CH IX : Séries entières

I. Motivation (rapide) du chapitre

Dans le chapitre « Séries numériques », nous avons rencontré les résultats suivants :

1) $\boxed{\text{Si } |z| < 1, \ \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \ = \ \dfrac{1}{1-z}}$ *2)* $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \ e^z \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}}$

- L'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ x^n$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un « polynôme de degré $+\infty$ ».
- Les fonctions polynomiales sont des fonctions idéales à bien des égards :
  - × l'ensemble des fonctions polynomiales est stable par somme et produit ce qui permet des manipulation algébriques simples de l'objet polynôme.
  - × les fonctions polynomiales sont infiniment dérivables et il est simple d'en déterminer la dérivée. Elles sont aussi facilement intégrables et il est simple d'en déterminer des primitives.
  - × l'ensemble des fonctions polynomiales est souvent utilisé comme socle de base de beaucoup de notions analytiques et notamment de toutes celles concernant les limites. Typiquement, lorsqu'on étudie la notion de continuité (puis celle de dérivabilité puis la notion de classe $\mathscr{C}^k$ puis $\mathscr{C}^\infty$), on signale que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. On se sert de ces fonctions et d'autres fonctions usuelles (comme les fonctions ln, $\sqrt{\cdot}$, exp ...) pour construire de nouvelles fonctions continues par somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou encore comme composée (en travaillant sur des intervalles adéquates) de fonctions continues.
- Si le cadre des fonctions polynomiales est assez idéal, il faut toutefois noter qu'il est assez restreint : peu de fonctions sont polynomiales. Ce manque d'expressivité de la notion de fonction polynomiale est son défaut majeur.
- Il faut nuancer le point précédent. Une fonction qui n'est pas polynomiale peut, si elle est suffisamment régulière, être approchée au voisinage d'un point, par une fonction polynomiale. C'est le résultat fourni par le théorème de Taylor avec reste intégral (qui donne lieu aux développements limités). On parvient ainsi à relier un grand nombre de fonctions avec des fonctions polynomiales.
- Maintenant que l'on a bien cerné l'intérêt des fonctions polynomiales, revenons à l'objet $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ x^n$. Les résultats donnés en début de remarque (série géométrique et série exponentielle) sont particulièrement intéressants. En s'autorisant à considérer des polynômes de degré $+\infty$, on s'aperçoit que l'on gagne grandement en expressivité. On parvient notamment à présenter la fonction exponentielle comme « fonction polynomiale de degré $+\infty$ ». Cela démontre qu'il est pertinent de creuser l'étude de cette généralisation des polynômes. En particulier, deux questions paraissent assez naturelle :

(1) quelles sont les fonctions qui s'expriment sous forme de « fonction polynomiale de degré $+\infty$ » ?

Autrement dit, quelle est l'expressivité de cette nouvelle construction ?

(2) accepter le degré $+\infty$ fait-il perdre le caractère idéal du cadre des fonctions polynomiales. Plus précisément, comment cette construction se comporte-t-elle d'un point de vue analytique. Conserve-t-on la régularité des polynômes ?

Le but de ce chaître est de répondre à ces deux questions.

II. Notion de série entière

II.1. Définition

Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite à coefficients réels ou complexes.

- Une **série entière** de la variable complexe est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a_n\, z^n \end{array}$$
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n\, z^n}$.
On note généralement $S : z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ la fonction somme de cette série entière.
- Une **série entière** de la variable réelle est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & a_n\, x^n \end{array}$$
(plus précisément, f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et f_n est à valeurs dans $\mathbb{C}$ si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n\, x^n}$.
On note généralement $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ la fonction somme de cette série entière.
- Les coefficients de la suite (a_n) sont appelés **coefficients** de la série.

Exercice 1
Étudier le domaine de convergence des séries entières suivantes.

