CH VII : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

I. Motivation du chapitre

I.1. En dimension finie, « les endomorphismes sont des matrices »

- Dans le chapitre III, nous avons étudié la notion d'application linéaire. Rappelons qu'une application linéaire est un morphisme d'espaces vectoriels. Plus précisément, si l'on considère :
  × $(E, +_E, \cdot_E)$ un espace vectoriel,
  × $(F, +_F, \cdot_F)$ un espace vectoriel,
  alors $f : E \to F$ est une application linéaire si f est une application « compatible » avec les lois $+$ et $\cdot$ définies sur les espaces vectoriels considérés. Plus précisément, f est dite linéaire si l'image par f d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images par f.
- Une partie du chapitre III est consacré à l'étude des applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie E vers un espace vectoriel de dimension finie F. À ce sujet, nous avons vu les deux résultats importants suivants.

  1) Cas particulier où $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

  Si $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ (où $(p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$), alors il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que h s'écrit sous la forme :

  $$\begin{array}{rccc} h & : & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & & X & \mapsto & MX \end{array}$$

  Autrement dit, lorsque l'on considère comme espace de départ et d'arrivée des ensembles de vecteurs colonnes, les seules applications linéaires sont des matrices.

  2) Cas général :

  On peut facilement étendre le résultat ***1)*** au cas général. En effet :
  × si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, alors E n'est rien d'autre, à isomorphisme de représentation près, que l'espace $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
  × si F est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, alors F n'est rien d'autre, à isomorphisme de représentation près, que l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

  On obtient alors le schéma suivant :

  $$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(.) \\ \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \end{array}$$

  En plongeant E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et F dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la recherche d'une application linéaire de E dans F est naturellement ramenée à la recherche d'une application de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Cela permet de conclure qu'une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie F « n'est rien d'autre qu'une matrice ».
- En particulier si $E = F$ est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $\mathscr{B}$ une base, l'isomorphisme de représentation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)$ fournit les correspondances suivantes.

  $$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

- À tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, on peut associer sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ (c'est $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$). Attention à ce résultat, il ne dit pas que f est représenter par une seule matrice. Il dit simplement, que lorsqu'on fixe une base, la matrice représentative de f dans cette base est évidemment définie de manière unique.

- Si l'on considère une nouvelle base $\mathscr{B}'$, la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ ($N = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$) est a priori différente de la matrice $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Les matrices M et N sont deux représentants de l'application f. La question est alors de savoir lequel est le meilleur représentant. La réponse est : celui qui est le plus simple à manipuler ! On est alors naturellement amené à se poser la question de savoir s'il existe une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle f pourrait s'exprimer sous forme d'une matrice diagonale ou triangulaire (qui sont des formes plus simples à manipuler).
- C'est tout l'objet du chapitre que de répondre à cette question. Plus précisément, on répond aux deux questions suivantes :
  1) existe-t-il une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle f s'exprime sous forme diagonale ? Si oui, comment déterminer une telle base ?
  2) à défaut, existe-t-il une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle f s'exprime sous forme traingulaire ? Si oui, comment déterminer une telle base ?
- Inspectons de plus près la question *1)* :

Il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1', \dots, e_n')$ pour laquelle la matrice représentative de f est diagonale

Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ Il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1', \dots, e_n')$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1') & = & \lambda \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' + \ldots + 0 \cdot e_{n-1}' + 0 \cdot e_n' \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_n') & = & 0 \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' + \ldots + 0 \cdot e_{n-1}' + \lambda_n \cdot e_n' \end{array}$$

II. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

II.1. Valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $u \in E$ **non nul** tel que :

$$\boxed{f(u) = \lambda \cdot u}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé **spectre de** f et est noté $\text{Sp}(f)$.

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists u \neq 0_E,\ f(u) = \lambda \cdot u\}}$$

2) Cas des matrices carrées

- On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de la matrice A s'il existe un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que :

$$\boxed{AX = \lambda \cdot X}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé **spectre de** A et est noté $\text{Sp}(A)$.

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})},\ AX = \lambda \cdot X\}}$$

Remarque

- Il peut être intéressant de distinguer parmi les valeurs propres (éléments de $\mathbb{K}$) celles qui sont réelles. On adopte alors parfois la notation $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ pour désigner l'ensemble des valeurs propres réelles de l'endomorphisme f.
- On verra dans la suite qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel peut n'admettre aucune valeur propre réelle mais qu'il admet toujours des valeurs propres complexes.

II.2. Vecteurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

II.2.a) Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f (resp. A).

1) Cas des endomorphismes

- On appelle **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ, tout vecteur **non nul** u de E tel que $f(u) = \lambda \cdot u$.
- Cas des endomorphismes
  On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\boxed{\begin{aligned} E_\lambda(f) &= \big\{u \in E \,|\, f(u) = \lambda \cdot u\big\} \\ &= \big\{u \in E \,|\, (f - \lambda \mathrm{id})(u) = 0_E\big\} \\ &= \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres de } f \text{ associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \cup \{0_E\} \end{aligned}}$$

2) Cas des matrices carrées

- On appelle **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ, tout vecteur colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $AU = \lambda \cdot u$.
- On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\boxed{\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, AU = \lambda \cdot U\} \\ &= \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, (A - \lambda I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \\ &= \mathrm{Ker}\big(A - \lambda I_n\big) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres de } A \text{ associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \cup \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \end{aligned}}$$

Remarque

- On a vu précédemment que, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$ (l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est l'ensemble des valeurs propres de sa matrice représentative dans une base donnée).
- En revanche :

$$\begin{array}{ccc} E_\lambda(f) & \neq & E_\lambda(A) \\ \cap & & \cap \\ E & & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \end{array}$$

Exercice

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $\mathscr{B}' = (R_0, R_1, R_2) \in (\mathbb{R}_2[X])^3$ les polynômes définis par :

$$R_0(X) = 1, \quad R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2$$

1) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $(f(P))(X) = (X - 1)\ P'(X) + P(X)$.
Calculer $f(R_0)$, $f(R_1)$ et $f(R_2)$. Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
Déterminons $(f(R_2))(X)$.

$$\begin{aligned}(f(R_2))(X) &= (X-1)\ R_2'(X) + R_2(X)\\ &= (X-1)\ 2(X-1) + (X-1)^2 = 3\ (X-1)^2\\ &= 3\ R_2(X)\end{aligned}$$

Ainsi, $f(R_2) = 3 \cdot R_2$.
R_2 est vecteur propre de f, associé à la valeur propre 3.

De même : $f(R_0) = 1 \cdot R_0$ et $f(R_1) = 2 \cdot R_1$. Ainsi :
- × R_0 est vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.
- × R_1 est vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. □

2) Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $g(P) = P'$.
Calculer $g(P_0)$. Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
Déterminons $g(P_0)$.

$$g(P_0) \ = \ P_0' \ = \ 0_{\mathbb{R}_2[X]} \ = \ 0 \cdot P_0$$

Ainsi, $g(P_0) = 0 \cdot P_0$.
P_0 est vecteur propre de g, associé à la valeur propre 0. □

Exercice

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AU pour $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
Par calcul : $AU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $AU = 0 \cdot U$.
U est donc vecteur propre de A associé à la valeur propre 0. □

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer AU_i pour $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
Déterminons AU_i.

$$AU_1 = 2 \cdot U_1, \qquad AU_2 = 2 \cdot U_2$$

Ainsi, U_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et U_2 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.
En réalité, on a déjà fait ces calculs dans l'exercice précédent.
C'est même ce calcul qui nous a permis de démontrer que :

$$f(u_1) = 2 \cdot u_1 \quad \text{et} \quad f(u_2) = 2 \cdot u_2$$

□

Remarque

- Dans la définition de valeur propre λ de f, il est que le vecteur u tel que $f(u) = \lambda \cdot u$ doit être **non nul**. Ceci est primordial.
Sans cete hypothèse, tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$ serait valeur propre.
En effet, on peut toujours écrire :

$$f(0_E) = \lambda \cdot 0_E$$

Cette égalité ne permet **en aucun cas** de démontrer que λ est valeur propre de f.
- En revanche, la définition n'impose pas de contrainte particulière sur le réel λ qui peut tout à fait être nul. C'est d'ailleurs le cas pour l'application g de cet exercice. Comme $g(P_0) = 0 \cdot P_0$, le réel 0 est valeur propre de f et P_0 ($\neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$) est un vecteur propre associé à cette valeur propre 0.

II.2.b) Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres de sa matrice représentative dans une base

Théorème 1.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1) *Alors :* $\boxed{f(u) = \lambda \cdot u \;\Leftrightarrow\; AU = \lambda \cdot U}$

2) *En conséquence :*

λ est valeur propre de f $\Leftrightarrow$ λ est valeur propre de A

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)}$$

Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ $\Leftrightarrow$ *Le vecteur colonne U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ*

Le théorème stipule : $f(u) = \lambda \cdot u \;\Leftrightarrow\; AU = \lambda \cdot U$. Pour autant :

$$f(u) \cancel{=} A\, U$$

Il ne faut pas confondre :

× $f(u)$ qui est un vecteur de E,

× AU qui est un vecteur colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $(f(P))(X) = (X-1)\; P'(X) + P(X)$.

