CH I : Séries numériques - révisions, compléments

Dans toute la suite, le symbole $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$. Cette notation sera utilisée pour tous les résultats qui sont vérifiés pour ces deux ensembles.

I. Notion de série numérique

I.1. Définitions générales

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- On appelle **série de terme général** u_n et on note $\sum u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général S_n est défini par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
- La suite (S_n) est appelée **suite des sommes partielles** associée à la série $\sum u_n$. Son terme général S_n est appelé **somme partielle d'ordre** n associée à la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **divergente** si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
- Lorsque $\sum u_n$ est convergente, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série** et est (souvent) notée S. On a alors :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

- Déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Remarque

- On ne change pas la nature d'une suite (u_n) en modifiant un nombre **fini** de ses termes. Par exemple, la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = \sqrt{2},\ v_1 = 42,\ v_2 = \mathrm{e} \ \text{ et } \ : \forall n \geqslant 3,\ v_n = u_n$$

  est de même nature que la suite (u_n).
  (note : on aurait pu changer d'autres termes que les premiers)
  Elle admet notamment la même limite, si elle existe, que la suite (u_n).
- On ne modifie pas non plus la nature d'une suite en supprimant un nombre fini de ses termes. La suite (u_{n+1}) n'est autre que la suite (u_n) privée de son premier terme. Ces deux suites sont de même nature et ont même limite, si cette limite existe.
- Cela s'applique évidemment à une suite de sommes partielles (S_n).
  Cette suite est de même nature que (S_{n+1}), (S_{n+2}) ...
- Pour les séries, on peut aussi se poser une autre question, à savoir : qu'advient-il si on somme à partir de 3 et plus de 0 ?
  Il suffit de remarquer :

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - (u_0 + u_1 + u_2)$$

Ainsi $(\sum\limits_{k=3}^{n} u_k)$ et $(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k)$ sont de même nature (on peut par exemple démontrer que si l'une converge, l'autre aussi). Par contre, dans le cas où il y a convergence, ces deux suites n'ont évidemment pas la même limite :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) - (u_0 + u_1 + u_2)$$

À RETENIR

On ne modifie pas la nature d'une série en commençant la sommation en n_0 (au lieu de 0) mais, en cas de convergence, on modifie évidemment la somme obtenue ! De manière générale : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \neq \sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

- Une série $\sum u_n$ est une suite particulière.
  C'est la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée des sommes partielles.
- Cela ne signifie en AUCUN CAS que la série $\sum u_n$ et la suite (u_n) sont le même objet ! Ce sont des notions totalement différentes qu'il ne faut pas confondre.
- On prendra particulièrement garde aux énoncés qui ne font pas apparaître le symbole Σ. Cela peut amener à confusion. Plus précisément, si l'on rencontre l'énoncé (par exemple) :

  « Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\big(\ln(n)\big)^5}{n^2}$ »

  il est conseillé de le réécrire sous la forme :

  « Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\big(\ln(n)\big)^5}{n^2}$ »
- Il ne faut pas confondre les notations :
  × $\sum u_n$ qui désigne la série de terme général u_n,
  × $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ qui est la somme partielle d'ordre n de cette série,
  × $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ qui désigne, SI LA SÉRIE EST CONVERGENTE, la somme de cette série (la limite finie ($\in \mathbb{K}$) de la suite (S_n)).

I.2. Cas particulier des séries à termes complexes

Théorème 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$\boxed{\sum u_n \textit{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \sum \mathrm{Re}(u_n) \textit{ converge} \\ \bullet\ \sum \mathrm{Im}(u_n) \textit{ converge}\end{array}\right.}$$

En cas de convergence, on a de plus :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_k) + i \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_k)}$$

Démonstration.
Rappelons que toute suite (v_n) complexe vérifie :

$$(v_n) \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \big(\mathrm{Re}(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\ \bullet\ \big(\mathrm{Im}(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\end{array}\right.$$

On applique ce résultat à le suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

$$\begin{array}{rcl}
\sum u_n \text{ converge} & \Leftrightarrow & (S_n) \text{ converge} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \big(\mathrm{Re}(S_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\ \bullet\ \big(\mathrm{Im}(S_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\ \bullet\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\end{array}\right.
\end{array}$$

(car la partie réelle d'une somme finie est la somme des parties réelles)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \sum \mathrm{Re}(u_n) \text{ converge} \\ \bullet\ \sum \mathrm{Im}(u_n) \text{ converge}\end{array}\right.$$

□

Remarque

- Ce résultat sert généralement à obtenir l'expression de sommes de séries réelles à l'aide de l'étude d'une série complexe.
- Par exemple, on peut démontrer (on le verra en TD) que, pour tout $\alpha \in]0, \pi]$, la série $\sum \dfrac{e^{i\,n\alpha}}{n}$ est convergente et de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{i\,k\alpha}}{k} \;=\; -\ln\left(2\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + i\,\frac{\pi-\alpha}{2}$$

Cela permet de démontrer que :

× la série $\sum \dfrac{\cos(n\,\alpha)}{n}$ est convergente et de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\,\alpha)}{k} \;=\; -\ln\left(2\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

× la série $\sum \dfrac{\sin(n\,\alpha)}{n}$ est convergente et de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\,\alpha)}{k} \;=\; \frac{\pi-\alpha}{2}$$

I.3. Reste d'une série convergente

Théorème 2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente.
On note (S_n) la suite des sommes partielles associées et S sa somme.

1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k\right)_{m>n}$ est convergente. La limite de cette suite est notée R_n et appelée reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.*

Par définition : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ R_n \;=\; \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{m} u_k \;=\; \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k}$

2) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S = S_n + R_n}$

3) *La suite (R_n) est convergente et de limite nulle :* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0}$

Démonstration.

1) (et ***2)***) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $m > n$. On a :

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \;=\; \sum_{k=0}^{m} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \;=\; S_m - S_n$$

La série $\sum u_n$ étant convergente, la suite $(S_m)_m$ l'est et par passage à la limite, on obient :

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} u_k \;&=\; \lim_{m\to+\infty} \left(S_m - S_n\right)\\ &=\; \lim_{m\to+\infty} S_m - \lim_{m\to+\infty} S_n \;=\; S - S_n\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure : $R_n \;=\; S - S_n$.

3) D'après ce qui précède :

$$R_n \;=\; S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S \;=\; 0$$

□

II. Méthodes pour déterminer la nature d'une série

II.1. Une condition $\boxed{\texttt{NÉCESSAIRE}}$ de convergence

Théorème 3.

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Pour qu'une série converge, il **faut** *que son terme général tende vers* 0.

Démonstration.
Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Ainsi, la suite (S_n) est convergente vers un élément $S \in \mathbb{K}$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n \; = \; S_n - S_{n-1}$$

Comme $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, on obtient : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Autrement dit, on peut trouver une suite (u_n) telle que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \sum u_n \text{ converge}$$

☞ $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Théorème 4.

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge}}$$

Pour qu'une série diverge, il **suffit** *que son terme général ne tende pas vers* 0.

Démonstration.
C'est la contraposée de l'énoncé précédent. □

Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On dit que la série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** si son terme général u_n est tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Remarque

- Le théorème précédent stipule que si une série est grossièrement divergente alors elle est divergente.
- Cet énoncé permet d'établir la divergence de séries. Par exemple, les séries :

  $$\sum 1, \; \sum n, \; \sum n^2, \; \sum n^3 \quad \text{et} \quad \sum q^n \text{ avec } |q| \geqslant 1$$

  sont (grossièrement) divergentes.
- L'idée derrière ce théorème est que pour assurer la convergence d'une série $\sum u_n$, c'est-à-dire pour pouvoir sommer tous les termes de la suite (u_n), il faut que les termes de cette suite (u_n) soient « suffisamment petits ».
- On notera au passage qu'une suite (u_n) qui converge vers $\ell \neq 0$ est « trop grosse » pour qu'on puisse espérer effectuer la somme (infinie) de tous ses termes *(attention à bien lire l'énoncé du théorème !)*.

II.2. Technique de télescopage

Théorème 5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La série } \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}}$$

Démonstration.
Notons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Par définition, la série $\sum v_n$ est convergente si sa suite des sommes partielles (T_n) est convergente. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

($\Leftarrow$) Si (u_n) converge, il en est de même de (u_{n+1}).
Ainsi, par l'inégalité précédente, la suite (T_n) est convergente.

($\Rightarrow$) Si $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, c'est-à-dire si (T_n) converge, l'égalité :

$$u_{n+1} = T_n + u_0$$

permet d'affirmer que (u_{n+1}) converge et donc (u_n) converge. □

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \,]0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - {u_n}^2 \end{cases}$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \,]0,1]$.

2. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

3. Étudier la nature de la série $\sum {u_n}^2$ et donner sa somme, si elle existe.

4. Prouver que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

5. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exemple

1) À l'aide d'un télescopage, on démontre la divergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
En effet, le terme général de cette série vérifie :

$$v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Ainsi, la somme partielle d'ordre n de $\sum v_n$ est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

2) On peut aussi montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n-1)}$ est convergente.
Remarquons : $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. On a donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Remarque

- Il faut savoir repérer la technique de télescopage même lorsqu'elle est cachée comme dans le point ***1)***.
- Le point ***2)*** illustre quant à lui la technique de décomposition en élément simple (DES) qu'il est fréquent de voir associée à un télescopage.