1) $\sum z^n$	*2)* $\sum n\, z^n$	*3)* $\sum 2^n\, z^n$
4) $\sum \dfrac{z^n}{3^n}$	*5)* $\sum \dfrac{z^n}{n}$	*6)* $\sum \dfrac{z^n}{\ln(n)}$
7) $\sum \dfrac{z^n}{n^n}$	*8)* $\sum \big(\ln(n)\big)\, z^n$	*9)* $\sum n!\, z^n$

II.2. Rayon de convergence d'une série entière

II.2.a) Lemme d'Abel

Théorème 1.
Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière.

$$\boxed{\begin{array}{c} \exists z_0 \in \mathbb{C}^* \text{ tel que la suite} \\ (a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} \forall z \in \mathbb{C}, \text{ si } |z| < |z_0| \text{ alors la série} \\ \text{entière } \sum a_n\, z^n \text{ converge absolument} \end{array}}$$

Démonstration.
Supposons que $(a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |a_n z_0^n| \leqslant M$$
Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons : $|z| < |z_0|$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|a_n\, z^n| = \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| \; |a_n\, z_0^n| = \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \; |a_n\, z_0^n| \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$
On obtient :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n\, z^n| \leqslant M \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$
- La série $\sum \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$ est convergente car géométrique de raison $\left|\dfrac{z}{z_0}\right| < 1$.
Ainsi la série $\sum M \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$ l'est aussi. $\left(\begin{array}{l}\textit{on ne change pas la nature d'une} \\ \textit{série en multipliant son terme} \\ \textit{général par un réel non nul}\end{array}\right)$

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |a_n\, z^n|$ est convergente, *i.e.* la série $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente. $\square$

Remarque

- Si l'on sait que $\sum a_n\, (z_1)^n$ converge, alors $a_n\, (z_1)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On en déduit donc que la suite $\big(a_n\, (z_1)^n\big)_n$ est bornée. Ainsi, par le lemme d'Abel, la série $\sum a_n\, z^n$ est convergente pour tout z vérifiant $|z| < |z_1|$.

II.2.b) Existence et unicité du rayon de convergence

Définition

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière.

- Il existe un et un seul $R \in [0, +\infty]$ tel que :
  - si $|z| < R$, la série entière $\sum a_n\, z^n$ converge absolument.
  - si $|z| > R$, la série entière $\sum a_n\, z^n$ diverge.
- Cet élément R est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$.
- Dans le cas où la variable est complexe, on appelle **disque ouvert de convergence** le disque $\mathscr{B}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.
- Dans le cas où la variable est réelle, on appelle **intervalle ouvert de convergence** l'intervalle $]-R, R[$.

> Au bord du disque de convergence, il peut y avoir convergence ou divergence.

Théorème 2.

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière.
Le rayon de convergence R de la série $\sum a_n\, z^n$ le réel :

$$\boxed{R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n\, r^n) \text{ est bornée}\} \text{ où } R = +\infty \text{ si l'ensemble n'est pas borné}}$$

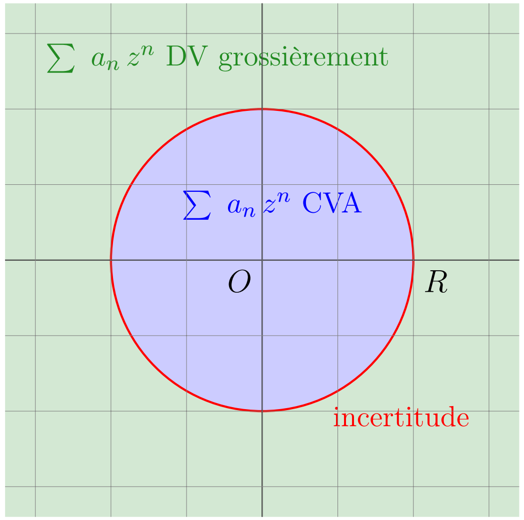
Remarque

On choisit ici une présentation légèrement différente de celle du programme officiel (le théorème est la définition et la définition est le théorème).

Exercice 2

Étudier les séries $\sum n\, x^n$, $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ et $\sum \dfrac{x^n}{n}$ sur le bord de leur intervalle de convergence.

Récapitulatif sur le disque de convergence



Exercice 3

Démontrer :

1. $\forall x \in\,]-1, 1[$, $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

2. $\forall z \in \mathscr{B}(0, 1)$, $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

3. $\forall x \in\,]-1, 1[$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

4. $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$

II.3. Estimation du rayon de convergence

II.3.a) Majoration / minoration du rayon de convergence

Théorème 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On note R son rayon de convergence.

