conclut, par linéarité, que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente.

Démonstration dans le cas où f est à valeurs complexes

Il s'agit de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente (en b).

C'est le cas si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\left(f(t)\right)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}\left(f(t)\right)\ dt$ le sont.

Il suffit alors de remarquer :

$$\forall t \in]a,b],\ 0 \leqslant \left|\mathrm{Re}\left(f(t)\right)\right| \leqslant \left|f(t)\right| \qquad (\text{et } 0 \leqslant \left|\mathrm{Im}\left(f(t)\right)\right| \leqslant \left|f(t)\right|)$$

On en déduit, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives que les intégrales $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\left(f(t)\right)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}\left(f(t)\right)\ dt$ sont (absolument) convergentes, ce qui permet de conclure.

2) La fonction f est continue sur $[a,b[$.
Soit $x \in [a,b[$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire des intégrales de fonctions continues sur un segment ($[a,x]$ ici) :

$$|F(x)| \ = \ \left| \int_a^x f(t)\ dt \right| \ \leqslant \ \int_a^x \ |\ f(t)\ |\ dt$$

La quantité de droite converge, par hypothèse, vers $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ dt$.

D'autre part (théorème de composition des limites), on a :

$$\lim_{x\to b} |F(x)| \ = \ |\lim_{x\to b} F(x)| \ = \ \left| \int_a^b f(t)\ dt \right|$$

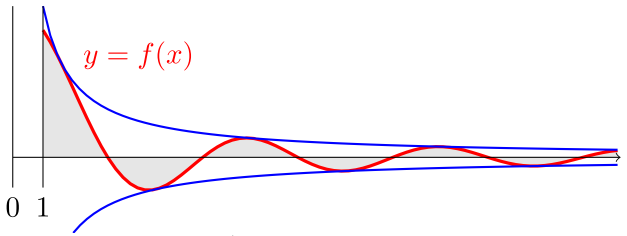
*(on rappelle que F admet une limite finie en $+\infty$ d'après **1)**)*
L'inégalité souhaitée est donc vérifiée par passage à la limite dans l'inégalité précédente. □

Remarque
Ce résultat n'est pas une équivalence : il existe des intégrales impropres convergentes mais non absolument convergentes. Dans ce cas, on parle parfois de **semi-convergence**.

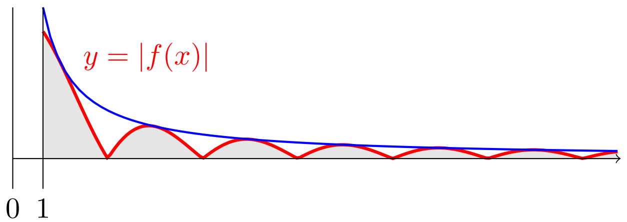
Représentation graphique d'une intégrale semi-convergente.

- Pour construire un exemple d'intégrale semi-convergente, l'idée est de choisir une fonction successivement positive puis négative de sorte qu'un phénomène de compensation s'opère :
  - × sur un intervalle où f est positive, l'aire est comptée positivement.
  - × sur l'intervalle « suivant », f est négative, l'aire est comptée négativement et réduit l'aire précédente.

  Lorsque l'on calcule l'intégrale sur l'union de ces deux intervalles,
- L'exemple le plus classique est celui de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$.



L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.



L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(t)|\ dt$ n'est pas convergente.

VII.3. Notion de fonction intégrable sur un intervalle

VII.3.a) Définition

Définition

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$, resp. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle $I = [a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$).

- La fonction f est dite intégrable sur I si :
  - × f est continue par morceaux sur I.
  - × son intégrale sur I est absolument convergente.

    Plus précisément, ce dernier point signifie que l'intégrale
    - convergente en b si $I = [a, b[$.
    - convergente en a si $I =]a, b]$.
    - convergente à la fois en a et en b si $I =]a, b[$.
- Si f est intégrable sur I, on peut noter $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\ dt$ sont intégrale.
- On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et intégrables sur l'intervalle I.

VII.3.b) Structure de l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle

Théorème 22.

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I.