Exercice

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Quelle est la nature de cette série ?

2. Déterminer la somme de cette série.
$\left(\textit{on pourra mettre } u_n \textit{ sous la forme } \ u_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2} + \dfrac{c}{n+3}\right)$

Application de l'exercice précédent : nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ et de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

1) Montrons, à l'aide du résultat précédent, que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

- On remarque tout d'abord :

$$\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \ \leqslant\ x$$

L'inégalité de droite est une inégalité de convexité.
En effet, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave.
Sa courbe est donc située en dessous de ses tangentes, notamment sa tangente en 0, droite d'équation :

$$y = f'(0)\ (x-0) + f(0) = x$$

(évidemment, on peut aussi démontrer cette inégalité en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$)

- Cette inégalité étant vraie en $x = \frac{1}{k} \geqslant 0$, on en déduit :

$$\forall k \geqslant 1,\ \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1)$$

- Or : $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  On en déduit par théorème de comparaison : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

2) Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

- Remarquons tout d'abord : $\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k^2} \ \leqslant\ \frac{1}{k(k-1)}$ $(\star)$.
- Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, on obtient par sommation :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$$

- La suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est :
  × croissante puisque pour tout $n \geqslant 2$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$,
  × majorée par 1.

  La suite (S_n) est donc convergente.
  Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarque

- Dans le point ***2)***, on compare la taille d'une suite (v_n) à la taille d'une suite (u_n) (inégalité $(\star)$) pour démontrer la convergence de la série $\sum v_n$ sachant que la série $\sum u_n$ converge.
- En utilisant cette idée, on peut facilement démontrer que pour tout $\alpha \geqslant 2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
- Cette idée permet de préciser le résultat énonçant la condition nécessaire de convergence. On sait déjà que pour assurer la convergence d'une série $\sum u_n$, il faut que les termes de la suite (u_n) soient « suffisamment petits ».
  On peut maintenant ajouter que :
  × la suite $(\frac{1}{n})$ est « trop grosse » pour que l'on puisse sommer tous ses termes,
  × la suite $(\frac{1}{n^2})$ et toutes les suites plus petites sont « suffisamment petites » (on peut sommer tous leurs termes).

II.3. Règle de d'Alembert

Théorème 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que les termes de (u_n) *sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).*

Supposons : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ *(la suite* $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ *est convergente).*

Alors ***1)*** $0 \leqslant \ell < 1 \;\Rightarrow$ *La série* $\sum u_n$ *est (absolument) convergente*

2) $\ell > 1 \;\Rightarrow$ *La série* $\sum u_n$ *est (grossièrement) divergente (c'est aussi le cas si « $\ell = +\infty$ »)*

Remarque

- Dans le cas où $\ell = 1$, la règle de d'Alembert n'est pas suffisante pour conclure quant à la nature de la série. Cela signifie que, lorsque $\ell = 1$, la série peut être convergente ou divergente. Considérons par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^2}$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\times$ $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$\times$ $\left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{n^2} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Dans ces deux cas, $\ell = 1$. Mais, comme on l'a vu avant, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge et la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

- On peut évidemment appliquer ce résultat pour les séries à termes strictement positifs.

Démonstration.

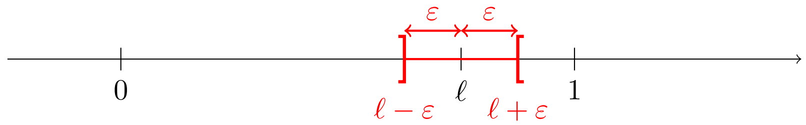
- Profitons de cette démonstration pour rappeler la définition de convergence d'une suite (v_n) vers une limite ℓ.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$$

(ou avec l'abus de notation habituel : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |v_n - \ell| < \varepsilon$)
(« quelle que soit la précision ε (> 0) choisie, on peut trouver un rang à partir duquel les éléments de la suite ne s'écartent pas de ℓ de plus de ε »)

- On suppose que la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ converge vers un réel $\ell < 1$.

Comme $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ est à termes positifs, alors : $\ell \geqslant 0$.
La convergence vers ℓ assure que tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, appartiennent tous à l'intervalle rouge ci-dessous :



Pou assurer la validité d'un tel schéma, il faut choisir ε de sorte à ce que l'intervalle rouge ne contienne pas 1. Pour ce faire, on peut considérer $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ (ou encore $\varepsilon = \min\left(\frac{\ell}{2}, \frac{1-\ell}{2}\right)$ pour s'assurer que l'intervalle rouge ne continenne pas 0 non plus).

1) • Soit $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$.

Comme la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ converge vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| < \varepsilon$$

En particulier, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\begin{array}{rcl} 0 < |u_{n+1}| & = & |u_{n+1} - \ell\, u_n + \ell\, u_n| \\ & \leqslant & |u_{n+1} - \ell\, u_n| + |\ell\, u_n| \\ & \leqslant & \varepsilon\, |u_n| + \ell\, |u_n| = (\ell + \varepsilon)\, |u_n| = \dfrac{\ell+1}{2}\, |u_n| \end{array}$$

- On a alors :
  $\times$ $\forall n \geqslant n_0,\ 0 < |u_n| \leqslant \dfrac{|u_{n_0}|}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}} \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^n$ (par récurrence).
  $\times$ Comme $\frac{\ell+1}{2} \in [0,1[$, la série géométrique $\sum \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^n$ converge (rappel à venir) et il en est de même de la série $\sum \dfrac{|u_{n_0}|}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}} \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^n$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un nombre non nul).

  Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs (résultat à venir), que la série $\sum |u_n|$ est convergente.
  Autrement dit, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

2) • Si $\ell > 1$, on raisonne de la même façon.
La convergence de la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ vers ℓ est alors représentée par le schéma suivant.

Soit $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2}$.
Comme la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ converge vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| < \varepsilon$$

En particulier, on en déduit : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1}| > \dfrac{\ell+1}{2} |u_n|$.

- Ainsi, par récurrence immédiate :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| > \frac{|u_{n_0}|}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$$

- Or : $\dfrac{|u_{n_0}|}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}} \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  Ainsi, par théorème de comparaison (sur les limites), la suite numérique (u_n) a pour limite $+\infty$. On en conclut que la série numérique $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.

3) Le cas $\ell = +\infty$ se traite de manière similaire.

- Comme la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ diverge vers $+\infty$, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 2$$

  En particulier, on en déduit : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1}| \geqslant 2\,|u_n|$.
- Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \geqslant 2^{n-n_0}\,|u_{n_0}|$.
  Or : $2^{n-n_0}\,|u_{n_0}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  Ainsi, par théorème de comparaison (sur les limites), la suite numérique (u_n) a pour limite $+\infty$. On en conclut que la série numérique $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente. □

Exercice

Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{a^n\, n!}{n^n}$.

1. On suppose dans cette question : $a \neq \mathrm{e}$.
Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

2. On suppose maintenant $a = \mathrm{e}$.

a) Démontrer : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge.

2) Étudier la nature de la série $\sum \dbinom{2n}{n}$.

III. Séries usuelles

III.1. Calcul direct des sommes partielles : sommes des puissances d'entiers

1) Somme des n premiers entiers

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$S_n - S_{m-1} = \boxed{\sum_{k=m}^{n} k \ = \ \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}}$$

Remarque
La formule donnant la valeur de $S_n - S_{m-1}$ peut se retenir comme étant le résultat du **demi-produit** :

- × **du nombre de termes** de la somme $(n-m+1)$,
- × **par la somme** $(n+m)$ formée **du** 1^{er} **terme** m **et du dernier** n.

2) Sommes des n premiers carrés d'entiers

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

3) Sommes des n premiers cubes d'entiers

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} = {S_n}^2$$

Remarque

- Même si les formules font apparaître des divisions par 2, 6 et 4, il est évident que la somme des n premiers entiers, carrés, ou encore cubes a un résultat entier.
- Généralement, on démontre ces résultats par récurrence.
- On peut aussi démontrer ces formules de manière directe. Par exemple, pour la somme des n premiers entiers, on commence par remarquer :

$$(k+1)^2 - k^2 \ = \ 2k+1$$

On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) & = & \displaystyle 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ \| & & \| \\ (n+1)^2 - 1^2 & & \displaystyle 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n \end{array}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) &= (n+1)^2 - 1^2 - n \ = \ n^2 + 2n + \cancel{1} - \cancel{1} - n \\ &= n^2 + n \ = \ n(n+1) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

III.2. Séries géométriques

Théorème 7.

Soit $z \in \mathbb{K}$.

1) Tout d'abord : $\boxed{\sum z^n \text{ converge } \Leftrightarrow |z| < 1}$.

2) De plus, si $|z| < 1$: $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \dfrac{1}{1-z}}$.

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{K}$. Deux cas se présentent.