1. $\boxed{\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la suite } (a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \ \Rightarrow\ R \geqslant |z_0|}$

2. $\boxed{\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la série } \sum a_n z_0^n \text{ n'est pas absolument convergente} \ \Rightarrow\ R \geqslant |z_0|}$

Exemple

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \sin(n)\, z^n$.

Démonstration.

On note R le rayon de convergence de cette série.

- On remarque d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant |\sin(n)\, 1^n| \leqslant 1$$

La suite $\big(|\sin(n)\, 1^n|\big)$ est donc bornée.
La suite $\big(\sin(n)\, 1^n\big)$ est donc également bornée. Ainsi :

$$R \geqslant 1$$

- De plus, la série $\sum |\sin(n)\, 1^n|$ est (grossièrement) divergente (la suite $\big(|\sin(n)|\big)$ ne tend pas vers 0). On en déduit :

$$R \leqslant 1$$

Finalement : $R = 1$. □

II.3.b) Théorème de comparaison

Théorème 4.

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

1) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n| \ \Rightarrow\ R_a \geqslant R_b}$

2) $\boxed{a_n = \underset{n\to+\infty}{O}(b_n) \ \Rightarrow\ R_a \geqslant R_b}$

3) $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \ \Rightarrow\ R_a = R_b}$

4) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n\, b_n \ \Rightarrow\ R_a = R_b}$

Démonstration.

1) Supposons : $a_n = \underset{n\to+\infty}{O}(b_n)$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$|a_n| \ \leqslant\ M\,|b_n|$$
Soit $z \in \mathbb{C}$. On obtient, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$|a_n\, z^n| \leqslant M\,|b_n\, z^n|$$
Supposons alors : $|z| < R_b$. On cherche à montrer que la suite $(a_n\, z^n)$ est bornée pour en déduire : $R_a \geqslant R_b$.

- Comme $|z| < R_b$, alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $|z| < r < R_b$. On obtient :
$$|b_n\, z^n| \ =\ |b_n\, r^n|\ \left|\frac{z}{r}\right|^n$$
On en déduit :
$$|a_n\, z^n| \ \leqslant\ M\,|b_n\, r^n|\ \left|\frac{z}{r}\right|^n$$
- Or, comme $r < R_b$, la suite $(b_n\, r^n)$ est bornée. De plus, comme $\left|\dfrac{z}{r}\right| < 1$, alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z}{r}\right|^n = 0$.
On en déduit que la suite $(|a_n\, z^n|)$ est bornée.

Ainsi, la suite $(a_n\, z^n)$ est bornée. Ceci est vrai pour tout z tel que $|z| < R_b$.
D'où : $R_a \geqslant R_b$.

2) Supposons : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. Alors il existe une suite (ε_n) telle que :
$$a_n = b_n\,(1+\varepsilon_n) \qquad \text{où} \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$
D'où :
$$|a_n| \ =\ |b_n|\,|1+\varepsilon_n| \ \leqslant\ |b_n|\,\big(1+|\varepsilon_n|\big)$$
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$|a_n| \ \leqslant\ 2\,|b_n|$$
D'où : $a_n = \underset{n\to+\infty}{O}(b_n)$. D'après le point précédente : $R_a \geqslant R_b$.
Par symétrie de $\underset{n\to+\infty}{\sim}$, on obtient : $R_b \geqslant R_a$.
Finalement : $R_a = R_b$.

3) Supposons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n\, b_n$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Supposons : $|z| < R_a$. On sait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|a_n\, z^n| \ =\ |n\, b_n\, z^n| \ \geqslant\ |n\, b_n|$$
Comme $|z| < R_a$, alors la suite $(|a_n\, z^n|)$ est bornée. On en déduit que la suite $(|b_n\, z^n|)$ aussi.
Finalement :
$$R_b \geqslant R_a$$
- Supposons : $|z| < R_b$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $|z| < r < R_b$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|a_n\, z^n| \ =\ |a_n\, r^n|\left|\frac{z}{r}\right|^n \ =\ |n\, b_n\, r^n|\left|\frac{r}{r}\right|^n \ =\ |b_n\, r^n| \times n\left|\frac{z}{r}\right|^n$$
Or, comme $r < R_b$, la suite $(|b_n\, r^n|)$ est bornée. De plus, par croissances comparées, comme $\left|\dfrac{z}{r}\right| < 1$, alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left|\frac{z}{r}\right|^n = 0$.
On en déduit que la suite $(|a_n\, z^n|)$ est bornée.
Finalement :
$$R_a \geqslant R_b$$