Enfin, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1. Notons $P(X) = 2 + X + 3X^2$. Déterminer $f(P)$.

2. Déterminer $A \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

1. On effectue le calcul :

$$\begin{aligned} (f(P))(X) &= (X-1)\; P'(X) + P(X) \\ &= (X-1)\;(1+6X) + (2 + X + 3X^2) \\ &= 1 - 4X + 9X^2 = (1 \cdot P_0 - 4 \cdot P_1 + 9 \cdot P_2)(X) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(P) = 1 \cdot P_0 - 4 \cdot P_1 + 9 \cdot P_2$.

2. D'après ce qui précède : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(P)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Enfin : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(P)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = A \times U$. □

II.3. Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme en pratique

II.3.a) Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Théorème 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*

$$\begin{array}{lcl} \textit{λ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \left\{0_E\right\} \\ & \Leftrightarrow & \textit{L'endomorphisme } f - \lambda\,\mathrm{id}_E \textit{ n'est pas injectif} \\ & \Leftrightarrow & \textit{L'endomorphisme } f - \lambda\,\mathrm{id}_E \textit{ n'est pas bijectif} \\ & \Leftrightarrow & \det\left(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\right) = 0 \end{array}$$

2) *Cas des matrices carrées*

$$\begin{array}{lcl} \textit{λ est valeur propre de } A & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \\ & \Leftrightarrow & \exists U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})},\ (A - \lambda\ I_n)\ U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \\ & \Leftrightarrow & \textit{La matrice } A - \lambda I_n \texttt{ N'est PAS } \textit{inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det\left(A - \lambda I_n\right) = 0 \end{array}$$

Remarque

Dans le cas particulier de la valeur propre 0, on obtient :

$$\begin{array}{lcl} \text{Le réel 0 est une valeur propre de } f & \Leftrightarrow & f \text{ n'est pas bijective} \\ & \Leftrightarrow & \det(f) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Le réel 0 est une valeur propre de } A & \Leftrightarrow & A \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(A) = 0 \end{array}$$

Démonstration.

1) Il s'agit de dérouler les définitions.

$$\begin{array}{lcl} \text{λ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } f(u) = \lambda \cdot u \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \left\{0_E\right\} \\ & \Leftrightarrow & \text{L'endomorphisme } f - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ n'est pas injectif} \\ & \Leftrightarrow & \text{L'application } f - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ n'est pas bijective} \\ & \Leftrightarrow & \det\left(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\right) = 0 \end{array}$$

Cette avant dernière équivalence est vérifiée car, sous les hypothèses :

× E est un espace vectoriel de dimension finie,

× $g \in \mathscr{L}(E)$.

on a : g injectif $\Leftrightarrow$ g surjectif $\Leftrightarrow$ g bijectif $\Leftrightarrow$ $\big(\det(g) \neq 0\big)$.
(on a la même conclusion sur $g \in \mathscr{L}(E, F)$ si E et F des $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie : $\dim(E) = \dim(F)$*)*

Et ainsi : g n'est pas injectif $\Leftrightarrow$ g n'est pas surjectif $\Leftrightarrow$ g n'est pas bijectif.
On conclut en appliquant ce résultat à $g = f - \lambda\,\mathrm{id}_E$. □

MÉTHODO

Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme (version initiale)

Dans les sujets, un endomorphisme f sera souvent représentée par sa matrice $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ dans une base $\mathscr{B}$ donnée. On détermine alors $\text{Sp}(f)$ en déterminant $\text{Sp}(A)$ ($\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$).

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } A \\ & \Leftrightarrow & \det\big(A - \lambda I_n\big) = 0 \end{array}}$$

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E.
On considère l'endomorphisme de $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de f.

2) Même question avec $E = \mathbb{R}^2$ et g l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique est : $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 \\ = 3 - 4\,\lambda + \lambda^2 + 1 \\ = 4 - 4\lambda + \lambda^2 \ = \ (2-\lambda)^2 \end{array}$$

$$B - \lambda I_3 \text{ non inversible} \ \Leftrightarrow\ \det(B - \lambda I_3) = 0 \ \Leftrightarrow\ (2-\lambda)^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(B) = \{2\}.}$$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rcl}
\det(A - \lambda\, I_3) & = & \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\[2ex]
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - (5-\lambda)\, L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2\, L_3}}{=} & \begin{vmatrix} 0 & 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\[2ex]
& = & (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \\ 6-\lambda & -8+2\lambda \end{vmatrix} \quad \textit{(en développant par rapport à la première colonne)} \\[2ex]
& \underset{L_2 \leftarrow L2 - L_1}{=} & \begin{vmatrix} 6-\lambda & -16+8\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 8-6\,\lambda+\lambda^2 \end{vmatrix} \\[2ex]
& = & (6-\lambda)\ (8 - 6\,\lambda + \lambda^2) \\
& = & (6-\lambda)\ (2-\lambda)\ (4-\lambda)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & \det\big(A - \lambda I_3\big) = 0 \\
& \Leftrightarrow & 6 - \lambda = 0 \ \texttt{OU}\ 2 - \lambda = 0 \ \texttt{OU}\ 4 - \lambda = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 6 \ \texttt{OU}\ \lambda = 2 \ \texttt{OU}\ \lambda = 4
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}.}$$

□

Remarque

- Dans cet exercice, on se rend compte que $\det\big(A - \lambda I_3\big)$ est un polynôme en λ. Plus précisément, si on note $P(X) = (6-X)(2-X)(4-X)$ alors $\det\big(A - \lambda I_n\big) = P(\lambda)$. Chercher les valeurs de λ telles que $A - \lambda I_n$ est non inversible c'est chercher les valeurs de λ telles que $P(\lambda) = 0$ autrement dit les racines du polynôme $P(X) = (6-X)(2-X)(4-X)$.

- C'est en réalité une remarque assez générale.

$$\begin{array}{rcl}
\lambda \text{ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } A \\
& \Leftrightarrow & \det\big(A - \lambda I_n\big) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine de } \det\big(A - X I_n\big) \\
& \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine de } \det\big(X I_n - A\big)
\end{array}$$

Dans la suite, on note $\chi_A(X) = \det\big(XI_n - A\big)$. Le polynôme χ_A est appelé polynôme caractéristique de A. Il a déjà introduit en exercice et son intérêt est que ses racines sont exactement les valeurs propres de A et donc de f (puisque $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On peut alors reprendre le calcul précédent.

$$\begin{array}{rcl}
\det\big(X\ I_3 - A\big) & = & \begin{vmatrix} X-5 & -1 & 1 \\ -2 & X-4 & 2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ -2 & X-4 & 2 \\ X-5 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (X-5)\,L_1}}{=} & (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-6 & -2X+8 \\ 0 & X-6 & 1+(X-5)(X-3) \end{vmatrix} \\
& = & \cancel{(-1)} \times (-1)^{1+1}\ \cancel{(-1)} \begin{vmatrix} X-6 & -2\,(X-4) \\ X-6 & X^2-8X+16 \end{vmatrix} \\
& = & (X-6) \begin{vmatrix} 1 & -2\,(X-4) \\ 1 & X^2-8X+16 \end{vmatrix} \\
& = & (X-6)\ (X^2-6X+8) \\
& = & (X-6)\ (X-2)\ (X-4)
\end{array}$$

II.3.b) Valeurs propres d'une matrice triangulaire / diagonale

Théorème 3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *La matrice A est triangulaire supérieure (resp. inférieure)* $\Rightarrow$ *Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux*

2) *La matrice A est diagonale* $\Rightarrow$ *Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux*

Démonstration.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Supposons que la matrice A est triangulaire.
Alors $A - \lambda I_n$ est elle aussi triangulaire. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\lambda \text{ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } A \\
& \Leftrightarrow & A - \lambda I_n \ \texttt{N'est PAS} \text{ inversible} \\
& \Leftrightarrow & \det\big(A - \lambda I_n\big) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \prod\limits_{i=1}^{n} (a_{i,i} - \lambda) \ = \ 0 \\
& \Leftrightarrow & a_{1,1} - \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \dots \ \texttt{OU} \ a_{n,n} - \lambda = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda \in \{a_{1,1}, \dots, a_{n,n}\}
\end{array}$$

2) Supposons que la matrice A est diagonale. En particulier elle est triangulaire. On conclut alors par la propriété ***1)***. □

II.4. Valeurs propres de matrices semblables

Théorème 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(M, N) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.