Si $z = 1$, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $z \neq 1$, on commence par remarquer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k &= \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=1}^{n+1} z^k \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \Big(1 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} z^k}\Big) - \Big(\cancel{\sum_{k=1}^{n} z^k} + z^{n+1}\Big) \\
&= 1 - z^{n+1}
\end{aligned}$$

On en conclut alors (comme $z \neq 1$) : $\sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Et ainsi :

La série $\sum z^n$ est convergente $\Leftrightarrow$ La suite $(z^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Trois sous-cas se présentent alors.

× Si $|z| < 1$, on a $\left|z^{n+1}\right| = |z|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $z^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (S_n) converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \dfrac{1}{1-z}$.

× Si $|z| > 1$, on procède par l'absurde.
Supposons que la suite $(z^{n+1})_n$ est convergente. Or, comme $|z| > 1$: $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Absurde !

La suite (z^{n+1}) est donc divergente. Il en est de même de la suite (z^n), ce qui démontre que (S_n) l'est.

× Si $|z| = 1$ (et $z \neq 1$), on procède par l'absurde.
Supposons que la suite (z^{n+1}) converge vers une limite ℓ ($\in \mathbb{K}$).
Il en est alors de même de la suite (z^n). Or :

$$z^{n+1} = z\, z^n$$

Par passage à la limite, on obtient : $\ell = z\,\ell$. Ainsi : $(1-z)\,\ell = 0$.
Comme $1 - z \neq 0$ (car $z \neq 1$), on en déduit : $\ell = 0$. Or :

- comme $z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $|z^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$
- comme $|z| = 1$ alors $|z^n| = |z|^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Finalement : $|\ell| = 1$ et $\ell = 0$. Absurde !

La suite (z^n) est donc divergente, ce qui démontre que (S_n) l'est.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si de plus $|z| < 1$, alors la série $\sum z^n$ est convergente (*cf* point précédent) et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} z^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\
&= \frac{1}{1-z}
\end{aligned}$$

□

Cas des séries géométriques (dérivées) à variable entière

- Lorsque x est un réel, on démontre de manière aisée :

1) $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ x^{n-1} \text{ converge } \Leftrightarrow\ |x|\ <\ 1}$

2) $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\ x^{n-2} \text{ converge } \Leftrightarrow\ |x|\ <\ 1}$

De plus, si $|x| < 1$, on obtient les sommes suivantes.

a. $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\ x^{k-1}\ =\ \dfrac{1}{(1-x)^2}}$ ***b.*** $\boxed{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ x^{k-2}\ =\ \dfrac{2}{(1-x)^3}}$

- Pour la démonstration ***1)***, on peut considérer la fonction $f_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.
C'est une fonction polynomiale et elle est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\ x^{k-1}$.
Or, comme vu précédemment, pour tout $x \neq 1$: $f_n(x)\ =\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
On en déduit :
$$f_n'(x) = \frac{-(n+1)\ x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)\ x^n + n\ x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$$
De plus, si $|x| < 1$, on a $(n+1)\ x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n\ x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la série $\sum\ n\ x^{n-1}$ est donc convergente (x fixé). Finalement, si $|x| < 1$:
$$f_n'(x)\ =\ \sum_{k=0}^{n} k\ x^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} k\ x^{k-1}\ =\ \frac{1}{(1-x)^2}$$

- Pour la démonstration ***2)***, on raisonne de même. Si $x \neq 1$:
$$f_n''(x) = \frac{-(n+1)n\ x^{n-1} + 2(n+1)(n-1)\ x^n + n(1-n)\ x^{n+1} + 2}{(1-x)^3}$$
$$f_n''(x)\ =\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\ x^{k-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ x^{k-2}\ =\ \frac{2}{(1-x)^3}$$

Application

Dans les exercices, il faudra savoir reconnaître les séries géométriques et géométriques dérivées et savoir calculer leur somme.

1) Montrer que $\sum \dfrac{n}{3^{2n+1}}$ est convergente et calculer sa somme.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $u_k = \dfrac{k}{3^{2k+1}} = k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2k+1} = \dfrac{1}{3}\ k\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right)^k$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n\ =\ \dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(\dfrac{1}{9}\right)^k\ =\ \dfrac{1}{27}\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(\dfrac{1}{9}\right)^{k-1}$.

C'est la somme partielle d'une série géométrique dérivée qui est convergente car de raison $\dfrac{1}{9} \in\ ]-1,1[$.

Ainsi : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{27}\ \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^2}\ =\ \dfrac{1}{3\times\cancel{9}}\ \dfrac{9^{\cancel{2}}}{8^2}\ =\ \dfrac{3}{64}$.

2) Montrer que $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $u_k = k^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

En écrivant : $k^2 = k(k-1) + k$, on obtient :
$$u_k\ =\ k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + k\left(\frac{1}{2}\right)^k\ =\ \frac{1}{4}\ k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2}\ k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n\ =\ \dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée et la somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde toutes deux convergentes car de raison $\dfrac{1}{2} \in\ ]-1,1[$.

Ainsi : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}\ \dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\ =\ \dfrac{2^4}{4} + \dfrac{2^2}{2}\ =\ 4 + 2\ =\ 6$

III.3. Série exponentielle

Théorème 8.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ *converge et :* $\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}$.

Ainsi : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

Démonstration.
Commençons par rappeler l'inégalité de Taylor.

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).
> Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$:
> $$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \right) \right| \leqslant \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t\in I(x_0,x)} \left(\left| f^{(n+1)}(t) \right| \right)$$

où on a noté $I(x_0, x)$ le segment d'extrémités x_0 et x (c'est $[x_0, x]$ si $x \geqslant x_0$ et $[x, x_0]$ si $x < x_0$).

Appliquons ce résultat à la fonction $f : t \mapsto e^t$ (de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) en $x_0 = 0$. On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(t) = e^t, \text{ d'où } f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t\in I(0,x)} \left(\left| e^t \right| \right)$$

Or : $\max_{t\in I(0,x)} \left(\left| e^t \right| \right) \leqslant 1 + e^x$. En effet :

× si $x \geqslant 0$ alors : $\forall t \in [0, x], e^t \leqslant e^x$.

× si $x < 0$ alors : $\forall t \in [x, 0], e^t \leqslant 1$.

Dans les deux cas : $\forall t \in I(0, x)$, $e^t \leqslant 1 + e^x$.

Finalement :

$$0 \leqslant \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant (1 + e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or :

× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

× $(1 + e^x) \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement, on en déduit : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$. □

Remarque

- L'inégalité de Taylor se démontre à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral. Cette formule est au programme en `MPSI-MPII` (et `PSI`) mais n'est pas exigible en `PCSI`. Examinons cet énoncé.

  > Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $\mathbb{R}$.
  > Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$:
  > $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \right) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

  Ce résultat se démontre par récurrence (*cf* TD).

- Il est à noter que la formule de Taylor et l'inégalité qui s'en déduit, sont aussi valables pour les fonctions de la variable réelle et à valeurs complexes. En particulier, on peut appliquer l'inégalité de Taylor à la fonction (de la variable réelle) $f : t \mapsto e^{i\,t}$ ce qui donne le résultat suivant.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^{i\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!}}$$

Un mot sur ce type d'objets

- L'écriture $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un polynôme de degré $+\infty$.
- On appelle cet objet une **série entière** et on dit alors que la fonction exponentielle est développable en série entière (DSE). Toutes les fonctions ne sont pas développables en séries entières. L'intérêt de ce type de développement est la relative simplicité de l'objet $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et notamment son bon comportement vis-à-vis de certaines opérations telles que la dérivation.
- En `PSI`, un chapitre est dédié à l'étude des séries entières.

  On verra d'ailleurs qu'on peut généraliser : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z \ = \ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}}$.

Application

Dans les exercices, il faudra savoir reconnaître la série exponentielle et calculer la somme associée.

Montrer que $\sum \dfrac{n+7}{2^n\ n!}$ est convergente est calculer sa somme.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $u_k = \dfrac{k+7}{2^k\ k!} = \dfrac{k\ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ + \ 7\ \dfrac{(\frac{1}{2})^k}{k!}$.

On a donc : $S_n \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k\ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ + \ 7 \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\frac{1}{2})^k}{k!}$.

Étudions séparément ces deux sommes.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{k\ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ &= \ \sum_{k=1}^{n} \frac{k\ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ = \ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{1}{2})^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{2})^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- D'autre part, on a : $\quad 7 \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\frac{1}{2})^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 7\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

On en conclut : $\ S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{15}{2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \dfrac{15}{2}\ \sqrt{\mathrm{e}}$.

III.4. Les séries de Riemann

Théorème 9.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \ \textit{converge} \ \Leftrightarrow \ \alpha \ > \ 1}$$

Démonstration.