□

Exercice 4

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum \dfrac{n^3}{n!}\, z^n$

2. Déterminer, grâce à la formule de Stirling, le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{n^n}{n!}\, z^n$.

II.3.c) Règle de d'Alembert

Rappel de la règle pour les séries numériques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On suppose que les termes de (u_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

> Supposons : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ (la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ est convergente).
>
> Alors *1)* $0 \leqslant \ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n$ est (absolument) convergente
>
> *2)* $\ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n$ diverge

Théorème 5.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Supposons :

- $\times$ *il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $a_n \neq 0$,*
- $\times$ *il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$.*

Alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{\ell}$.

(avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$)

Démonstration.
On note R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On cherche à appliquer la règle de d'Alembert pour les séries numériques.
Pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\left|\frac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\,|z|$$

Trois cas se présentent alors.

- Si $\ell = 0$, alors, par règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi : $R = +\infty$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors, par règle de d'Alembert pour les séries numériques :
  - $\times$ si $\ell\,|z| < 1$, *i.e.* $|z| < \dfrac{1}{\ell}$, alors la série $\sum [a_n z^n|$ est convergente.
  - $\times$ si $\ell\,|z| > 1$, *i.e.* $|z| > \dfrac{1}{\ell}$, alors la série $\sum [a_n z^n|$ est divergente.

  On en déduit : $R = \dfrac{1}{\ell}$.
- Si $\ell = +\infty$, alors, par règle de d'Alementer pour les séries numériques, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente seulement pour $z = 0$. Ainsi : $R = 0$.

$\square$

Exercice 5

1. Reprendre les exemples précédents.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum \dfrac{\text{sh}(n)}{\text{ch}^2(n)}$ et $\sum \dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)}{n!}$.

3. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier naturel par :

$$a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \qquad \text{et} \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{3^{2n+1}}$$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et étudier le comportement asymptotique de $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

4. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum 2^n \ln(n)\, z^{2n}$.

II.4. Opérations sur les séries entières

II.4.a) Multiplication par un scalaire

Théorème 6 (Opérations sur les séries entières).

Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières.*

On note R_a *et* R_b *les rayons respectifs de ces séries entières.*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *la série* $\sum \lambda a_n z^n$ *a pour rayon de convergence* R_a.

$$\boxed{\forall |z| < R_a,\ \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\ z^n\ =\ \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\lambda\, a_n\big)\ z^n}$$

Démonstration.
Immédiat avec les propriétés sur les suites numériques. □

II.4.b) Somme

Théorème 7 (Opérations sur les séries entières).

Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières.*

On note R_a *et* R_b *les rayons respectifs de ces séries entières.*

La série $\sum (a_n + b_n) z^n$ *a un rayon de convergence supérieur ou égal à* $\min(R_a, R_b)$.
Si $R_a \neq R_b$, *alors le rayon de convergence de* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *est égal à* $\min(R_a, R_b)$.

$$\boxed{\forall |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\ z^n\ +\ \sum_{k=0}^{+\infty} b_n\ z^n\ =\ \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\lambda\, a_n + b_n\big)\ z^n}$$

Démonstration.
On note R le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$.
On distingue deux cas.

- Si $R_a = R_b$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a = R_b$.
  Alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes. Ainsi la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ l'est aussi. D'où : $R \geqslant R_a = \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a \neq R_b$. Considérons par exemple : $R_a < R_b$ (l'autre cas se traite de façon similaire).
  - × Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < R_a$. Alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes. Ainsi, la série $\sum (a_n+b_n) z^n$ l'est aussi. D'où : $R \geqslant R_a$.
  - × Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $R_a < |z| < R_b$. Alors la série $\sum a_n z^n$ est divergente et la série $\sum b_n z^n$ est absolument convergente. Ainsi, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ est divergente. D'où : $R \leqslant R_a$.

  Finalement : $R = R_a = \min(R_a, R_b)$.