1) *L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel (c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$).*

2) *Ainsi, si f et g sont intégrables sur I alors toute combinaison linéaire des fonctions f et g est intégrable sur I.*

• *f est intégrable sur I* • *g est intégrable sur I*	$\Rightarrow$	*$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, la fonction* *$\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est intégrable sur I*

Remarque

- On peut démontrer que l'ensemble $L^2(I, \mathbb{K})$ (ensemble des fonctions de carré intégrable) est aussi un espace vectoriel.
  De plus, comme :
  $$|fg| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ \left(|f|^2 + |g|^2\right)$$
  alors si f et g sont dans L^2 alors fg est dans L^1.
- On peut démontrer que l'application $(f, g) \to \displaystyle\int_a^b f(t)\ g(t)\ dt$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions réelles continues et de carré intégrable sur $I = [a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$).
  En particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit :
  $$\left(\int_a^b f(t)\ g(t)\right)^2 \ \leqslant\ \left(\int_a^b f(t)^2\right)\ \left(\int_a^b g(t)^2\right)$$
- Pour tout $\alpha > 1$, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\ dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\ dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}\ dt$ convergent (absolument).
- Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\ dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt$ convergent mais pas absolument.
  Pour démontrer la convergence, on peut par exemple écrire :
  $$\int_1^B \frac{\sin(t)}{t}\ dt \ =\ \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^B - \int_1^B \frac{\cos(t)}{t^2}\ dt$$
  Pour la non convergence absolue, on peut écrire :
  $$\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \ \geqslant\ \left|\frac{(\sin(t))^2}{t}\right| = \frac{1 - \cos(2t)}{2t}$$

- On peut aussi remarquer (une propriété de plus) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\ dt$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\ dt \ &= \ \left[-\frac{\sin(t)^2}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\ \sin(t)\ \cos(t)}{t} \\ &= \ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\ dt \end{aligned}$$

- Les théorèmes de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives se réécrivent avec cette définition d'intégrabilité.

 Soient f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$)
 Supposons : $f(t) = \underset{t \to b}{o}(g(t))$ (resp. $f(t) = \underset{t \to a}{o}(g(t))$).

$$\boxed{g \text{ intégrable sur } [a, b[\ \Rightarrow\ f \text{ intégrable sur } [a, b[}$$

Bilan rapide du chapitre

- Ce chapitre est très similaire à celui des séries dans sa construction :

 1) l'intégrale impropre en b $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente si la quantité $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$ (intégrale partielle) admet une limite finie en B.

 2) on connaît certaines formules de calcul des intégrales partielles (primitives à vue mais aussi changement de variable et intégration par parties).

 3) on sait conclure quant à la convergence des intégrales de Riemann (attention, l'impropreté peut être en 0, ce qui est une nouveauté par rapport au chapitre des séries).

 4) on peut démontrer la convergence à l'aide des intégrales généralisées de fonctions continues positives en comparant le comportement de la fonction f (au voisinage de a, resp. de b) à celui d'une fonction g dont l'intégrale est convergente en a (resp. b).

 5) si on étudie une fonction qui n'est pas de signe constant, on étudie la convergence absolue (c'est-à-dire le caractère intégrable).

- Il y a deux grosses différences avec le chapitre des séries numériques :

 × l'étude ne se fait pas uniquement au voisinage de $+\infty$ mais au voisinage des impropretés.

 × il n'y a pas de condition nécessaire de convergence d'une intégrale généralisée. Ou plutôt : celle-ci est plus subtile.

- Détaillons ce dernier point. Si on considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ alors :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0 \ \Rightarrow\ \text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \text{ est divergente}$$

Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente, on peut alors simplement en déduire que la fonction f n'admet pas de limite non nulle en $+\infty$. Autrement dit, soit f admet comme limite 0, soit f n'admet pas de limite (finie).

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \text{ est convergente } \ \cancel{\Rightarrow}\ f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

VIII. Comparaison séries / intégrales

Théorème 23.

On considère une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{K}$ continue sur $[0,+\infty[$.
On suppose de plus que f est décroissante sur $[0,+\infty[$. Alors :

1) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leqslant f(k-1)}$

2) On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{S_n - f(0) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1) = S_{n-1}}$$

(prudence lors de la sommation : pour quels entiers k peut-on sommer ?)

3) Si, de plus, f est positive, on a :

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ est convergente} \Leftrightarrow \text{L'intégrale impropre } \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ est convergente}}$$

(la série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature)

Démonstration.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [k-1,k]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Comme} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k \\ \text{alors} & f(k-1) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(k) \end{array}$$

(par décroissance de la fonction f sur $[0,+\infty[$)

- La fonction f est continue sur le **segment** $[k-1,k]$.
  On en déduit que l'intégrale $\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$ est bien définie.