- Si $\alpha \leqslant 0$: alors $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

  Ainsi, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est (grossièrement) divergente.
- Si $\alpha > 0$: deux cas se présentent.
  - × cas $0 < \alpha \leqslant 1$: alors pour tout $k \geqslant 1$, on a :

    $$\frac{1}{k} \ \leqslant \ \frac{1}{k^\alpha} \quad \textit{(car } k^{1-\alpha} \ \geqslant \ 1\textit{)}$$

    Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par sommation :

    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

    Or, on a déjà démontré : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

    On en déduit, par le théorème de comparaison des suites qui divergent vers l'infini : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

    Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

× si $\alpha > 1$:

(i) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$:

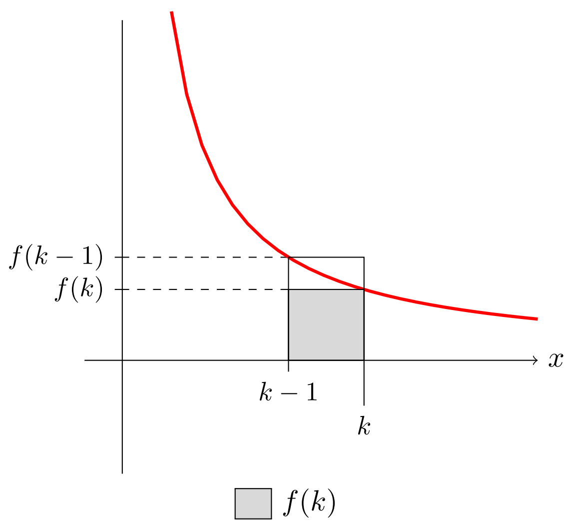
$$f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} \ \leqslant \ 0 \quad (\textit{car } -\alpha \leqslant 0 \textit{ puisque } \alpha > 1 \geqslant 0)$$

On en déduit que la fonction f est (strictement) décroissante sur $]0, +\infty[$.

(ii) La deuxième étape de la démonstration consiste à démontrer :

$$\forall k \geqslant 2, \ f(k) \ \leqslant \ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \ \leqslant \ f(k-1)$$

Cette inégalité se comprend (mais cela ne constitue pas une démonstration !) à l'aide de la représentation graphique suivante.



Démontrons cette inégalité.

Soit $k \geqslant 2$. Pour tout $t \in [k-1, k]$:

$$\begin{array}{lccccc} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k \\ \text{donc} & f(k-1) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(k) \end{array}$$

(car f est décroissante sur $]0, +\infty[$)

$$\text{donc} \quad \int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dt \ \geqslant \ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \ \geqslant \ \int_{k-1}^{k} f(k)\ dt$$

(par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k - 1 \leqslant k$))

$$\text{donc} \quad f(k-1) \ \geqslant \ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \ \geqslant \ f(k)$$

(iii) Ainsi, par sommation des inégalités de droite, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=2}^{n} f(k) & \leqslant & \sum\limits_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ S_n - 1 & & \int_{1}^{2} f(t)\ dt + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(t)\ dt \ = \ \int_{1}^{n} f(t)\ dt \end{array}$$

(par relation de Chasles)

Or, comme $\alpha \neq 1$:

$$\int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\ dt \ = \ \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^n \ = \ \frac{1}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

Enfin $\dfrac{1}{\alpha - 1} > 0$ (car $\alpha > 1$) et $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} > 0$ ce qui permet de conclure :

$$\int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\ dt \ \leqslant \ \frac{1}{\alpha - 1} \qquad \text{et} \qquad S_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

(iv) La suite (S_n) est :

× croissante puisque pour tout n : $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$,

× majorée par $1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Elle est donc convergente.

Ce qui signifie que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente. □

Remarque

- Il faut savoir reconnaître ce type de séries dans les exercices. Par exemple :
  × les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ sont convergentes.
  × les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sont divergentes.
- Cette démonstration est une illustration de la technique dite de comparaison séries / intégrales.

Comparaison séries / intégrales

- On considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[0, +\infty[$.
- On suppose de plus que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{f(k) \ \leqslant \ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \ \leqslant \ f(k-1)}$$

On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} f(k) \ \leqslant \ \int_0^n f(t)\ dt \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{n} f(k-1)}$$

Enfin : $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$

(prudence lors de la sommation : sur quels entiers k peut-on sommer ?)

Remarque

- Le programme précise que « Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone ». Il est donc primordial de connaître la technique de comparaison série-intégrale même s'il n'y a pas de théorème spécifique au programme.
- Dans l'exercice, on a considéré une fonction continue sur $[2, +\infty[$. En conséquence, la sommation a été effectuée pour des entiers plus grands que 2. De manière générale, si f est une fonction continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$), on peut démontrer :

$$\forall k > n_0, \quad \boxed{f(k) \ \leqslant \ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \ \leqslant \ f(k-1)}$$

Et par sommation :

$$\forall n > n_0, \quad \boxed{\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \ \leqslant \ \int_{n_0}^{n} f(t)\ dt \ \leqslant \ \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\forall n > n_0, \quad \boxed{\int_{n_0}^{n} f(t)\ dt + f(n) \ \leqslant \ \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \ \leqslant \ f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\ dt}$$

- Enfin, si on suppose de plus que la fonction f est positive, on a :

$$\boxed{\sum f(n) \text{ converge} \ \Leftrightarrow \ \text{L'intégrale } \int_{n_0}^{n} f(t)\ dt \text{ admet une limite finie lorsque } n \to +\infty}$$

IV. Le cas particulier des séries à termes positifs

IV.1. Les résultats fondamentaux

Théorème 10.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$.

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0) \quad \Rightarrow \quad (S_n) \text{ est croissante}}$$

Démonstration.
Supposons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, (S_n) est croissante. □

Remarque
On peut s'interroger sur la réciproque de ce théorème. Si (S_n) est croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 0$.

Théorème 11.

Soit $\sum u_n$ une série réelle à termes positifs : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

1) $\boxed{(S_n) \text{ est majorée} \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ converge}}$

2) $\boxed{(S_n) \text{ non majorée} \ \Rightarrow\ S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

Démonstration.
C'est une conséquence directe du théorème de convergence monotone.
La suite (S_n) est croissante. Ainsi :

× si elle est majorée, elle est convergente.

× si elle est non majorée, elle tend vers $+\infty$. □

Remarque
Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, alors la suite de ses sommes partielles a pour limite $+\infty$. On s'autorise alors, dans ce cas, à noter : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$.

IV.2. Critère de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 12.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles à termes positifs.

Supposons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$
Alors ***1)*** $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow$ $\sum u_n$ *converge*
2) $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow$ $\sum v_n$ *diverge*

Démonstration.
Comme : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$, on en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

× $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \ \leqslant\ \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = T_n$,

× (S_n) et (T_n) sont croissantes puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs.

1) Si $\sum v_n$ converge, alors (T_n) est majorée. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \ \leqslant\ M$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \ \leqslant\ T_n \ \leqslant\ M$.
Cela signifie que (S_n) est majorée par M. De plus, (S_n) est croissante.
Elle est donc convergente. On en conclut que $\sum u_n$ converge.

2) Si $\sum u_n$ diverge, la suite croissante (S_n) est non majorée.
On en déduit : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \ \leqslant\ S_n$$

On en déduit : $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
*(on peut aussi remarquer que cet énoncé est la contraposée du **1)**)* □

Remarque

- La conclusion reste valable avec l'hypothèse moins stricte suivante :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.
(la convergence d'une série ne dépend pas des 1^{er} termes $u_0, \ldots, u_{n_0}$)

- Ce théorème est important. Il signifie que pour déterminer la nature d'une série réelle à termes positifs, il suffit de comparer son terme général à celui d'une série de référence (dont on connaît la nature).

IV.3. Application : les autres critères de comparaison des séries à termes positifs

IV.3.a) Résultat intermédiaire

Théorème 13.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles à termes (strictement) positifs.

Supposons qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < m \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant M$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Plus précisément, on a :

1) $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ converge

2) $\sum u_n$ diverge $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ diverge

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, on a : $0 < m\, v_n \leqslant u_n \leqslant M\, v_n$.
Par le théorème 12, on en déduit :

1) $\sum M\, v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum m\, v_n$ converge,

2) $\sum m\, v_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum M\, v_n$ diverge.

Il suffit alors de remarquer que les séries $\sum m\, v_n$, $\sum M\, v_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature puisque $\sum\limits_{k=0}^{n} M\, v_k = M \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. □

Remarque

- La remarque précédente s'applique (ainsi qu'au théorème suivant).
- On peut aussi relâcher l'hypothèse de stricte positivité. Le théorème reste vrai si (u_n) est à termes positifs et (v_n) est une suite de termes positifs qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

IV.3.b) Rappel sur les relations de comparaison sur les suites

Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Soit (v_n) une suite qui ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang).

- On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n), et on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée, c'est-à-dire si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M$$

À l'oral, on dit que « u_n est un grand o de v_n ».
(o = 15ème lettre de l'alphabet)

- On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n), et on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente de limite 0, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \varepsilon$$

$$\boxed{u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

À l'oral, on dit que « u_n est un petit o de v_n ».
(o = 15ème lettre de l'alphabet)

- On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n), et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente de limite 1, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Remarque

- Les relations de comparaison asymptotiques vérifient les propriétés suivantes.