□

II.4.c) Produit de Cauchy

Théorème 8 (Opérations sur les séries entières).

Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières.*

On note R_a *et* R_b *les rayons respectifs de ces séries entières.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

La série $\sum c_n z^n$ *a un rayon de convergence supérieur ou égal à* $\min(R_a, R_b)$.

$$\boxed{\forall |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\ z^k\ =\ \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\ z^i\right)\ \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\ z^j\right)}$$

Démonstration.
On note R' le rayon de convergence de la série $\sum c_n z^n$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < \min(R_a, R_b)$. Alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes.
D'après le cours sur les séries numériques, leur produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ l'est aussi. D'où : $R' \geqslant \min(R_a, R_b)$. □

Contrairement au cas de la somme, le rayon de convergence R du produit de Cauchy de deux séries entières peut vérifier $R > \min(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$. Pour s'en convaincre, on pourra par exemple considérer les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ où :

× $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$,

× $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $b_n = 0$.

Dans ce cas, $R_a = 1$, $R_b = +\infty$ et le rayon de convergence du produit de Cauchy vaut $+\infty$.

Exercice 6

1. Déterminer un exemple où la série $\sum (a_n + b_n)\, z^n$ a un rayon de convergence strictement plus grand que $\min(R_a, R_b)$.

2. Déterminer les rayons de convergence des séries $f : z \mapsto 1 - z$, $g : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$, et $f \times g$.

3. Montrer que $\sum (n+1)\, z^n$ est un produit de séries entières de rayon de convergence égal à 1 et que son rayon de convergence est égal à 1.

4. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum H_n\, x^n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

II.5. Problèmes au bord du disque pour la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ (`BONUS`)

On a vu dans l'Exercice 2 que, pour les séries entières, tous les comportements sont possibles au bord du disque de convergence. On s'intéresse ici au cas particulier de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n}$. On souhaite démontrer le résultat suivant :

La série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est convergente sur son disque de convergence si et seulement si $z \neq 1$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{U}$. On procède par disjonction de cas.

- Si $z = 1$, on étudie la série $\sum \dfrac{1}{n}$. On reconnaît une série de Riemann de raison 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente.
- Si $z \neq 1$. Comme $z \in \mathbb{U}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tel que : $z = \mathrm{e}^{i\theta}$.
  × Soit $N \in \mathbb{N}^*$. L'idée est ici d'effectuer une « intégration par partie discrète », autrement nommée règle d'Abel **[HP]** (c'est la somme partielle qui jour le rôle de primitive et la différence de deux termes consécutifs qui joue le rôle de la dérivation). Ce qui guide cette idée est la volonté de « dériver » $\dfrac{1}{n}$ (en une suite équivalente à $\dfrac{1}{n^2}$) pour se ramener, à une constante multiplicative près, à une série convergente. Détaillons cette étape.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{in\theta}\, \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ik\theta} \right) \frac{1}{n}$$

On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n} &= \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1}) \frac{1}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} S_n \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} S_{n-1} \frac{1}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} S_n \frac{1}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} S_n \frac{1}{n+1} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N-1} S_n \frac{1}{n} + S_N \frac{1}{N}\right) - \left(S_0 + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \frac{1}{n+1}\right) \\
&= S_0 + \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 + \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \frac{1}{n\,(n+1)}
\end{aligned}$$

× Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons alors S_n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}}$$

où la dernière égalité est vérifiée car : $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$.
On obtient :

$$S_n = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}}{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{\mathrm{e}^{-i\frac{(n+1)}{2}\theta} - \mathrm{e}^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}}{\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}} = \mathrm{e}^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\cancel{-2i}\ \sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)}{\cancel{-2i}\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

On en déduit :

$$|S_n| = \left|\mathrm{e}^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| = \frac{\left|\sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

Ainsi, la suite (S_n) est bornée.

× On obtient alors :

- d'une part : $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{S_N}{N} = 0$,
- d'autre part :
  - ▸ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \left|S_n \frac{1}{n(n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \frac{1}{n^2}$
  - ▸ la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, car c'est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$).

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \left|S_n \frac{1}{n(n+1)}\right|$ est convergente. Ainsi, la série $\sum S_n \frac{1}{n(n+1)}$ l'est aussi.