1. a) $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}(M) \ = \ \mathrm{rg}(N)}$

b) $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}(M) \ = \ \mathrm{tr}(N)}$

c) $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables} \quad \Rightarrow \quad \det(M) \ = \ \det(N)}$

2. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *:*

$$\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables} \quad \Rightarrow \quad \det(M - \lambda I_n) \ = \ \det(N - \lambda I_n)}$$

3. $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}(M) \ = \ \mathrm{Sp}(N)}$

Démonstration.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme M et N sont semblables, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Ainsi, il existe $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$.
(on présente ici la démonstration la plus théorique, il convient de savoir faire les démonstrations calculatoires et notamment de savoir calculer le déterminant / la trace d'un produit de matrices)

S'ensuit alors les résultats suivants.

1. Par définition de rang / du déterminant d'un endomorphisme :

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)\right) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)\right) = \mathrm{rg}(N)$$

$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)\right) = \mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)\right) = \mathrm{tr}(N)$$

$$\det(M) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)\right) = \det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)\right) = \det(N)$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} M - \lambda I &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) - \lambda \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathrm{id}_E) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\left(f - \lambda \mathrm{id}_E\right) \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\cdot)\textit{)} \end{aligned}$$

De même : $N - \lambda I = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) - \lambda \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}\left(f - \lambda \mathrm{id}_E\right)$.
Les matrices $M - \lambda I$ et $N - \lambda I$ représentent donc le même endomorphisme $f - \lambda \, \mathrm{id}_E$ respectivement dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. On en déduit que ces deux matrices sont semblables.
Ainsi, d'après ***1)*** : $\det(M - \lambda I) = \det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \det(N - \lambda I)$.

3. Il suffit de remarquer :

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ valeur propre de } M \\ \Leftrightarrow \quad & \det\left(M - \lambda \, I_n\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \det\left(N - \lambda \, I_n\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda \text{ valeur propre de } N \end{aligned}$$

□

`À RETENIR`

Deux matrices semblables ont même rang, trace, déterminant et mêmes valeurs propres.

II.5. Sous-espaces propres d'un endomorphisme

II.5.a) Structure vectorielle et dimension d'un sous-espace propre

Théorème 5.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Soit λ une valeur propre de f.

a. $\boxed{E_\lambda(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

b. $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$. *En particulier :* $\boxed{\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1}$

2) *Cas des matrices carrées*

Soit λ une valeur propre de A.

a. $\boxed{E_\lambda(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$

b. $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$. *En particulier :* $\boxed{\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1}$

Démonstration.

1) Soit λ une valeur propre de f.

- Par définition, $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.
  $E_\lambda(f)$ est alors un espace vectoriel en tant que noyau d'une application linéaire.
- λ étant une valeur propre de f, il existe $u \neq 0_E$ tel que $f(u) = \lambda \cdot u$.
  Autrement dit, $u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = E_\lambda(f)$.
  Ainsi, $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$ et $\dim(E_\lambda(f)) \neq 0$.
  On en déduit que $\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1$. □

II.5.b) Détermination d'un sous-espace propre

MÉTHODO **Déterminer $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à une valeur propre λ donnée**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Soit λ est une valeur propre de f.

On rappelle :

$$\boxed{\begin{aligned} u \in E_\lambda(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(u) = \lambda \cdot u \\ &\Leftrightarrow \quad (f - \lambda \,\mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda \, I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \end{aligned}}$$

On se ramène ainsi à la résolution d'un système linéaire.

Exercice

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de f.

2. Déterminer les sous-espaces propres correspondants.

3. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = ((2,1,0),(-1,0,1),(-1,-2,1))$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice représentative de f dans $\mathscr{B}'$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\det(X\ I_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-2 & 2 & -1 \\ -2 & X+3 & -2 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & X \\ -2 & X+3 & -2 \\ X-2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (X-2)\,L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & X \\ 0 & X-1 & -2+2X \\ 0 & 2X-2 & -1-(X-2)\,X \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times (-1)^{1+1}\ 1 \begin{vmatrix} X-1 & 2\,(X-1) \\ 2\,(X-1) & -X^2+2\,X-1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)\ (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 2\,(X-1) \\ 2 & -(X-1)^2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)\ (X-1)\ (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -(X-1) \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_1 - 2\,L_1}{=} (-1)\ (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -X-3 \end{vmatrix} \\
&= \cancel{(-1)}\ (X-1)^2\ \big(\cancel{-}\,(X+3)\big)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{\,\text{racines de } \chi_A\,\} = \{1, -3\}$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Déterminons $E_1(f)$.

$$\begin{aligned}
u \in E_1(f) &\iff (f - \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\
&\iff (A - I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -\,x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 +\ L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{\ x = 2y - z \right.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
E_1(f) &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \in E_1(f)\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\} \\
&= \{(2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \ \texttt{ET}\ \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \mid y \in \mathbb{R}\ \texttt{ET}\ \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\,((2, 1, 0),\ (-1, 0, 1))
\end{aligned}$$

- Déterminons $E_{-3}(f)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_{-3}(f) & \Longleftrightarrow & (f + 3\ \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\
& \Longleftrightarrow & (A + 3\ I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\,x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \\ -\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 5\,L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 5\,L_2 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & 4\,y & + & 8\,z & = & 0 \\ & & 8\,y & + & 16\,z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & 4\,y & + & 8\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcl} 5\,x & - & 2\,y & = & -\,z \\ & & y & = & -2\,z \end{array}\right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcl} 5\,x & & & = & -5\,z \\ & & y & = & -2\,z \end{array}\right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-3}(f) & = & \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \in E_{-3}(f)\} \\
& = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ ET } \ y = -2z\} \\
& = & \{(-z,-2z,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (-1,-2,1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((-1,-2,1)\right)
\end{array}$$

3. À vos stylos !

4. Notons $u = (2,1,0)$, $v = (-1,0,1)$ et $w = (-1,-2,1)$.

D'après ce qui précède :

× $f(u) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

× $f(v) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

× $f(w) = 0 \cdot u + 0 \cdot v - 3 \cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

On en déduit : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. □

Remarque

- Cet exercice a consisté à diagonaliser f. Autrement dit à trouver une base dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- Le lien entre les matrices représentatives de f dans les deux bases différentes est donné par :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\
\shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\
A & = & P & D & P^{-1}
\end{array}$$

II.5.c) Les sous-espaces propres sont en somme directe

Théorème 6.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et soit $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^p$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Les sous-espaces propres de f sont en somme directe (mais ne sont pas forcément supplémentaires !). En conséquence :

a) *Si λ_1, ..., λ_r sont les valeurs propres distinctes de f alors :*

$$\boxed{E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(f) \subset E}$$

En particulier : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{r} \dim\big(E_{\lambda_i}(f)\big) \leqslant \dim\big(E\big)}$

b)

Les vecteurs u_1, ..., u_p sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** *λ_1, ..., λ_p de f*	$\Rightarrow$	*La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre*

Ce résultat se généralise comme suit.

- *Soient λ_1, ..., λ_p des valeurs propres* **distinctes** *de f.*
- *Soient $\mathcal{F}_1$, ..., $\mathcal{F}_p$ des familles de vecteurs de E telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:*
  - $\times$ *les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.*
  - $\times$ *les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i.*

Alors la famille $\mathcal{F} = \big(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\big)$ (obtenue par concaténation des familles $\mathcal{F}_i$) est une famille libre de E.

2) *Cas des matrices carrées*

Les sous-espaces propres de A sont en somme directe (mais ne sont pas forcément supplémentaires !). En conséquence :

a) *Si λ_1, ..., λ_r sont les valeurs propres distinctes de A alors :*

$$\boxed{E_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(A) \subset \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

En particulier : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{r} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)}$

b)

Les vecteurs colonnes U_1, ..., U_p sont vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** *λ_1, ..., λ_p de A*	$\Rightarrow$	*La famille $(U_1, \dots, U_p)$ est libre*

Ce résultat se généralise comme suit.

- *Soient λ_1, ..., λ_p des valeurs propres* **distinctes** *de A.*
- *Soient $\mathcal{F}_1$, ..., $\mathcal{F}_p$ des familles de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:*
  - $\times$ *les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.*
  - $\times$ *les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i.*

Alors la famille $\mathcal{F} = \big(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\big)$ (obtenue par concaténation des familles $\mathcal{F}_i$) est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

II.5.d) Sous-espaces propres et stabilité

Théorème 7.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(f, g) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$.

Soit $(A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$.