La relation $\underset{n\to+\infty}{o}$	La relation $\underset{n\to+\infty}{O}$	La relation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$
`N'est PAS` réflexive	est réflexive	est réflexive
`N'est PAS` symétrique	`N'est PAS` symétrique	est symétrique
est transitive	est transitive	est transitive

Du fait de ces 3 propriétés, on dit que la relation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

- Par ailleurs, comme toute suite convergente est bornée, on démontre :

$$\boxed{u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \ \Rightarrow\ u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)}$$

et
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)}$$

En particulier :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ admet une limite finie } \Rightarrow\ u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)}$$

- Lorsque $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, on utilise parfois la notation $u_n << v_n$.
Cette notation, trompeuse, est à réservée à l'écriture d'échelles asymptotiques.

- Pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a :

$$\boxed{(\ln(n))^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n}$$

c'est-à-dire $\big(\ln(n)\big)^b = \underset{n\to+\infty}{o}\big(n^a\big)$, $n^a = \underset{n\to+\infty}{o}\big(q^n\big)$, $q^n = \underset{n\to+\infty}{o}\big(n!\big)$, $n! = \underset{n\to+\infty}{o}\big(n^n\big)$

Exercice

Déterminer la limite des suites $\left(\dfrac{e^{n^2}}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n}\right)$.

IV.3.c) Quelques développements limités à connaître

Théorème 14.
Rappelons que si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ au voisinage de 0 alors elle admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ *qui s'écrit :*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to0}{o}\big(x^n\big)} \quad \textit{ou} \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to0}{O}\big(x^{n+1}\big)}$$

- $$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to0}{O}\big(x^{n+1}\big)}$$
- $$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\ \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to0}{O}\big(x^{2p+2}\big)}$$
- $$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\ \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to0}{O}\big(x^{2p+3}\big)}$$
- $$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ x^n + \underset{x\to0}{O}\big(x^{n+1}\big)}$$

- $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)}$

IV.3.d) Les critères de négligeabilité, domination et équivalence

Théorème 15.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles à termes (strictement) positifs.

1)
- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant 0$
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

$\Rightarrow$ *$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature*

2)
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ *et* $v_n \geqslant 0$
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$
- $\sum v_n$ *est convergente*

$\Rightarrow$ *$\sum u_n$ est convergente*

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ *et* $v_n \geqslant 0$
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$
- $\sum u_n$ *est divergente*

$\Rightarrow$ *$\sum v_n$ est divergente*

3)
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ *et* $v_n \geqslant 0$
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$
- $\sum v_n$ *converge*

$\Rightarrow$ *$\sum u_n$ converge*

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ *et* $v_n \geqslant 0$
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$
- $\sum u_n$ *est divergente*

$\Rightarrow$ *$\sum v_n$ est divergente*

Démonstration.

1) On suppose : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Rappelons : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$.

Par exemple, si $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 < \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$$

On conclut alors à l'aide du théorème 13 que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2) On suppose que la série $\sum v_n$ converge et : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Rappelons : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \varepsilon$.

Par exemple, si $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant 1$

Autrement dit : $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

On conclut, à l'aide du théorème 12, que la série $\sum u_n$ converge.

3) On suppose que la série $\sum v_n$ converge et : $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

Autrement dit, la suite $\left(\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|\right)$ est bornée. Il existe donc $M > 0$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M$. Ainsi :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant M\, v_n$$

La série $\sum M\, v_n$ est à termes positifs et est convergente (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $M \neq 0$). On en conclut, par le théorème 12, que la série $\sum u_n$ converge. $\square$

Un point sur les relations de comparaison dans ces théorèmes

- Pour les séries à termes positifs, l'idée de ces théorèmes est de déterminer la nature d'une série $\sum u_n$ en comparant son terme général au terme général v_n d'une série de référence (dont on connaît la nature) $\sum v_n$. Pour ce faire, on utilise les relations de comparaison $\underset{n\to+\infty}{o}$, $\underset{n\to+\infty}{O}$, $\underset{n\to+\infty}{\sim}$. Il s'agit de déterminer si les suites (u_n) et (v_n) ont un comportement asymptotique proche. Plus précisément :
  - × la relation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ siginifie que les suites (u_n) et (v_n) ont même comportement asymptotique. La nature d'une série $\sum u_n$ ne dépend pas des premiers termes de la suite (u_n). Il paraît donc logique que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ aient même nature si les suites (u_n) et (v_n) ont même comportement asymptotique.
  - × la relation $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ siginifie que la suite (u_n) est négligeable devant (v_n). Ainsi, si la suite (v_n) est suffisamment petite (convergence suffisamment rapide vers 0) pour que l'on puisse sommer ses termes, il est logique qu'il en soit de même pour la suite (u_n).
  - × la relation $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ siginifie que la suite (u_n) a un comportement asymptotique au pire à hauteur de celle de (v_n) à un coefficient multiplicatif près. Il est donc là encore logique que si la suite (v_n) est suffisamment petite pour que l'on puisse sommer ses termes, il est logique qu'il en soit de même pour la suite (u_n).

Exercice

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{n+1}{(n+3)^2}$ ***d.*** $\sum n^4\,\mathrm{e}^{-n}$ ***g.*** $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$ ***i.*** $\sum \dfrac{\ln(n)}{2^n}$

b. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ***e.*** $\sum n^n\,\mathrm{e}^{-n}$ ***h.*** $\sum \dfrac{1}{n\,2^n}$ ***j.*** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

c. $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ ***f.*** $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ ***k.*** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$

Un point sur le caractère positif

- Il est à noter que pour étudier une série $\sum u_n$ à termes négatifs, il suffit d'étudier la série $\sum -u_n$ qui est à termes positifs.
- On aurait donc pu énoncer les Théorèmes 12, 13, 15 sur des séries à termes négatifs. En fait, l'hypothèse adéquate pour ces théorèmes est celle des séries à termes de signe constant.
- Notons que certaines séries ne sont pas à termes de signe constant.
  Pour déterminer la nature d'une telle série, on se sert souvent de la notion de convergence absolue.

V. Convergence absolue d'une série numérique

V.1. La convergence absolue implique la convergence

Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarque

Évidemment, dans le cas d'une série à termes positifs, convergence et convergence absolue sont deux propriétés synonymes.

Théorème 16. *(Inégalité triangulaire)*

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1) $\boxed{\sum u_n \text{ est absolument convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ est convergente}}$

2) Dans le cas de la convergence absolue, on a de plus :

$$\boxed{\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|}$$

Démonstration.

1) On suppose que la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Démonstration dans le cas où (u_n) est une suite réelle

On introduit (v_n) et (w_n) les suites définies par :

$$v_n = \frac{u_n + |u_n|}{2} (= \max(0, |u_n|)) \quad \text{et} \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} (= -\min(0, |u_n|))$$

v_n est la partie positive de u_n et w_n est la partie négative de u_n.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant v_n \leqslant |u_n|$.
  - × Par hypothèse, $|u_n|$ est le terme général d'une suite convergente.
  - × Ainsi, par le théorème 12, la série $\sum v_n$ est convergente.
- De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad 0 \leqslant w_n \leqslant |u_n|$.
  - × Par hypothèse, $|u_n|$ est le terme général d'une suite convergente.
  - × Ainsi, par le théorème 12, la série $\sum w_n$ est convergente.

Enfin, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - w_n$. Le terme général de $\sum u_n$ apparaît comme somme de deux termes généraux de séries convergentes. La série $\sum u_n$ est donc convergente.

Démonstration dans le cas où (u_n) est une suite complexe

On suppose que la série $\sum |u_n|$ est convergente.
Il s'agit alors de démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
C'est le cas si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ le sont.
Il suffit alors de remarquer :

$$0 \leqslant |\operatorname{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \qquad (\text{ et } 0 \leqslant |\operatorname{Im}(u_n)| \leqslant |u_n| \ )$$

On en déduit, par théorème de comparaison des séries à termes positifs que les séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ sont (absolument) convergentes, ce qui permet de conclure.

2) Par inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$.
Les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ étant supposées convergentes, on obtient le résultat souhaité par passage à la limite dans cette inégalité. □

Exercice

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

V.2. Critère de domination pour démontrer l'absolue convergence d'une série

Théorème 17.

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Soit $(v_n) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^{\mathbb{N}}$ *(*(v_n) *est une suite d'éléments réels positifs).*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{C} \text{ et } v_n \geqslant 0 \\ \bullet\ u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \\ \bullet\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{La série } \sum u_n \text{ est} \\ \text{(absolument) convergente}\end{array}$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que pour toute suite (w_n) d'éléments de $\mathbb{K}$:
$$(w_n) \text{ bornée } \Rightarrow \left(|w_n|\right) \text{ bornée}$$
En appliquant ce résultat à la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, on démontre : $|u_n| = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.
- Il suffit de remarquer :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$
  × $|u_n| = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$
  × La série $\sum v_n$ est (absolument) convergente.