Or on a démontré, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n} = 1 + \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \frac{1}{n\,(n+1)}$$

On en déduit donc que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ est convergente.

□

III. Séries entières de la variable réelle

Dans toute cette partie, les séries entières sont considérées comme étant de la variable réelle.

III.1. Convergence

Théorème 9.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Alors $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.
Autrement dit, pour tout $(a, b) \in]-R, R[^2$ tel que $a < b$, la série entière $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[a, b]$.

Démonstration.
Soit $(a, b) \in]-R, R[^2$ tel que : $a < b$.

- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur le segment $[a, b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$.
  Ainsi, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que : $|x_0| = \max\limits_{x \in [a,b]} \big(|x|\big)$.
  On note de plus : $|x_0| < R$ (car $[a, b] \subset]-R, R[$).
- Soit $x \in [a, b]$. Alors, par définition de x_0, on a : $|x| \leqslant |x_0|$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$|a_n|\,|x^n| \ \leqslant\ |a_n|\,|x_0^n|$$
  D'où :
  $$0 \ \leqslant\ \sup_{x \in [a,b]} \big(|a_n\, x^n|\big) \ \leqslant\ |a_n\, x_0^n|$$
- Ainsi :
  × $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \sup\limits_{x \in [a,b]} \big(|a_n\, x^n|\big) \leqslant |a_n\, x_0^n|$,
  × la série $\sum a_n x_0^n$ est absolument convergente (car $|x_0| < R$).
  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \sup\limits_{x \in [a,b]} \big(|a_n\, x^n|\big)$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[a, b]$. □

Il n'y a pas nécessairement convergence normale sur $]-R, R[$.
On pourra s'en convaincre avec la série $\sum x^n$.

III.2. Régularité de la somme

III.2.a) Continuité de la somme

Théorème 10.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

La fonction f est continue sur $]-R, R[$.

Démonstration.
Soit $r \in]0, R[$. On sait :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[-r, r]$.
× la série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$ d'après la propriété précédente.

La somme f de la série $\sum a_n x^n$ est donc continue sur $[-r, r]$.
Ceci étant vrai pour tout $r \in]0, R[$, la fonction f est continue sur $]-R, R[$. □

Théorème 11 (Continuité de la somme, cas complexe)**.**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe.

Alors $\sum a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

III.2.b) Primitive de la somme d'une série entière

Théorème 12.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

1) *Pour tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$, la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.*

2) *Si F est une primitive de f, alors :*

$$\forall x \ ]-R, R[, \quad F(x) - F(0) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \ x^{n+1}$$

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-R, R[$. Elle y admet donc des primitives.
- Soit $r \in [0, R[$. La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$. On peut donc la primitiver terme à terme. On obtient, pour tout $x \in [-r, r]$:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^x f(t) \ dt & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n \, t^n \ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ F(x) - F(0) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \ x^{n+1} \end{array}$$

□

Exemple

Ce théorème permet notamment de retrouver rapidement les développements en série entière de arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$.

- arctan :
  - × On commence par remarquer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
  - × Or la série entière $\sum (-x^2)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1+x^2} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, x^{2n}$$

  - × D'après la propriété précédente, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\arctan(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- $f : x \mapsto \ln(1+x)$:
  - × On commence par remarquer : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
  - × Or la série entière $\sum (-x)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1+x} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, x^n$$

  - × D'après la propriété précédente, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\ln(1+x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Exercice 7

Pour tout $x \in]-1, 1[$, déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

III.2.c) Dérivée de la somme d'une série entière

Théorème 13.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et :

$$\forall x \in\,]-R, R[,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) \ = \ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n\, x^{n-k}$$

Démonstration.

- D'après le Théorème 4, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum n\, a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence.
- On note f la somme de $\sum n\, a_n\, x^{n-1}$.
  D'après le Théorème 12, on peut primitiver terme à terme f sur $]-R, R[$.
  On obtient, pour tout $x \in\,]-R, R[$:
  $$\int_0^x f(t)\, dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x n\, a_n\, t^{n-1}\, dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$
  On en déduit que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ est dérivable sur $]-R, R[$ de dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$.
- On établit ensuite la propriété en démontrant par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-R, R[$ et
  $$\forall x \in\,]-R, R[, \quad f^{(k)}(x) \ = \ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n\, x^{n-k}$$

□

Exemple

Soit $x \in\,]-1, 1[$. Déterminer une formule explicite de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, x^n$.