1) *Cas des endomorphismes*

a) *Pour tout $u \neq 0_E$:*

$$\begin{array}{|ccc|} \hline \textit{u est un vecteur propre de} & & \textit{L'endomorphisme } f \\ \textit{l'endomorphisme } f & \Leftrightarrow & \textit{stabilise } \mathrm{Vect}\,(u) \\ \hline \end{array}$$

b) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big)$ est stable par f.*

c) $$\begin{array}{|ccc|} \hline \textit{Les endomorphismes} & & \textit{Les sous-espaces propres de} \\ f \textit{ et } g \textit{ commutent} & \Rightarrow & f \textit{ sont stables par } g \\ \hline \end{array}$$

2) *Cas des matrices carrées*

a) *Pour tout $U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$:*

$$\begin{array}{|ccc|} \hline \textit{U est un vecteur propre de} & & \textit{La matrice carrée } A \\ \textit{l'endomorphisme } A & \Leftrightarrow & \textit{stabilise } \mathrm{Vect}\,(U) \\ \hline \end{array}$$

b) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}\,\big(A - \lambda\, I_n\big)$ est stable par A.*

c) $$\begin{array}{|ccc|} \hline \textit{Les matrices} & & \textit{Les sous-espaces propres} \\ A \textit{ et } B \textit{ commutent} & \Rightarrow & \textit{de } A \textit{ sont stables par } B \\ \hline \end{array}$$

Remarque

- Considérons un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $p = \dim(F)$.
Il existe alors G sous-espace vectoriel de E tel que :

$$E = F \oplus G \qquad (*)$$

(si $\mathscr{B}_1 = (u_1, \dots, u_p)$ est une base de F, c'est une famille libre de E qu'on peut compléter en une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ de E ; il suffit alors de noter $G = \mathrm{Vect}\,(u_{p+1}, \dots, u_n)$ pour conclure)

- Alors, dans toute base $\mathscr{B}$ de E adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire dans toute base $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation d'une base $\mathscr{B}_F$ de F et d'une base $\mathscr{B}_G$ de G), la amtrice représentative de f s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right)$$

où :

× $A = \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$,

× $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$,

× $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

On peut de plus préciser : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\Big(f\,\|_F\Big)$.

- Si on ajoute l'hypothèse que l'espace vectoriel G est lui aussi stable par f, alors, dans toute base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $(*)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & (0) \\ \hline (0) & C \end{array}\right)$$

III. Polynômes annulateurs

III.1. Rapide retour sur la notion de polynômes

Définition

- Un polynôme <u>non nul</u> P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un élément de la forme :

$$\boxed{P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0}$$

  où :
  × $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$,
  × les éléments du $(n+1)$-uplet $(a_0, \dots, a_n)$ sont appelés les **coefficients** de P,
  × l'élément X est l'**indéterminée** du polynôme P,
  × n est appelé le **degré** de P et on note $\boxed{n = \deg(P)}$,
  × pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i X^i$ est un **terme** du polynôme P,
  × l'élément $a_n X^n$ est le **terme de plus haut degré** du polynôme,
  × a_n est donc le coefficient du terme de plus haut degré de P,
  × a_0 est appelé le **terme constant** de P.
- Un polynôme non nul P est constant s'il est de degré 0 (il est donc de la forme $P = a_0$ où $a_0 \neq 0$).
- Parmi les polynômes constants, on distingue le polynôme nul $P = 0$.
  Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$ ($\deg(0) = -\infty$).
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $\boxed{\deg(P \times Q) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)}$
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $\boxed{\deg\big(P + Q\big) \ \leqslant \ \max(\deg(P), \deg(Q))}$
- On appelle fonction polynomiale associée à P la fonction

$$\begin{array}{rccl} P & : & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array}$$

  (on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée)

- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et d'indéterminée X et $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à n.
- Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si :
  × ils sont de même degré,
  $(\deg(P) = \deg(Q))$
  × les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux.
  $(\forall i \in [\![1, n]\!], \ a_i = b_i)$
- On appelle racine d'un polynôme P tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $P(\alpha) = 0$.

Théorème 8.

- **Division euclidienne**
  Pour tout $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que $B \neq 0$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$A = B \times Q + R \quad \textit{et} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

  (Q est appelé quotient et R est appelé reste)

- $$\boxed{\begin{array}{rcl} \alpha \in \mathbb{K} \textit{ est racine de } P & \Leftrightarrow & X - \alpha \textit{ divise } P \\ & \Leftrightarrow & \exists Q \in \mathbb{K}[X], \ P(X) = (X - \alpha) \ Q(X) \end{array}}$$

- *Soit $m \in \mathbb{K}^m$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m$.*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \begin{array}{r}\textit{Les éléments } \alpha_1, \ \dots, \ \alpha_m \\ \textit{sont racines de } P\end{array} & \Leftrightarrow & \prod\limits_{i=1}^{m} (X - \alpha_i) \textit{ divise } P \\ & \Leftrightarrow & \exists Q \in \mathbb{K}[X], \ P(X) = \Big(\prod\limits_{i=1}^{m} (X - \alpha_i) \Big) \ Q(X) \end{array}}$$

- $\boxed{\textit{Tout polynôme } P \in \mathbb{K}_n[X] \textbf{ non nul } \textit{admet au plus } n \textit{ racines distinctes}}$

Théorème 9. *(multiplicité d'une racine : définition et résultats)*

- *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$.
  On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ *est racine de multiplicité* m *(ou d'ordre* m*) si :*
  - $\times$ $(X-\alpha)^m$ *divise* P,
  - $\times$ $(X-\alpha)^{m+1}$ *ne divise pas* P.

  Une racine d'un polynôme P *est dite simple si elle est de multiplicité* 1.

- $\boxed{\text{L'élément } \alpha \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X-\alpha)^m\ Q(X) \text{ et } Q(\alpha) \neq 0}$

- $\boxed{P \in \mathbb{K}[X] \text{ est de degré } n \Rightarrow P \text{ admet au plus } n \text{ racines comptées avec multiplicité}}$

- $\boxed{\text{L'élément } \alpha \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m \Leftrightarrow P(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(n)}(\alpha) \neq 0}$

- *On dit qu'un polynôme est scindé s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré* 1.

$$\boxed{P \in \mathbb{K}[X] \text{ est scindé} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \exists m \in \mathbb{N}^*,\ \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m, \\ \exists \alpha \neq 0 \\ P = \alpha\ (X-\alpha_1) \times \ldots \times (X-\alpha_m) \end{array}}$$

Il est à noter que dans cette décomposition, les éléments α_i *ne sont pas forcément distincts. En regroupant les termes faisant apparaître les racines égales, on obtient alors :*

$$P = \alpha\ (X-\lambda_1)^{m_1} \times \ldots (X-\lambda_r)^{m_r}$$

Théorème 10. *(décomposition d'un polynômes en facteurs irréductibles)*

- **Théorème de d'Alembert-Gauss**

$$\boxed{\text{Tout polynôme } P \in \mathbb{K}[X] \text{ non constant admet (au moins) une racine dans } \mathbb{C}}$$

En conséquence : $\boxed{\text{Les polynômes de } \mathbb{C}[X] \text{ sont scindés}}$

$$\boxed{\text{Tout polynôme } P \in \mathbb{C}[X] \text{ de degré } n \text{ admet } n \text{ racines (comptées avec multiplicité)}}$$

- **Factorisation en produit de facteurs irréductibles dans** $\mathbb{R}[X]$
  - $\boxed{\text{Tout polynôme } P \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré impair admet (au moins) une racine réelle}}$

  $$\boxed{\alpha \in \mathbb{C} \text{ une racine du polynôme } P \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow \bar{\alpha} \text{ est racine de } P \text{ de même multiplicité que } \alpha}$$

  En particulier, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ *peut s'écrire comme produit de polynômes de* $\mathbb{C}[X]$ *de degré* 1.

  - *Tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *peut s'écrire sous la forme :*

  $$P = a\ (X-\alpha_1)^{m_1} \times \ldots \times (X-\alpha_r)^{m_r} \times Q_1^{n_1} \times \ldots \times Q_s^{n_s}$$

  où :
  - $\times$ $a \in \mathbb{R}$,
  - $\times$ α_1, ..., α_r *sont les racines de* P *de multiplicités respectives* $m_1 \in \mathbb{N}^*$, ..., $m_r \in \mathbb{N}^*$
  - $\times$ Q_1, ..., Q_s *sont des polynômes de degré* 2 *de discriminants strictement négatifs.*

  Il est à noter que, pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, *il existe* $\beta_k \in \mathbb{C}$ *tel que :*

  $$Q_k \quad = \quad \left(X - \beta_k\right) \times \left(X - \overline{\beta_k}\right) \quad = \quad X^2 - \left(\beta_k + \overline{\beta_k}\right) X + \beta_k\ \overline{\beta_k}$$

III.2. Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k \ X^k$$

1) Cas des endomorphismes

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k$.

C'est un polynôme d'endomorphimsmes.

2) Cas des matrices carrées

On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $P(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k A^k$.

C'est un polynôme de matrices.

Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f))$$

III.3. Composée de polynômes d'endomorphismes

Théorème 11.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{(P \times Q)(f) \ = \ P(f) \circ Q(f) \ = \ Q(f) \circ P(f)}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{(P \times Q)(A) \ = \ P(A) \times Q(A) \ = \ Q(A) \times P(A)}$$

Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$(PQ)(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f) \circ Q(f))$$

Exemple
Considérons $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Notons $P(X) = X^2 - 2X$. On a alors :

$$P(f) = f^2 - 2f \quad \text{et} \quad P(A) = A^2 - 2A$$

- Notons $Q(X) = X^2 - 2X + 3$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} Q(f) & = & f^2 - 2f + 3f^0 \\ & = & f^2 - 2f + 3\mathrm{id}_E \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} Q(A) & = & A^2 - 2A + 3A^0 \\ & = & A^2 - 2A + 3I_n \end{array}$$

Pour déterminer $P(f)$ (resp. $P(A)$), il suffit de remplacer l'indéterminée X par f (resp. par A). Il faut cependant faire attention : cette stratégie ne fonctionne que si l'on considère que le terme constant du polynôme est le coefficient devant X^0.

- Notons $R(X) = (X - 1)(-2 + 3X^2)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} R(f) & = & (f - f^0)(-2f^0 + 3f^2) \\ & = & (f - \mathrm{id}_E)(-2\mathrm{id}_E + 3f^2) \end{array}$$

Et :

$$\begin{array}{rcl} R(A) & = & (A - A^0)(-2A^0 + 3A^2) \\ & = & (A - I_n)(-2I_n + 3A^2) \end{array}$$

- Enfin, si $T(X) = 0$ alors :

$$T(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad T(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

III.4. Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Cas des endomorphismes
On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Remarque

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ est une base de l'$\mathbb{K}$-ev E (de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors :

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Leftrightarrow\; P(A) = 0$$

(via la passerelle endomorphisme-matrice)

- On en déduit :

P est un polynôme annulateur de f	$\Leftrightarrow$	P est un polynôme annulateur de A

Exemple

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ où (avec $E = \mathbb{R}_2[X]$) dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 et vérifier que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.

Démonstration.

1) Calculons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \; 2A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \; -3I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et on a bien $A^2 + 2A - 3I = 0$.

2) L'égalité $A^2 + 2A - 3I = 0$ entraîne $\frac{1}{3}(A + 2I)\, A = I$.

On en déduit que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I)$. □

`MÉTHODO` **Démontrer que f est bijective à l'aide d'un polynôme annulateur dont le coefficient constant est non nul**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose que f admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}[X]$ dont le coefficient constant est non nul. Autrement dit, P est de la forme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^i \quad \text{et} \quad a_0 \neq 0$$

Comme $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors : $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\ f^i = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

$$\begin{array}{ll} \text{Ainsi} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\ f^i = -a_0\ \mathrm{id}_E \\ \text{donc} & f \circ \left(\dfrac{1}{a_0} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\ f^i \right) = \mathrm{id}_E \end{array}$$

On en déduit que f est inversible d'inverse $f^{-1} = \dfrac{1}{a_0} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\ f^i$.

III.5. Existence d'un polynôme annulateur non nul

Théorème 12.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*
Il existe un polynôme annulateur **non nul** *de f.*

2) *Cas des matrices carrées*
Il existe un polynôme annulateur **non nul** *de A.*

Démonstration.
Considérons la famille $(A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n^2})$.
Cette famille contient n^2+1 éléments dans l'$\mathbb{K}$-ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie n^2. On en déduit que cette famille est liée.
Il existe donc un (n^2+1)-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que :

$$\alpha_0 \, A^0 + \ldots + \alpha_{n^2} \, A^{n^2} \; = \; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

Le polynôme P défini par $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \alpha_k \, X^k$ est donc un polynôme annulateur non nul de A. □

Remarque
En fait, toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur non nule de degré inférieur ou égal à n. On verra ce résultat dans la suite du cours.

III.6. Intérêt des polynômes annulateurs

Théorème 13.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) *Cas des endomorphismes*
Si P est un polynôme annulateur de f alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } f \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \ \subset \ \{\textit{racines de } P\}}$

2) *Cas des matrices carrées*
Si P est un polynôme annulateur de A alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } A \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \{\textit{racines de } P\}}$

Démonstration.
Soit λ une valeur propre de A et U un vecteur propre associé.

- Démontrons tout d'abord par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \ A^k \times U = \lambda^k \cdot U$.
  1) **Initialisation** :
  - × D'une part $A^0 U = I \times U = U$.
  - × D'autre part $\lambda^0 U = 1 \cdot U = U$.

  On a bien $A^0 U = \lambda^0 U$.

  2) **Hérédité** :
  Soit $k \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $A^k U = \lambda^k U$ et démontrons que $A^{k+1} U = \lambda^{k+1} U$.

$$A^{k+1} U \ = \ A(A^k U) \ = \ A(\lambda^k U) \ = \ \lambda^k A U \ = \ \lambda^k \lambda \cdot U \ = \ \lambda^{k+1} U$$

- Considérons un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
  Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k X^k$.
  Ainsi $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k \; A^k$ et en conséquence :

$$\begin{aligned} P(A)\; U &= \left(\sum_{k=0}^{r} a_k \; A^k\right) U = \sum_{k=0}^{r} a_k \; A^k U = \sum_{k=0}^{r} a_k \; \lambda^k U \\ &= \left(\sum_{k=0}^{r} a_k \; \lambda^k\right) U = P(\lambda)\; U \end{aligned}$$

- Si P est un polynôme annulateur de A, on sait de plus : $P(A) = 0$.
  On en déduit que : $P(A)\; U = 0 \cdot U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Ainsi :

$$P(\lambda)\; U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

Or $U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ puisque c'est un vecteur propre de A. Ainsi $P(\lambda) = 0$. □

Exercice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exercice précédent.

On a démontré que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur.
Que peut-on déduire ?

Démonstration.

- $P(X) = X^2 + 2X - 3 = (X-1)\;(X+3)$.
  Le polynôme P a deux racines : 1 et -3. On en déduit que :

$$\mathrm{Sp}(A) \;\subset\; \{1, -3\}$$

- Pour déterminer si 1 (resp. -3) est valeur propre de A, on utilise la caractérisation classique :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \quad \Leftrightarrow \quad A - \lambda\; I_3 \text{ non inversible}$$

- Or :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A + 3\; I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - I_3$ est non inversible car $C_1 = C_3$ (donc $\mathrm{rg}(A - I_3) < 3$).
La matrice $A + 3\; I_3$ est non inversible car $C_1 = -2\; C_2 + C_3$. □

Ce résultat n'est en aucun cas une équivalence !

$$\lambda \text{ une valeur propre de } A \;\cancel{\Longleftrightarrow}\; \lambda \text{ est une racine de } P$$

Si on reprend l'exemple précédent, puisque P est un polynôme annulateur de A, alors, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $R_\beta(X) = (X - \beta)\; P(X)$ est un polynôme annulateur de A :

$$R_\beta(A) = (A - \beta\; I)\; P(A) = 0$$

Mais β racine de R_β ne démontre pas que β est valeur propre de A.
Sinon tout β serait valeur propre de A et on aurait ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \mathbb{R}$.

IV. Polynôme caractéristique

IV.1. Définition

Définition *(Polynôme caractéristique d'un endomorphisme / d'une matrice)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f, le polynôme défini par :

$$\chi_f(X) \ = \ \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) \ = \ (-1)^n \det\big(f - X\,\mathrm{id}_E\big)$$

2) Cas des matrices carrées

- On appelle **polynôme caractéristique** de A, et on note χ_A, le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) \ = \ \det\big(X\,I_n - A\big) \ = \ (-1)^n \det\big(A - X\,I_n\big)$$

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\chi_f(X) \ = \ \chi_A(X)$$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Bien comprendre cette définition

- On a vu précédemment que deux matrices semblables ont même trace et même déterminant. Ces deux propriétés sont essentielles pour définir la trace d'un endomorphisme et le déterminant d'un endomorphisme. Plus précisément :
  - × le déterminant d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est le déterminant de n'importe quelle représentation matricielle de f ($\det(f) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)$ où $\mathscr{B}$ est une base de E).

    (profitons-en pour rappeler : $\forall (A,B) \in \Big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\Big)^2$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$*)*
  - × la trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est la trace de n'importe quelle représentation matricielle de f ($\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)$ où $\mathscr{B}$ est une base de E).