De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leqslant k$) :

$$\underbrace{\int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dt}_{=\big(k-(k-1)\big)\,f(k-1)} \geqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \geqslant \underbrace{\int_{k-1}^{k} f(k)\,dt}_{=\big(k-(k-1)\big)\,f(k)}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leqslant f(k-1)}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient, par sommation des inégalités précédentes :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt}_{=\int_0^n f(t)\,dt} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$$

(d'après la relation de Chasles)

Enfin : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$.

3) La fonction f est continue et positive sur $[0,+\infty[$.
Ainsi, la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ équivaut au caractère majoré de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$.

($\Leftarrow$) Supposons que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

- On en déduit que $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est majorée.
  Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) \leqslant M$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de ce qui précède : $S_n - f(0) \leqslant F(n) \leqslant M$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant (f(0) + M)$$

La suite (S_n) est donc majorée. Elle est de plus croissante (car la série $\sum f(n)$ est à termes positifs).
Ainsi, (S_n) est convergente.

$(\Rightarrow)$ Supposons que la série $\sum f(n)$ est convergente.

- Alors la suite (S_n) est convergente. Elle est donc aussi majorée.
  Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant M$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de ce qui précède : $F(n) \leqslant S_{n-1} \leqslant M$.
  Enfin, comme la fonction F est croissante :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ F(x) \leqslant F(\lceil x \rceil) \leqslant S_{\lceil x \rceil - 1} \leqslant M$$

*(on rappelle que $\lceil x \rceil$ est l'***entier** *directement supérieur à x)*

Ainsi, la fonction F est majorée, ce qui démontre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente. □

Exercice *(d'après* `EML 1992`*)*
On note f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2) Montrer que : $\forall k \geqslant 3$, on a : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

3) ***a.*** Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ S_n - \dfrac{1}{2 \ln 2} \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\ dt \leqslant S_n - \dfrac{1}{n \ln n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2 \ln 2}$$

c. Établir que : $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln n)$.

IX. Somme de Riemann, méthode des rectangles (RAPPEL de 1ère année)

IX.1. Définition

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ une subdivision finie de $[a,b]$.

- On appelle **somme de Riemann** toute somme s'écrivant :

$$\boxed{R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\ f(\xi_k)}$$

où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, ξ_k est un élément choisi dans $[x_k, x_{k+1}]$.

Remarque

On considère en particulier des sommes de Riemann définies sur des subdivisions régulières *i.e.* telles que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$.

- En prenant pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = x_k$.

$$\boxed{S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

- En prenant pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = x_{k+1}$.

$$\boxed{T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

- En prenant pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

$$\boxed{M_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

Remarque

Les sommes de Riemann dépendent des paramètres a, b et f. En toute rigueur, il faudrait donc écrire $S_n(a,b,f)$. On se permettra d'alléger cette notation pour ne conserver que S_n en précisant par ailleurs ces paramètres.

IX.2. Méthode des rectangles

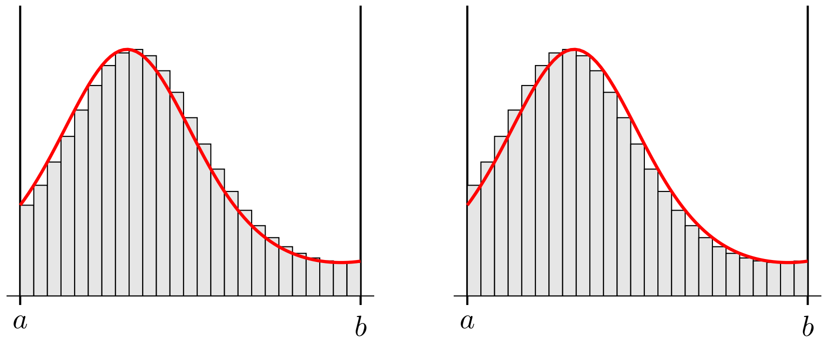
IX.2.a) Définition

Définition

La méthode des rectangles est une méthode d'analyse numérique consistant à approcher le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.

- On considère une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
- On approche $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt$ par l'aire d'un rectangle de côté $[x_k, x_{k+1}]$ et s'appuyant sur la courbe $\mathscr{C}_f$.
- On approche alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ par la somme de toutes les aires de rectangles ainsi définis.