  Ainsi, par le théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ est convergente. □

Remarque

- Cette présentation du théorème de domination est celle du programme officiel. Elle est intéressante car permet de s'abstraire de l'utilisation du module qui n'apparaît pas directement dans les hypothèses. Cependant, d'un point de vue pédagogique, il est bienvenu de se poser la question de la convergence absolue et il est donc pertinent de penser à travailler avec le module (ou la valeur absolue selon le contexte) du terme général de la série. La présentation mise en avant dans le programme ne doit donc être utilisée qu'en cas de recul suffisant.
- Dans la démonstration, on démontre :
$$\boxed{u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \ \Rightarrow\ |u_n| = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)}$$
De manière similaire, on peut démontrer (revenir à la définition de négligeabilité) :
$$\boxed{u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \ \Rightarrow\ |u_n| = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)}$$
On peut alors présenter le critère de négligeabilité sous la forme :
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{C} \text{ et } v_n \geqslant 0 \\ \bullet\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ \bullet\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{La série } \sum u_n \text{ est} \\ \text{(absolument) convergente}\end{array}$$
- La notion d'absolue convergence n'est pas équivalente à la notion de convergence. Plus précisément : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. On parle alors de série **semi-convergente** pour désigner une série convergente mais non absolument convergente.
- Un exemple classique est celui de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$. Cette série est :
  × convergente. On va le démontrer dans le paragraphe suivant.
  × non absolument convergente. En effet, pour tout $n \geqslant 1$:
  $$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$
  Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.

  C'est un cas très particulier de série semi-convergente. En effet, on a ici affaire à une série alternée, c'est-à-dire une série dont le terme général change de signe à chaque rang. Pour démontrer la convergence de ces séries, on utilise le critère spécial des séries alternées.

VI. Le cas particulier des séries alternées

Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On dit que la série $\sum u_n$ est **alternée** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont de signes opposés. Autrement dit, la série est **alternée** si la suite $\Big((-1)^n \ u_n \Big)$ est de signe constant.

Remarque

Du fait même de cette définition, une série alternée $\sum u_n$ est souvent notée sous la forme $\sum (-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite réelle de signe constant.
Remarquons dans ce cas que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\,u_n\,| &= |\,(-1)^n \ a_n\,| = |\,(-1)^n\,|\,|\,a_n\,| = |\,a_n\,| \\ (-1)^n \ a_n &= (-1)^n \ \big((-1)^n \ u_n\big) = (-1)^{2n} \ u_n = u_n \end{aligned}$$

Théorème 18. *(Critère spécial des séries alternées)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. *Énoncé du critère spécial des séries alternées*

> - $\sum u_n$ *est une série alternée (s'écrit sous la forme* $\sum (-1)^n a_n$ *où* (a_n) *de signe constant)*
> - $(|u_n|)$ *est décroissante,*
> - $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
>
> $\Rightarrow$ *La série* $\sum u_n$ *est convergente*

2. *De plus, si $\sum u_n$ est une série alternée convergente, alors :*

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *est du signe de* u_{n+1}.

(R_n est le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$)

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ |\,R_n\,| = |\,S - S_n\,| \leqslant |\,u_{n+1}\,|.$

Démonstration.

Pour plus de lisibilité, on suppose dans cette démonstration que la suite (a_n) est positive (le cas des suites à termes négatifs se traite de manière similaire).

1. Montrons que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes

Pour cela, on démontre qu'elles sont adjacentes.

- La suite (S_{2n}) est décroissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \, a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \, a_k \\ &= (-1)^{2n+1} \ a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} \ a_{2n+2} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0 \end{aligned}$$

- La suite (S_{2n+1}) est croissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k \, a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \, a_k \\ &= (-1)^{2n+2} \ a_{2n+2} + (-1)^{2n+3} \ a_{2n+3} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0 \end{aligned}$$

- Enfin on a :

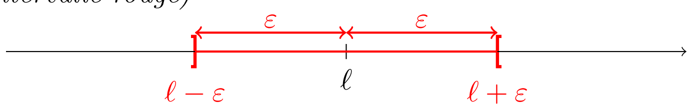
$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \, a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \, a_k = (-1)^{2n+1} \, a_{2n+1} \\ &= -\, a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

On en conclut que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
Elles sont donc convergentes et convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Démontrons alors que la série $\sum u_n$ est convergente (de somme notée S)

Soit $\varepsilon > 0$.

- On sait : $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Ainsi, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ |S_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  (ceci signifie qu'à partir du rang n_1, tous les éléments de (S_{2n}) sont dans l'intervalle rouge)



- On sait : $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Ainsi, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2,\ |S_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  (ceci signifie qu'à partir du rang n_2, tous les éléments de (S_{2n+1}) sont dans l'intervalle rouge)

Notons $N = \max(2n_1, 2n_2+1)$. Ces deux inégalités permettent d'affirmer :

$$\forall n \geqslant N,\ |S_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

(ceci signifie qu'à partir du rang N, tous les éléments de (S_n) sont dans l'intervalle rouge)
Ainsi (S_n) est convergente de limite ℓ (notée S).

2. a) Il s'agit de déterminer le signe des termes de la suites (R_n).
Démontrons tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$

La suite (S_{2n}) (resp. (S_{2n+1})) est décroissante (resp. croissante) donc, sa limite S est sa borne inférieure (resp. supérieure) et est donc un minorant (resp. un majorant). Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} S_{2n+1} = S = \inf_{n\in\mathbb{N}} S_{2n} \leqslant S_{2n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons maintenant que R_n est du signe de u_{n+1}.
Deux cas se présentent alors.

- Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2p$. Alors :

$$R_n = R_{2p} = \sum_{k=2p+1}^{+\infty} u_k = S - S_{2p} \leqslant 0$$

  Et R_n est bien du signe de :

$$u_{n+1} = u_{2p+1} = (-1)^{2p+1} a_{2p+1} = -a_{2p+1} \leqslant 0$$

- Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2p+1$. Alors :

$$R_n = R_{2p+1} = \sum_{k=2p+2}^{+\infty} u_k = S - S_{2p+1} \geqslant 0$$

  Et R_n est bien du signe de :

$$u_{n+1} = u_{2p+2} = (-1)^{2p+2} a_{2p+2} = a_{2n+2} \geqslant 0$$

b) Montrons que S vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| \leqslant a_{n+1}$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

- Si n pair : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.
  On a alors : $S - S_n = S - S_{2p} \leqslant 0$ (d'après la question précédente).
  On en déduit :

$$|S - S_n| = S_{2p} - S \leqslant S_{2p} - S_{2p+1} \quad \textit{(car } S \geqslant S_{2p+1}\textit{)}$$
$$S_{2p} - S_{2p+1} = -(-1)^{2p+1} a_{2p+1} = a_{2p+1} = a_{n+1}$$

- Si n impair : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$.
  On a alors : $S - S_n = S - S_{2p+1} \geqslant 0$ (question précédente).
  On en déduit :

$$|S - S_n| = S - S_{2p+1} \leqslant S_{2p+2} - S_{2p+1} \quad \textit{(car } S \leqslant S_{2p+2}\textit{)}$$
$$S_{2p+2} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} a_{2p+2} = a_{2p+2} = a_{n+1}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| \leqslant a_{n+1}$. $\square$

Exercice

1) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est convergente mais non absolument convergente.

2) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

3) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.
(penser à un développement asymptotique)

VII. Propriétés des séries convergentes

VII.1. Propriétés algébriques élémentaires

Théorème 19.

Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que les série $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.

1) *Linéarité*

a) *Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, la série $\sum \left(\lambda u_n + \mu v_n\right)$ est convergente.*

b) *De plus :* $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\lambda u_k + \mu v_k\right) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k}$.

2) *Positivité*

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n_0, u_k \geqslant 0 \ \Rightarrow \ \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \geqslant 0}$$

3) *Croissance*

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n_0, u_k \leqslant v_k \ \Rightarrow \ \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k}$$

Remarque

- On peut démontrer, à l'aide de ce résultat :

• La série $\sum u_n$ est convergente • La série $\sum v_n$ est divergente	$\Big\} \Rightarrow$	La série $\sum (u_n + v_n)$ est divergente

- Application : déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$.

  (penser à un développement asymptotique)

VII.2. Produit de Cauchy de deux séries convergentes

VII.2.a) Définition

Définition

Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- On appelle produit de Cauchy de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série numérique $\sum c_n$ dont le terme général est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ c_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \, v_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} \, v_j$$

VII.2.b) Résultat

Théorème 20.

Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $c_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \, v_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} \, v_j$.

1) *Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum c_n$, produit de Cauchy des deux précédentes, est elle aussi absolument convergente.*

2) *Dans ce cas :* $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j\right)}$

Démonstration.

- La démonstration n'est pas exigible. On se contente ici de donner une une représentation graphique expliquant la forme du terme général de la série obtenu par produit de Cauchy.

- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j\right) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(u_i\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j\right)\right) && \textit{(la somme de la série } \textstyle\sum v_n \textit{ est un réel indépendant de la variable de sommation } i\textit{)}\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_i\, v_j\right) && \star_1 \ \textit{(par linéarité)}\\
&= \sum_{0\leqslant i,j\leqslant+\infty} u_i\, v_j && \star_2\\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\, v_j\right) && \star_3
\end{aligned}$$

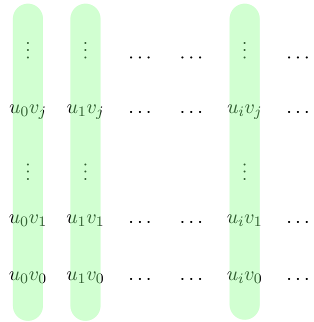
L'écriture $\star_2$ stipule qu'il s'agit de sommer toutes les quantités $u_i\,v_j$ pour (i,j) parcourant tout $\mathbb{N}^2$. Si on présente les couples (i,j) sur le quart de plan et qu'on positionne les quantités $u_i\,v_j$ aux places correspondantes, on comprend qu'il y a essentiellement 3 manières d'obtenir la somme de tous ces termes :

× faire une somme suivant les lignes (écriture $\star_3$).