    (profitons-en pour rappeler : $\forall (A,B) \in \Big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\Big)^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$*)*
- Deux matrices semblables ont aussi même polynôme caractéristique. Cela provient essentiellement du fait que deux matrices semblables ont même déterminant.
  On peut faire de nouveau cette démonstration.
  Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$. On a alors :

$$\begin{array}{lccccc}
 & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) & = & P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) & P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} \\
\text{donc} & M & = & P & N & P^{-1} \\
\text{donc} & M - X\cdot I_n & = & P & \big(N - X\cdot I_n\big) & P^{-1} \\
\text{donc} & \det\big(M - X\cdot I_n\big) & = & \det\Big(P & \big(N - X\cdot I_n\big) & P^{-1}\Big) \\
\text{donc} & \chi_M(X) & = & \det(P) & \det\big(N - X\cdot I_n\big) & \det\big(P^{-1}\big) \\
 & & = & \det(P) & \det\big(N - X\cdot I_n\big) & \dfrac{1}{\det(P)}
\end{array}$$

- Cette propriété est celle qui permet de définir la notion de polynôme caractéristique d'un endomorphisme f. Par définition, χ_f est le polynôme caractéristique de n'importe quelle représentation matricielle de f. Si $\mathscr{B}$ est une base de E :

$$\begin{array}{rcll}
\chi_f(X) & = & \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) & \\
& = & \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big)\big) & \textit{(par définition du déterminant d'un endomorphisme)} \\
& = & \det\big(X\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) & \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \textit{ est une application linéaire)} \\
& = & \det\big(X\ I_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) & \\
& = & \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X) &
\end{array}$$

IV.2. Polynôme caractéristique et $\mathbb{K}$-ev stable

IV.2.a) Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur un $\mathbb{K}$-ev stable F

Théorème 14.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.
On note $f\|_F$ l'endomorphisme induit par f sur F. Alors :

$$\boxed{\chi_{f\|_F} \text{ divise } \chi_f}$$

Démonstration.

- Comme E est de dimension finie, F admet un supplémentaire dans E.

$$E = F \oplus G$$

On note $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ une base adaptée à cette décomposition (obtenue par concaténation d'une base $\mathscr{B}_F$ de F et d'une base $\mathscr{B}_G$ de G).

- Alors :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right)$$

où $A \in \mathscr{M}_{\dim(F)}(\mathbb{K})$. On peut être plus précis : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f\|_F)$.

- Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\chi_f(X) & = & \det(X\ I_n - M) \\
& = & \left|\begin{array}{c|c} X\,I_p - A & -B \\ \hline (0) & X\,I_{n-p} - C \end{array}\right| \\
& = & \det(X\ I_p - A) \times \det(X\ I_{n-p} - C) \\
& = & \chi_A(X) \times \det(X\ I_{n-p} - C)
\end{array}$$

□

IV.2.b) Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 15.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*
La polynôme caractéristique χ_f de f est un polynôme annulateur de f, c'est-à-dire :

$$\boxed{\chi_f(f) \ = \ 0_{\mathscr{L}(E)}}$$

2) *Cas des matrices carrées*
Le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme annulateur de A, c'est-à-dire :

$$\boxed{\chi_A(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}$$

Démonstration.

- Il s'agit de montrer que $\forall\, x \in E$, $\chi_f(f)(x) = 0_E$. C'est clair pour $x = 0_E$, donc on suppose $x \neq 0_E$.
- On note alors $p \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier tel que la famille

$$\mathscr{B}_x = \big(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\big)$$

  est libre, de sorte que le sous-espace $F = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_x)$ est stable par f, et que la matrice de l'endomorphisme induit f_F dans la base $\mathscr{B}_x$ de F est la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

  où $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ sont tels que $f^p(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k\ f^k(x)$.
- Par propriété précédente (théorème...), on sait que χ_C divise χ_f, donc il suffit de montrer que $\chi_C(f)(x) = 0_E$.
- Or un calcul direct montre que $\chi_C = X^p - \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k\ X^k$ (via l'opération $L_1 \leftarrow \sum\limits_{k=1}^{p} X^{k-1}\ L_k$). Ainsi, $\chi_C(f)(x) = f^p(x) - \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k\ f^k(x) = 0_E$.

□

IV.3. Calcul du polynôme caractéristique

IV.3.a) Expression générale

Théorème 16.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{\textit{Le polynôme } \chi_f \textit{ est unitaire de degré } n}$$

$$\boxed{\textit{Le coefficient devant } X^{n-1} \textit{ dans } \chi_f \textit{ est } -\mathrm{tr}(f)}$$

$$\boxed{\textit{Le coefficient constant de } \chi_f \textit{ est } (-1)^n\ \det(f)}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\chi_f(X) = X^n - \mathrm{tr}(f)\ X^{n-1} + \ldots + (-1)^n\ \det(f)}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{\textit{Le polynôme } \chi_A \textit{ est unitaire de degré } n}$$

$$\boxed{\textit{Le coefficient de } X^{n-1} \textit{ dans } \chi_A \textit{ est } -\mathrm{tr}(A)}$$

$$\boxed{\textit{Le coefficient constant de } \chi_A \textit{ est } (-1)^n\ \det(A)}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\chi_A(X) = X^n - \mathrm{tr}(A)\ X^{n-1} + \ldots + (-1)^n\ \det(A)}$$

Démonstration.

1) • Pour comprendre l'idée de la démonstration, commençons par l'illustrer sur une matrice carrée d'ordre 3.

$$\det\big(X\, I_3 - A\big) = \begin{vmatrix} X-a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ -a_{2,1} & X-a_{2,2} & -a_{2,3} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & X-a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= \big(X-a_{1,1}\big) \begin{vmatrix} X-a_{2,2} & -a_{2,3} \\ -a_{3,2} & X-a_{3,3} \end{vmatrix}$$ *($(X-a_{1,1})$ est multiplié par un mineur qui est un polynôme de degré 2)*

$$- \ (-a_{2,1}) \begin{vmatrix} -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ -a_{3,2} & X-a_{3,3} \end{vmatrix}$$ *($-a_{2,1}$ est multiplié par un mineur qui est un polynôme de degré 1)*

$$+ \ (-a_{3,1}) \begin{vmatrix} -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ X-a_{2,2} & -a_{2,3} \end{vmatrix}$$ *($-a_{3,1}$ est multiplié par un mineur qui est un polynôme de degré 1)*

Le premier élément de la somme ci-dessus est un polynôme de degré 3 et les deux autres sont des polynômes de degré 1. En développant le mineur apparaissant en 1ère ligne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} X-a_{2,2} & -a_{2,3} \\ -a_{3,2} & X-a_{3,3} \end{vmatrix} = \big(X-a_{2,2}\big)\ \big(X-a_{3,3}\big) - (-a_{3,2})\ (-a_{2,3})$$

Finalement, on obtient :

$$\det\big(X\, I_3 - A\big) = \big(X-a_{1,1}\big)\ \big(X-a_{2,2}\big)\ \big(X-a_{3,3}\big) + Q(X)$$

où Q est un polynôme de degré au plus 1 (car obtenu par somme de tels polynômes). On en déduit alors :

$$\det\big(X\, I_3 - A\big) = X^3 - (a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3})\, X^2 + R(X)$$

où R est un polynôme de degré au plus 1. On retrouve bien que χ_A est un polynôme unitaire de degré 3 et que le coefficient devant X^2 est $-\operatorname{tr}(A)$.

• La démonstration se généralise aux matrices carrées d'ordre n.

$$\begin{array}{rcrcl} \det\big(X\, I_n - A\big) & = & \multicolumn{3}{l}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\ a_{k,1} \times \Delta_{k,1}\big(X\, I_n - A\big)} \\ & = & \big(X-a_{1,1}\big) & \times & \Delta_{1,1}\big(X\, I_n - A\big) \\ & - & (-a_{2,1}) & \times & \Delta_{2,1}\big(X\, I_n - A\big) \\ & \vdots & & & \\ (-1)^{n+1} & & (-a_{n,1}) & \times & \Delta_{n,1}\big(X\, I_n - A\big) \end{array}$$

On remarque alors que :

× le polynôme $\Delta_{1,1}\big(X\, I_n - A\big)$ est de degré $n-1$.

× pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, le polynôme $\Delta_{j,1}\big(X\, I_n - A\big)$ est de degré $n-2$.

(on le démontrerait rigoureusement par récurrence)

En développant récursivement $\Delta_{1,1}\big(X\, I_n - A\big)$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \det\big(X\, I_n - A\big) &= \big(X-a_{1,1}\big) \times \ldots \times \big(X-a_{n,n}\big) + Q(X) \\ &= X^n - \big(a_{1,1}+\ldots+a_{n,n}\big)\ X^{n-1} + R(X) \end{aligned}$$

où Q et R sont des polynômes de degré au plus $n-2$.