Démonstration.

- On remarque :
  $$f(x) \ = \ x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} \ = \ x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2}$$
- Or, en notant $g_n : x \mapsto x^n$, on a :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n''(x) \ = \ n(n-1)\, x^{n-2}$$
  De plus : $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- On note $F : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. D'après le théorème précédent :
  $$\forall x \in\,]-1, 1[, \quad F''(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} g_n''(x)$$
  D'où, pour tout $x \in\,]-1, 1[$, $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2}$.
- On en conclut, pour tout $x \in\,]-1, 1[$:
  $$f(x) \ = \ x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2} \ = \ x^2\, \frac{2}{(1-x)^3} \ = \ \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

□

III.2.d) Expression et unicité des coefficients d'une série entière

Théorème 14.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence non nul et de somme f.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Théorème 15 (Unicité des coefficients)**.**

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence non nuls.

Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Exercice 8. *Un cas particulier du théorème d'Abel*

Soient $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum a_n x^n$ soit de rayon de convergence R.

Pour tout $x \in]-R, R[$, on pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On suppose que $\sum a_n R^n$ est convergente, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k$ et S sa limite.

1. Montrer que f est continue sur $]-R, R[$.

2. En considérant une fonction $\tilde{f}$, montrer que l'on peut se ramener au cas où $R = 1$ sans perdre de généralité.
On supposera dans la suite : $R = 1$.

3. Démontrer, pour tout $x \in]-1, 1[$: $f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

4. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

IV. Développement en série entière au voisinage de 0

IV.1. Cas des fonctions d'une variable réelle

IV.1.a) Définitions et propriétés

Définition

Soient f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dont l'intérieur contient 0, et $r > 0$.

On dit que f est **développable en série entière** sur l'intervalle $]-r, r[$ s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \,]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^n$$

Exercice 9
Déterminer la forme du développement en série entière d'une fonction paire (resp. impaire) développable en série entière.
On pourra utiliser l'unicité des coefficients d'une série entière

Définition

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de I (intervalle contenant 0) dans $\mathbb{R}$.

On appelle **série de Taylor** de f en 0 la **série entière** $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n$.

Théorème 16 (Lien entre série entière et série de Taylor)**.**

1) *Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$. Alors :*

- *(i)* *la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$,*
- *(ii)* *la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence supérieur) r,*
- *(iii)* *la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor. Autrement dit :*

$$\forall x \in \,]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n$$

2) *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.*
Alors la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ si et seulement si elle est sa somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

$$f \text{ développable en série entière} \Leftrightarrow \forall x \in \,]-r, r[, \ \lim_{N \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} \, f^{(N+1)}(t) \, dt = 0$$

Le théorème précédent indique :

$$f \text{ développable en série entière} \quad \Rightarrow \quad f \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-r, r|$$

Cependant, la réciproque est fausse en toute généralité.

$$f \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-r, r| \quad \cancel{\Rightarrow} \quad f \text{ développable en série entière}$$

On peut par exemple démontrer que la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 10
Appliquer ce théorème pour la fonction exp.

Corollaire 1.

Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.
Alors le développement en série entière de f en 0 est unique.

IV.1.b) Formulaire de développements en série entière

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Développement en série entière	Rayon de convergence
$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$R = 1$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$	$R = 1$

IV.2. Quelques développements en série entière d'une variable complexe

Développement en série entière	Rayon de convergence
$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$

IV.3. Détermination pratique de développements en série entière

MÉTHODO **Déterminer un développement en série entière**

Pour déterminer un développement en série entière, on pourra utiliser une ou plusieurs des méthodes suivantes :

1) effectuer une combinaison linéaire de DSE usuels,

2) dériver ou primitiver un DSE usuel (*cf* exemples de la Partie **III.2**),

3) utiliser une équation différentielle (*cf* section suivante)

Exercice 11

1. a) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le développement en série entière et le rayon de convergence de $z \mapsto \frac{1}{z-a}$.

b) En déduire le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1 - 2x\cos(\alpha) + x^2}$

2. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

3. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

IV.4. Application aux équations différentielles

Une équation différentielle étant donnée, on peut chercher des solutions développables en série entière.