× faire une somme suivant les colonnes (écriture $\star_1$).

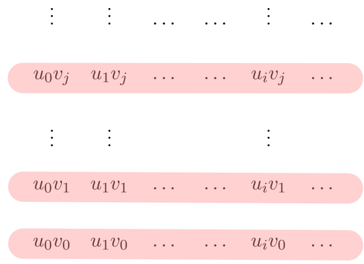
× faire une somme suivant les diagonales.
C'est l'idée derrière le produit de Cauchy.

- Afin de mieux comprendre ce dernier point, on peut faire les représentations graphiques correspondantes.



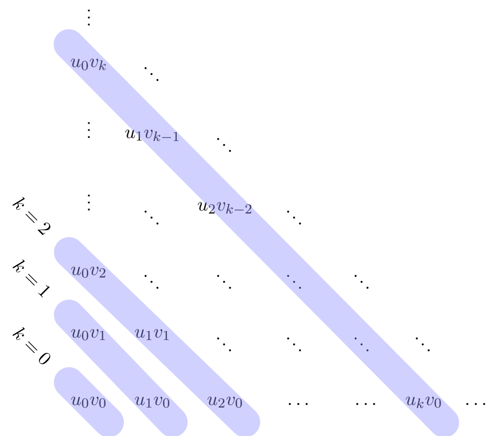
Sommation suivant les colonnes ($\star_1$)

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_i\, v_j\right)$$



Sommation suivant les colonnes ($\star_3$)

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\, v_j\right)$$



Sommation suivant les diagonales (produit de Cauchy)

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} u_i\, v_{k-i}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Bigg(\sum_{\substack{(i,\,j)\,\in\,\mathbb{N}^2\\ i\,+\,j\,=\,k}} u_i\, v_j\Bigg) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} u_{k-j}\, v_j\right)$$

□

Remarque

- On peut se demander d'où vient la nécessité de l'hypothèse d'absolue convergence. C'est celle qui permet de parler de convergence d'une série réelle indépendamment de l'ordre de sommation choisi. En particulier, si une série est absolument convergente, on peut sommer ses termes par paquets sans que cela ne change le résultat de la sommation.
- Dans le cas d'une série réelle convergente mais non absolument convergente, l'ordre de sommation joue un rôle primordial. Plus précisément, quelle que soit la série semi-convergente étudiée, on peut, en modifiant l'ordre de sommation, créer une série qui converge vers n'importe quel $\alpha \in \mathbb{R}$ choisi à l'avance (on peut même prendre $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$).
- Ce résultat est contraire à l'intuition : on ne s'attend pas à ce que la somme de tous les termes dépende de l'ordre de sommation. Il a été établi par Riemann et est connu sous le nom de théorème de réarrangement.

Théorème 21. (CULTURE)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soit $\sum u_n$ *une série semi-convergente.*

c'est-à-dire $\begin{cases} \sum u_n \text{ converge} \\ \sum |u_n| \text{ diverge} \end{cases}$

Alors, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, *il existe une permutation* σ *de* $\mathbb{N}$ *telle que :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Remarque

- On a déjà rencontré une série semi-convergente : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

  En TD, on démontrera :
  - × que cette série a pour somme $\ln(2)$.
  - × qu'en modifiant l'ordre de sommation des termes, on peut créer une somme de valeur $\dfrac{3}{2}\ \ln(2)$.

VII.2.c) Application : série exponentielle complexe

Théorème 22.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, *la série* $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ *converge et :* $\boxed{e^z = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}}$

Démonstration.

- Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

$$\begin{aligned}
e^z &= e^{x+i\,y} \\
&= e^x\ e^{i\,y} && \textit{(par propriété de l'exponentielle complexe)} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\,y)^k}{k!}\right) && \textit{(par propriétés vu dans le paragraphe } \textbf{\textit{III.3}}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}\ \frac{(i\,y)^{k-j}}{(k-j)!}\right) && \textit{(par produit de Cauchy puisque les deux séries étudiées sont absolument convergentes)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!\,(k-j)!}\ x^j\ (i\,y)^{k-j}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!}\ x^j\ (i\,y)^{k-j}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\ x^j\ (i\,y)^{k-j}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \left(x + (i\,y)\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}
\end{aligned}$$

□

Exercice

1. Démontrer, à l'aide d'un produit de Cauchy :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^{u+v} \ = \ \mathrm{e}^{u} \times \mathrm{e}^{v}$$

2. *a)* Sous quelle condition la série numérique $\sum z^n$ (où $z \in \mathbb{C}$) est-elle convergente ?

b) Démontrer, à l'aide d'un produit de Cauchy :

$$\forall |z| < 1,\ \frac{1}{(1-z)^2} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, z^n$$

c) Quel résultat plus général cet exerccie semble-t-il illustrer ?

VIII. Applications du chapitre

VIII.1. Nature d'une série par développement asymptotique

VIII.1.a) Un cas simple

On présente cette technique en l'illustrant par un exemple.

$$\boxed{\text{La série } \sum n \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \text{ est convergente}}$$

- Commençons par rappeler le développement limité de la fonction sin en 0 :

$$\sin(x) \ = \ x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

- On en déduit :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \ = \ \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{donc} \qquad \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \ = \ \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{donc} \qquad n\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \ = \ \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

× $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| n \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)\right| \geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$

× $\left| n \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)\right| \ = \ \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

× La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum n \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ est (absolument) convergente.

VIII.1.b) Un cas plus subtil

On présente cette technique en l'illustrant par un exemple.

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \text{ est divergente}}$$

Démonstration.

- La première question que l'on doit se poser est de savoir si le critère spécial des séries alternées s'applique.

  Pour tout $n \geqslant 2$, on note : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$.

  Ainsi : $\forall n \geqslant 2$, $|u_n| \ = \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}\right| \ = \dfrac{|(-1)^n|}{|\sqrt{n}-(-1)^n|} \ = \dfrac{1}{\sqrt{n}-(-1)^n}$.

  On a :

  × La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ est une série alternée. ✓

  × La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}-(-1)^n}\right)$ est décroissante. ✗

  Pour mettre en avant le problème, procédons par équivalence.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{cll}
 & |u_{n+1}| - |u_n| < 0 & \\
\Leftrightarrow & |u_{n+1}| < |u_n| & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-(-1)^{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}-(-1)^n} & \\
\Leftrightarrow & \sqrt{n+1}-(-1)^{n+1} \ > \ \sqrt{n}-(-1)^n & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \ > \ (-1)^{n+1}-(-1)^n \ = \ 2\,(-1)^{n+1} & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{(\cancel{n}+1)-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \ > \ 2\,(-1)^{n+1} & \textit{(à l'aide de la quantité conjuguée)}
\end{array}$$

  Cette dernière inégalité est vérifiée dans le cas n pair mais ne l'est pas dans le cas n impair (puisqu'alors $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1$✗$2$).

  La suite $(|u_n|)$ n'est donc pas décroissante.

  × $\dfrac{1}{\sqrt{n}-(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ✓

- On peut aussi penser à l'utilisation de la règle de d'Alembert.

$$\begin{array}{rcl}
\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| & = & \left|\dfrac{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}-(-1)^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}}\right| \\
 & = & \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}-(-1)^{n+1}} \times \dfrac{\sqrt{n}-(-1)^n}{(-1)^n}\right| \\
 & = & \dfrac{|\,(-1)^{n+1}\,|}{|\,\sqrt{n+1}-(-1)^{n+1}\,|} \times \dfrac{|\,\sqrt{n}-(-1)^n\,|}{|\,(-1)^n\,|} \\
 & = & \dfrac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n+1}-(-1)^{n+1}} \\
 & \underset{n\to+\infty}{\sim} & \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1
\end{array}$$

  On démontre ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$.

  On est dans le cas où on ne peut pas conclure par la règle de d'Alembert.

- Il faut alors envisager une autre méthode. Cependant, comme la série $\sum u_n$ n'est pas une série dont le terme général est de signe constant, on ne peut pas appliquer les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.

  Plus précisément, même si on sait :

  × $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

  × La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (par le critère spécial des séries alternées).

  on ne peut pas en conclure pour autant que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ est convergente car les critères d'équivalence des séries à termes positifs s'utilisent ... pour des séries à termes positifs !

- Même si la série $\sum u_n$ n'est pas de terme général de signe constant, on peut utiliser les théorèmes de comparaison en travaillant avec la valeur absolue du terme général.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{donc} \quad \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n}$$

  On a :

  × $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{n} \geqslant 0$

  × $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

  × La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est est une série de Riemann d'exposant 1 ($\not> 1$).
  Elle est donc divergente.

  Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}\right|$ est divergente.