• Pour ce qui est du coefficient constant de χ_A la démonstration est plus simple car il n'est autre que $\chi_A(0) = \det\big(-A\big) = (-1)^n\ \det(A)$. □

IV.3.b) Cas particulier des matrices triangulaires / diagonales

Théorème 17.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note : $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

$$\boxed{A \text{ triangulaire} \quad \Rightarrow \quad \chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-a_{i,i})}$$

$$\boxed{A \text{ diagonale} \quad \Rightarrow \quad \chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-a_{i,i})}$$

IV.4. Liens entre polynôme caractéristique et éléments propres

IV.4.a) Les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme sont ses valeurs propres

Théorème 18.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) *Cas des endomorphismes*

a) *Le polynôme caractéristique permet de déterminer les valeurs propres*

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } f \quad &\Leftrightarrow \quad \det(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (-1)^n \ \chi_f(\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est racine de } \chi_f \end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) \ = \ \{\text{racines de } \chi_f\}}$$

On appelle alors **multiplicité** *d'une valeur propre λ de f sa multiplicité en tant que racine de χ_f. Ce nombre sera noté $m_\lambda(f)$ dans la suite.*

b) *Majoration du nombre de valeurs propres*

L'endomorphisme f admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité

Comme χ_f est de degré n, on en déduit immédiatement :

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} m_\lambda(f) \ \leqslant \ n}$$

(il y a égalité si le polynôme caractéristique χ_f est scindé)

c) *Minoration du nombre de valeurs propres*

Tout endomorphisme f admet au moins une valeur propre complexe

Si l'espace vectoriel E est de dimension n impair alors tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ admet au moins une valeur propre réelle

2) *Cas des matrices carrées*

a) *Le polynôme caractéristique permet de déterminer les valeurs propres*

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A \quad &\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (-1)^n \ \chi_A(\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est racine de } \chi_A \end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \ = \ \{\text{racines de } \chi_A\}}$$

On appelle **multiplicité** *d'une valeur propre de A sa multiplicité en tant que racine de χ_A. Ce nombre sera noté $m_\lambda(A)$ dans la suite.*

b) *Majoration du nombre de valeurs propres*

La matrice A admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité

Comme χ_A est de degré n, on en déduit immédiatement :

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A) \ \leqslant \ n}$$

(il y a égalité si le polynôme caractéristique χ_A est scindé)

c) Minoration du nombre de valeurs propres

Toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet au moins une valeur propre complexe

Si n est impair alors toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet au moins une valeur propre réelle

3) Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{\textit{racines de } \chi_f\} = \{\textit{racines de } \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}\} = \mathrm{Sp}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)}$$

IV.4.b) Polynôme caractéristique et sous-espaces propres

Théorème 19.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

$$\boxed{\lambda \textit{ de multiplicité } m \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant \dim\left(E_\lambda(f)\right) \leqslant m}$$

En particulier : $\boxed{\lambda \textit{ racine simple de } \chi_f \quad \Rightarrow \quad \dim\left(E_\lambda(f)\right) = 1}$

2) Cas des matrices carrées

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

$$\boxed{\lambda \textit{ de multiplicité } m \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leqslant m}$$

En particulier : $\boxed{\lambda \textit{ racine simple de } \chi_A \quad \Rightarrow \quad \dim\left(E_\lambda(A)\right) = 1}$

Démonstration.

- On note $F = E_\lambda(f)$ (de dimension p) et g l'endomorphisme induit par f sur F. Alors :
  × $\chi_{f_{|F}}(X) = (X - \lambda)^p$
  × $\chi_f(X) = (X - \lambda)^{m(\lambda)}\ R(X)$
- Comme $\chi_{f_{|F}}$ divise χ_f ...

□

Remarque

- Il ne faut pas confondre multiplicité et dimension du sep associé. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V. Théorèmes de réduction

V.1. Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

V.1.a) Définition

Définition *(Endomorphisme / matrice carrée diagonalisable)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- Autrement dit, $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonalisable** s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f est diagonalisable.

Démontrer que f^2 est diagonalisable.

Démonstration.
L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D$ où D est une matrice diagonale.
Il suffit alors de remarquer que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D \times D = D^2$$

D'où f^2 diagonalisable. □

V.1.b) Caractérisation de la diagonalisabilité

Théorème 20.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1) Cas des endomorphismes

f est diagonalisable	$\Leftrightarrow$	*il existe une base de E formée de vecteurs propres de f*

2) Cas des matrices carrées

A est diagonalisable	$\Leftrightarrow$	*il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A*

3) Lien entre endomorphisme et représentation matricielle Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque
Dans les énoncés, on donne généralement f sous une forme matricielle A. Il faut savoir jongler entre les différentes représentations en fonction des exigences de l'énoncé.

Démonstration.

1) f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1{}', \dots, e_n{}')$ pour laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
Autrement dit, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1{}', \dots, e_n{}')$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1{}') & = & \lambda \cdot e_1{}' + 0 \cdot e_2{}' + \dots + 0 \cdot e_{n-1}{}' + 0 \cdot e_n{}' \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_n{}') & = & 0 \cdot e_1{}' + 0 \cdot e_2{}' + \dots + 0 \cdot e_{n-1}{}' + \lambda_n \cdot e_n{}' \end{array}$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1{}', \dots, e_n{}')$ formée de vecteurs propres de f
($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de f)

3) f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}'$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}'$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que :

$$P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = D$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}'$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times D \times (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$$

$\Leftrightarrow$ A est diagonalisable

2) Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
Rappelons que :

$$u \in E_\lambda(f) \ \Leftrightarrow\ U \in E_\lambda(A)$$

Ainsi :

$$\boxed{u \text{ est un vecteur propre de } f \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ est un vecteur propre de } A.}$$

Si on considère une famille $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ alors :

$$\begin{array}{rl} & \alpha_1 \ u_1 + \dots + \alpha_n \ u_n = 0_E \\ \Leftrightarrow & \alpha_1 \ U_1 + \dots + \alpha_n \ U_n = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \end{array}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a noté : $U_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$.
De sorte que :

$$\boxed{(u_1, \dots, u_n) \text{ est libre dans } E \quad \Leftrightarrow \quad (U_1, \dots, U_n) \text{ est libre dans } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

On en déduit, à l'aide du point ***3)*** :

A est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ il existe une base $(u_1, \dots, u_n)$ formée de vecteurs propres de f

$\Leftrightarrow$ il existe une base $(U_1, \dots, U_n)$ formée de vecteurs propres de A

Remarque
Dans le point ***1)***, on démontre que $f(e_i{}') = \lambda_i \cdot e_i{}'$.
Ceci signifie que $e_i{}' \in E_{\lambda_i}(f)$ mais pas forcément que $e_i{}'$ est un vecteur propre de f. Il faut en plus démontrer que $e_i{}' \neq 0_E$. Or $\mathscr{B}'$ étant une base, elle ne peut contenir 0_E (toute famille contenant 0_E est liée).

□

À RETENIR

- Dans les énoncés, l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est généralement donné par A sa matrice représentative dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ donnée.
- Diagonaliser f, c'est trouver une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ dans laquelle la matrice représentative de f, notée D, est diagonale. Plus précisément :
  × cette base $\mathscr{B}'$ est constituée de vecteurs propres de f.
  × la matrice D a pour coefficients diagonaux les valeurs propres de f. Ces valeurs propres apparaissent dans l'ordre de classement des vecteurs propres apparaissant dans $\mathscr{B}'$.
- La formule de changement de base permet de faire le lien entre tous ces objets :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ A & = & P & D & P^{-1} \end{array}$$

La matrice P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Elle est obtenue en concaténant les matrices colonnes représentatives, dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs propres de f. Plus précisément :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1) \quad \dots \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_n)\Big)$$

Exercice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable.

Soit B une matrice semblable à A.

Démontrer que B est diagonalisable.

Démonstration.

1) En détaillant les formules

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

Comme A et B sont semblables, il existe $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que :

$$A = QBQ^{-1}$$

On en déduit :

$$QBQ^{-1} = PDP^{-1} \quad \text{et donc} \quad B = Q^{-1}P\ D\ P^{-1}Q$$

Et ainsi $B = Q^{-1}P\ D\ (Q^{-1}P)^{-1}$.

2) À l'aide de la passerelle endomorphisme-matrice (plus élégant)

- Comme A et B sont semblables, elles représentent le même endomorphisme, noté $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes.
- Or A est diagonalisable donc f l'est (sens réciproque du point ***3)*** du théorème précédent).
- Comme f est diagonalisable, B l'est (c'est le sens direct du point ***3)*** du théorème précédent).

□

V.2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

V.2.a) Critère de diagonalisabilité et sous-espaces propres en somme directe

Théorème 21.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f.

	L'endormorphisme f est diagonalisable
$\Leftrightarrow$	*Il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale*
$\Leftrightarrow$	*Il existe une base de E constituée* DE *vecteurs propres de f*
$\Leftrightarrow$	$E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f)$
$\Leftrightarrow$	$\dim(E) = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim\left(E_{\lambda_i}(f)\right)$

2) *Cas des matrices carrées*

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A.

	La matrice carrée A est diagonalisable
$\Leftrightarrow$	*La matrice A est semblable à une matrice diagonale*
$\Leftrightarrow$	*Il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée* DE *vecteurs propres de A*
$\Leftrightarrow$	$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(A)$
$\Leftrightarrow$	$\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right)$

V.2.b) Critère de diagonalisabilité et polynôme caractéristique

Théorème 22.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f.