Autrement dit, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est approchée par une somme de Riemann.



Somme de Riemann S_n Somme de Riemann T_n

Découpage avec $n = 25$

IX.2.b) Convergence de la méthode

Théorème 24. *Cas des fonctions continues*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue sur $[a,b]$.

- *Convergence de la somme (S_n).*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \;=\; \int_a^b f(t)\ dt}$$

- *Convergence de la somme (T_n).*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \;=\; \int_a^b f(t)\ dt}$$

- *Convergence de la somme (M_n).*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right) \;=\; \int_a^b f(t)\ dt}$$

Démonstration.
Admis dans le cas des fonctions continues. □

Cas particulier

- Les exercices sur les sommes de Riemann se traitent en faisant apparaître le cas particulier : $a = 0$, $b = 1$. On a alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \;=\; \int_0^1 f(t)\ dt \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

- Illustrons ce procédé par un énoncé classique.
  Démontrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}\right)$ est convergente et calculer sa limite.

L'énoncé du cas particulier nous invite à faire apparaître la quantité $\dfrac{k}{n}$ dans la somme finie. Or on a :

$$n + k = n\left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

Ainsi : $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$.
On en déduit que la suite de l'énoncé est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = \big[\ \ln(|1+t|)\ \big]_0^1 = \ln 2 - \cancel{\ln 1}$$

IX.2.c) Vitesse de convergence dans le cas de fonctions $\mathscr{C}^1$ (CULTURE)

Théorème 25. *(Cas des fonctions $\mathscr{C}^1$ - vitesse de convergence)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
Notons $M_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Alors on a : $\boxed{\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt - S_n\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2n}\, M_1}$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que M_1 est bien défini. En effet, comme f est $\mathscr{C}^1$, f' est continue. Sur le segment $[a,b]$ elle est donc bornée et atteint ses bornes, ce qui démontre l'existence de $M_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Par la relation de Chasles, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt.$

D'autre part, par définition, on a : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\ f(x_k).$

On remarque de plus que : $(x_{k+1} - x_k)\ f(x_k) = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ dt.$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(t)\ dt - S_n \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ dt \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt \right| \qquad \textit{(inégalité triangulaire sur les réels)} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ f(t) - f(x_k)\ |\ dt \qquad \textit{(inégalité triangulaire sur les intégrales)}
\end{aligned}$$

Or, par le théorème des accroissements finis, on a que :

$$|\ f(t) - f(x_k)\ |\ \leqslant\ M_1\ |\ t - x_k\ |$$

Ainsi : $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ f(t) - f(x_k)\ |\ dt\ \leqslant\ M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ t - x_k\ |\ dt$

Et comme $t \geqslant x_k$ pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ t - x_k\ |\ dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\ dt &= \left[\frac{1}{2}\ (t - x_k)^2 \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&= \frac{1}{2}\ (x_{k+1} - x_k)^2
\end{aligned}$$

Au final, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\ dt - S_n\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2}\ (x_{k+1} - x_k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \cancel{n}\frac{M_1}{2}\ \frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}} = \frac{(b-a)^2}{2n}\ M_1
\end{aligned}$$

□

Remarque

- Ce théorème est en fait valable pour toute somme de Riemann (notamment (T_n) et (M_n)). La démonstration est similaire à remplacement de x_k par ξ_k près avec :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - \xi_k|\ dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - x_k|\ dt$$

- En fait si f est $\mathscr{C}^2$, on a même un théorème plus précis pour (M_n) montrant que la convergence est plus rapide dans ce cas.

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\ dt - M_n\right|\ \leqslant\ \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|}$$

Application.

Grâce à ce théorème, on peut calculer une approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ à ε près par un calcul de S_n.

- Trouver un entier n_0 tel que : $\dfrac{(b-a)^2}{2n_0} M_1\ \leqslant\ \varepsilon$

  Il suffit de prendre $n_0 = \left\lceil \dfrac{(b-a)^2}{2\varepsilon} M_1 \right\rceil$

- S_{n_0} est alors une approximation à ε près de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$:

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt - S_{n_0}\right|\ \leqslant\ \frac{(b-a)^2}{2n_0}\ M_1\ \leqslant\ \varepsilon$$

$\hookrightarrow$ *cf* TP d'informatique !