  Autrement dit, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ n'est pas absolument convergente.

- Le point précédent ne nous permet pas de conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$. En effet, une série non absolument convergente peut être convergente ou divergente.

  Il faut alors réaliser une étude plus fine du terme général de la série. On peut le faire grâce à un développement asymptotique. Plus précisément, on remarque :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(\left(1-\tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

  Ainsi, le terme général de $\sum u_n$ apparaît comme la somme de trois termes généraux :

  × la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente par le critère spécial des séries alternées.

  × la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.

  × pour toute suite (w_n) telle que $w_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, on a :

    – $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |w_n| \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \geqslant 0$

    – $|w_n| = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

    – la série $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$ (> 1).

On en conclut, par le critère de domination, que la série $\sum w_n$ est (absolument) convergente.

Finalement, le terme général de la série $\sum u_n$ apparaît comme somme de termes généraux d'une série convergente et du terme général d'une série divergente. On peut en conclure que la série $\sum u_n$ est divergente. □

VIII.2. La formule de Stirling

Théorème 23 (Formule de Stirling)**.**

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi\,n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Remarque

- Dans ce qui suit, on démontre cette équivalence sous l'écriture suivante, plus simple pour mener les calculs :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n}$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\alpha_n = n!, \quad \beta_n = n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

- La démonstration exploite plusieurs résultats du chapitre.
Son schéma est le suivant.
  1) Démonstration que la suite (u_n) converge
  Pour ce faire :
    - on introduit la suite (v_n) de terme général : $v_n = \ln(u_n)$ (ce qui permet de travailler sur des sommes et pas des quotients).
    - on exploite alors la propriété de sommation télescopique :

$$(v_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \sum (v_{n+1} - v_n) \text{ converge}$$

    - pour déterminer la convergence de cette série, on réalise un développement asymptotique de son terme général $v_{n+1} - v_n$, ce qui permet de le comparer par rapport aux termes généraux de séries de référence via les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.

  2) Démonstration que la limite de (u_n) est $\sqrt{2\,\pi}$
  Ce résultat est fourni par l'étude d'une intégrale de Wallis.

Démonstration.

1) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}\ \mathrm{e}^{-n-1}}\right) - \ln\left(\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}} \times \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{-n-1}}\right) \\
&= \ln\left(\cancel{(n+1)} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\cancel{n+1}} \times \mathrm{e}\right) \\
&= \ln\left(\mathrm{e} \times \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \ln(\mathrm{e}) - \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

• Rappelons : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to0}{o}(x^3)$. On en déduit :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\ \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} n\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & = & 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \end{array}$$

$$\text{donc : } \left(n+\frac{1}{2}\right)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement : $w_n = -\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

- Or :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{n^2} \leqslant 0$
  × $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{n^2}$
  × La série $\sum -\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (>1).

  Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes négatifs, la série $\sum w_n$ (c'est-à-dire $\sum (v_{n+1}-v_n)$) est convergente.
- On en conclut que la suite (v_n) est convergente. Notons ℓ sa limite.

$$u_n = \mathrm{e}^{\ln(u_n)} = \mathrm{e}^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell} \quad \left(\begin{array}{l}\textit{car la fonction } \exp \\ \textit{est continue en } \ell\end{array}\right)$$

- Finalement : $u_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell} > 0$ et donc :

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}\ \beta_n \quad \text{ou encore} \quad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n}$$

Pour conclure, il reste donc à démontrer : $\mathrm{e}^{\ell} = \sqrt{2\,\pi}$, c'est-à-dire : $\ell = \ln\left(\sqrt{2\,\pi}\right)$.

2) La deuxième partie de la démonstration se base sur le résultat ci-dessous.

> **Intégrales de Wallis**
>
> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n\ dt$.
>
> ***a)*** $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$ ***b)*** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \dfrac{\pi (2n)!}{2^{2n+1}\times (n!)^2}}$

(démonstration en TD)

- Pour plus de lisibilité, notons : $K = \mathrm{e}^{\ell}$.
  Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} W_{2n} & = & \dfrac{\pi (2n)!}{2^{2n+1}\times (n!)^2} \\ & \underset{n\to+\infty}{\sim} & \dfrac{\pi\ K\ (2n)^{2n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-2n}}{2^{2n+1}\times \left(K\ n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n}\right)^2} \\ & = & \dfrac{\pi\ \cancel{K}}{K^{\cancel{2}}}\ \dfrac{2^{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n+1}}\ \dfrac{n^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}}\ \dfrac{\cancel{\mathrm{e}^{-2n}}}{\cancel{\mathrm{e}^{-2n}}} \\ & = & \dfrac{\pi}{K}\ \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\ \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\pi}{K\sqrt{2n}} \end{array}$$

  On en déduit : $\dfrac{\sqrt{2n}}{\pi}\ W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{K}$.
- Or, par la propriété ***a)*** :

$$\frac{\sqrt{2n}}{\pi}\ W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\sqrt{\frac{2n}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  Par unicité de la limite, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} = \frac{1}{K} \quad \text{ou encore} \quad K = \sqrt{2\,\pi}$$

  Ce qui permet de conclure. □

IX. Bilan du chapitre

Résumé des séries rencontrées

On regroupe dans le tableau ci-dessous les séries rencontrées dans le chapitre (cours et TD). Savoir démontrer les résultats contenus dans ce tableau constitue un excellent exercice de vérification des techniques du chapitre.

$\sum u_n$	Nature de $\sum u_n$
$\sum n^3$	$\sum n^3$ diverge (grossièrement)
$\sum n^2$	$\sum n^2$ diverge (grossièrement)
$\sum n$	$\sum n$ diverge (grossièrement)
$\sum 1$	$\sum 1$ diverge (grossièrement)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\sum q^n$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,q^{n-1}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,q^{n-1}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\,q^{n-2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\,q^{n-2}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge
$\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge
$\sum \mathrm{e}^{-n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n}$ converge
$\sum \frac{x^n}{n!}$	$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (pour tout $x \in \mathbb{R}$)
$\sum \frac{z^n}{n!}$	$\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (pour tout $z \in \mathbb{C}$)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ semi-convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$	$\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ semi-convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est (absolument) convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$	$\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ (absolument) convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ divergente

MÉTHODO **Étude de séries** *(bilan du chapitre)*

L'étude de la nature de $\sum u_n$ s'effectue par l'une des techniques suivantes.

1) Si la série $\sum u_n$ est d'une forme particulière

- On peut directement déterminer la nature d'une série si :
  - × son terme général est, à multiplication par un réel/complexe non nul près, le terme général d'une série dont on connaît la nature,
  - × son terme général est la combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes (dans ce cas, la série étudiée est convergente).
  - × son terme général est la combinaison linéaire de termes généraux d'une série convergente et d'une série divergente (dans ce cas, la série étudiée est divergente).

  Ces deux derniers cas sont souvent utilisés dans le cas de développement asymptotiques (une bonne connaissance des $\mathrm{DL}_m(0)$ usuels est exigée !).
- On peut revenir à la définition de convergence : la série $\sum u_n$ est convergente ssi la suite (S_n) est convergente *(c'est notamment utile lorsqu'il s'agit de « Déterminer la nature d'une série et calculer sa somme »)* :
  - × on peut calculer S_n : en reconnaissant la somme partielle d'une série usuelle (notamment les séries géométriques et géométriques dérivées première / deuxième, la série exponentielle) ou en faisant apparaître une sommation télescopique.
  - × on peut estimer S_n à l'aide d'une inégalité telle que celle fournie par une comparaison séries / intégrales.

2) Étude de la suite (u_n) réelle ou complexe

a) (i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc diverge.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.
La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.
(une étude plus précise doit être réalisée)

b) Utilisation de la règle de d'Alembert (si le terme général s'écrit à l'aide de produits / quotients).

C'est une première étude de la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

3) Si $\sum u_n$ est à termes positifs (c'est-à-dire si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$)

On dispose des quatre outils suivants.

a) Critère de comparaison par inégalité des séries à termes positifs.

b) Critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs.

c) Critère de comparaison par négligeabilité des séries à termes positifs.

d) Critère de comparaison par domination des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée. Pour ce faire, on compare u_n au terme général v_n d'une série de référence. On pensera notamment :

- × à comparer avec des séries de terme général $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ dont la nature est donnée par le critère de Riemann.
  (on pourra aussi penser à comparer au terme général d'une série géométrique ou au terme général de la série exponentielle ou plus généralement au terme général d'une série dont on a établi la nature précédemment)
- × à utiliser la formule de Stirling pour évaluer la taille d'un terme général faisant apparaître des factorielles.

Note : si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum -u_n$ qui est de même nature que $\sum u_n$.

4) Si $\sum u_n$ est à termes réels de signes non constants ou est à termes complexes

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Utilisation du critère spécial des séries alternées si le cadre s'y prête.

b) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geqslant 0$, les techniques du ***3)*** sont utilisables)

- Si $\sum |u_n|$ est convergente (c'est-à-dire $\sum u_n$ absolument convergente) alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\sum |u_n|$ est divergente alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente *(une étude plus précise doit être réalisée)*.