L'endormorphisme f est diagonalisable

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \bullet\ \forall i \in [\![1, r]\!],\ \dim\left(E_{\lambda_i}(f)\right) = m_{\lambda_i}(f) \end{cases}$$

2) *Cas des matrices carrées*

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A.

La matrice carrée A est diagonalisable

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \bullet\ \forall i \in [\![1, r]\!],\ \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) = m_{\lambda_i}(A) \end{cases}$$

V.2.c) Critère de diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Théorème 23.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

f est diagonalisable	$\Leftrightarrow$	*f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples*
	$\Leftrightarrow$	*$\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f*

2) Cas des matrices carrées

A est diagonalisable	$\Leftrightarrow$	*A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples*
	$\Leftrightarrow$	*$\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A*

Corollaire 1. *Diagonabilisabilité d'un endomorphisme induit*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

On note $f\|_F$ l'endomorphisme induit par f sur F.

$$\boxed{f \text{ diagonalisable} \quad \Rightarrow \quad f\|_F \text{ diagonalisable}}$$

V.2.d) Conditions suffisantes de diagonalisabilité

Théorème 24.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes	$\Rightarrow$	*L'endomorphisme f est diagonalisable*

Le polynôme caractéristique χ_f est scindé à racines simples	$\Rightarrow$	*L'endomorphisme f est diagonalisable*

2) Cas des matrices carrées

La matrice A admet n valeurs propres distinctes	$\Rightarrow$	*La matrice A est diagonalisable*

Le polynôme caractéristique χ_A est scindé à racines simples	$\Rightarrow$	*La matrice A est diagonalisable*

Démonstration.
Supposons que f admet n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Considérons $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ famille de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

- $\mathscr{F}$ est une famille libre car constituée de n vecteurs propres associés à n valeurs propres distinctes.
- De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim(E)$.

On en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f.
Ainsi f est diagonalisable. □

Remarque

- Le résultat énoncé dans le théorème n'est pas une équivalence. Pour s'en convaincre, on peut par exemple considérer la matrice I_n.
- En réalité, ces deux résultats sont les mêmes. En effet :

L'endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes	$\Leftrightarrow$	Le polynôme χ_f est scindé à racines simples

V.2.e) Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité

Théorème 25.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\left.\begin{array}{l}\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable} \\ \text{L'endomorphisme } f \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda\end{array}\right\} \Leftrightarrow f = \lambda\ \mathrm{id}_E$$

2) Cas des matrices carrées

$$\left.\begin{array}{l}\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable} \\ \text{La matrice } A \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda\end{array}\right\} \Leftrightarrow A = \lambda\ I_n$$

Démonstration.

2)($\Leftarrow$) Si $A = \lambda\ I_n$ alors A est une matrice diagonale.
Elle est donc notamment diagonalisable.

($\Rightarrow$) Si A est diagonalisable alors il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.
Comme A n'a qu'une seule valeur propre : $D = \lambda I_n$.
Et ainsi :

$$A = P(\lambda\ I_n)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda\ I_n$$

□

Remarque

- Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer, par l'absurde, qu'une matrice n'ayant qu'une valeur propre λ n'est pas diagonalisable.
- Ce résultat n'est pas officiellement au programme mais son usage est fréquent dans les énoncés. Il faut donc connaître la démonstration.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 (par exemple $E = \mathbb{R}^3$).

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Dans la suite, on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1. Si $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Si $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

1. La matrice M est triangulaire supérieure.
Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(M) = \{3, 4, 5\} = \mathrm{Sp}(f)$$

- E est un espace vectoriel de dimension 3.
- L'endomorphisme f possède 3 valeurs propres disctinctes.

On en déduit que f est diagonalisable.

Ainsi, il existe une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ M & & P & D & P^{-1} \end{array}$$

2. La matrice M est triangulaire supérieure.
Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(M) = \{7\}$$

Supposons par l'absurde que f est diagonalisable.
Il existe alors une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7\ I_3$$

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ M & & P & D & P^{-1} \end{array}$$

Ainsi :

$$M = P(7\ I_3)P^{-1} = 7\ PP^{-1} = 7\ I_3$$

Absurde ! Ainsi, f n'est pas diagonalisable. $\square$

V.3. Caractère diagonalisable des matrices symétriques RÉELLES

Définition *(Matrice symétrique)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- La matrice A est dite **symétrique** si ${}^tA = A$.
- Autrement dit, A est **symétrique** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Théorème 26.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Il existe une base dans laquelle la matrice représentative de f est symétrique `RÉELLE`	$\Rightarrow$	*L'endomorphisme f est diagonalisable*

2) *Cas des matrices carrées*

La matrice A est symétrique `RÉELLE`	$\Rightarrow$	*La matrice A est diagonalisable*

Démonstration.
Admis (sera vu dans un autre chapitre). □

Remarque

- Ce résultat n'a pas réellement sa place dans un cours de réduction des endormorphismes. En effet, ce résultat se démontre à l'aide d'outils provenant du chapitre sur les applications bilinéaires (chapitre à venir).
- Pour le moment, il faut utiliser ce résultat comme une recette à appliquer. Ainsi, dès qu'on rencontre une matrice A symétrique `RÉELLE`, il faut avoir le réflexe de dire qu'elle est diagonalisable. On note cependant que ce résultat ne dit `RIEN` sur les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Exercice

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. ***a)*** La matrice A est-elle inversible ?

b) En déduire une valeur propre de A.

3. ***a)*** Calculer A^2.

b) Déterminer alors un polynôme annulateur de A.

4. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f.

5. ***a)*** Exhiber $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

b) Que représentent la matrice P ?

c) Déterminer P^{-1}.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n ?

VI. Trigonalisation

VI.1. Définition

Définition *(Endomorphisme / matrice carrée trigonalisable)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes
- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est triangulaire.
- Autrement dit, $f \in \mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une matrice triangulaire $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = T$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **trigonalisable** s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire telles que : $A = PTP^{-1}$.

3) Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors :

L'endomorphisme f est trigonalisable	$\Leftrightarrow$	La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est trigonalisable

VI.2. Caractérisation de la trigonalisabilité

VI.2.a) Trigonalisabilité des matrices complexes

Théorème 27.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*

L'endomorphisme f est trigonalisable	$\Leftrightarrow$	*Le polynôme χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$*

Comme tout polynôme (notamment χ_f) est scindé sur $\mathbb{C}$:

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable sur $\mathbb{C}$

2) *Cas des matrices carrées*

La matrice A est trigonalisable	$\Leftrightarrow$	*Le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$*

Comme tout polynôme (notamment χ_A) est scindé sur $\mathbb{C}$:

Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$

Remarque
Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considérée comme une matrice à coefficients complexes et est donc trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Ainsi, il existe :

× $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

× $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire,

telles que : $A = PTP^{-1}$.

VI.3. Expression du déterminant / de la trace en fonction des valeurs propres complexes

Théorème 28.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f est trigonalisable	$\Rightarrow$	*La somme des valeurs propres de f, comptées avec leurs multiplicités, vaut* $\mathrm{tr}(f)$

L'endomorphisme f est trigonalisable	$\Rightarrow$	*Le produit des valeurs propres de f, comptées avec leurs multiplicités, vaut* $\det(f)$

En particulier, comme tout endomorphisme de E est trigonalisable sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\mathrm{tr}(f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} m_\lambda(f) \times \lambda} \quad \textit{et} \quad \boxed{\det(f) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda^{m_\lambda(f)}}$$

2) Cas des matrices carrées

La matrice A est trigonalisable	$\Rightarrow$	*La somme des valeurs propres de A, comptées avec leurs multiplicités, vaut* $\mathrm{tr}(A)$

La matrice A est trigonalisable	$\Rightarrow$	*Le produit des valeurs propres de A, comptées avec leurs multiplicités, vaut* $\det(A)$

En particulier, comme toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} m_\lambda(A) \times \lambda} \quad \textit{et} \quad \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda^{m_\lambda(A)}}$$

Exercice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\mathrm{tr}(M^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ où les λ_k sont les valeurs propres de M, comptées avec leur multiplicité.

Démonstration.

- Le polynôme χ_M est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il est donc scindé.
  On en déduit que la matrice M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Ainsi, il exsite :
  - × $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,
  - × $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire et dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres **complexes** de M,

  telles que : $M = P\,T\,P^{-1}$.
- On en déduit : $M^2 = \left(P\,T\,P^{-1}\right)^2 = \left(P\,T\,P^{-1}\right) \times \left(P\,T\,P^{-1}\right) = P\,T^2\,P^{-1}$.
  Finalement : $\mathrm{tr}\left(M^2\right) = \mathrm{tr}\left(P\,T^2\,P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(T^2\right) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} \lambda^2$. □