Exemple
Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle (E) : $4xy'' + 2y' - y = 0$.

Démonstration.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**.
  Soit f une fonction développable en série entière solution de (E).
  On note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et $R > 0$ son rayon de convergence.
  - On sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Elle est donc en particulier deux fois dérivable sur cet intervalle. De plus, comme f est solution de (E) :
  $$4x\, f''(x) + 2\, f'(x) - f(x) \ = \ 0$$
  - On calcule :
  $$f' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \quad \text{et} \quad f'' : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$$
  Ainsi, pour tout $x \in\,]-R, R[$:
  $$\begin{aligned} & 4x\, f''(x) + 2\, f'(x) - f(x) \\ = \ & 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\ = \ & \sum_{n=2}^{+\infty} \big(4\, n\,(n-1)\, a_n\big)\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(2\, n\, a_n\big)\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\ = \ & \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\, n\, a_{n+1}\big)\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \big(2\,(n+1)\, a_{n+1}\big)\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\ = \ & 2\, a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\, n\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n\big)\, x^n \end{aligned}$$
  - Ainsi, comme f est solution de (E) :
  $$2\, a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\, n\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n\big)\, x^n \ = \ 0$$
  On en déduit, par unicité du développement en série entière :
  $$\left\{ \begin{array}{l} 2\, a_1 - a_0 \ = \ 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4\,(n+1)\, n\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n = 0 \end{array} \right.$$
  - On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$\begin{array}{lccc} & 4\,(n+1)\, n\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n & = & 0 \\ \text{donc} & 2\,(n+1)\,(2\,n+1)\, a_{n+1} & = & a_n \\ \text{d'où} & a_{n+1} & = & \dfrac{1}{(2n+2)\,(2n+1)}\, a_n \end{array}$$
  On démontre alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{a_0}{(2n)!}$.
  - On en conclut, pour tout $x \in\,]-R, R[$:
  $$f(x) \ = \ a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

- **Synthèse**.
  Soit $a_0 \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$. Vérifions que :
  - le rayon de convergence de cette série est strictement positif.
  On remarque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(2n)!} \neq 0$.
  On peut donc appliquer la règle de d'Alembert.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\frac{1}{\left(2(n+1)\right)!}}{\frac{1}{(2n)!}} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)\,(2n+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que le rayon de convergence de f est $+\infty$, qui est bien strictement positif.

× la fonction f est bien solution de l'équation (E).
On laisse le lecteur effectuer les calculs

On peut alors conclure que l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière est $\text{Vect}\,(g)$, où :

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \text{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

□

Ne pas oublier de vérifier, au moment de la synthèse, que le rayon de convergence de la série entière obtenue est strictement positif.

Exercice 12
On note $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 satisfaite par f puis en déduire le développement en série entière de f.

IV.5. Application aux probabilités : les fonctions génératrices

Dans cette partie, les variables aléatoires considérées sont à valeurs entières.

Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On appelle **fonction génératrice** de X la série entière :

$$G_X : t \mapsto \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\, t^k$$

Exercice 13

1. Déterminer les fonctions génératrices d'une variable aléatoire de loi :

a) constante presque sûrement,

b) de Bernoulli,

c) uniforme sur $[\![0, n]\!]$,

d) binomiale,

e) de Poisson,

f) géométrique.

2. Montrer que si X est bornée, alors G_X est une fonction polynomiale.

Théorème 17.
Le rayon de convergence d'une fonction génératrice est supérieure ou égale à 1.

Démonstration.
Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $t < 1$. Alors :

× pour tout $k \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \big(|\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\, t^k\big| \leqslant \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$,

× la série $\sum \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$ est convergente (de somme 1 car $\big(\{X = k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements).

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)t^k$ est absolument convergente.
Ainsi le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1. □

Théorème 18.

Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que : $\forall t \in [-r, r]$, $G_X(t) = G_Y(t)$.

Alors les v.a.r. X et Y suivent la même loi et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) \;=\; \frac{1}{n!}\, G_X^{(n)}(0)$$

Démonstration.

- Comme G_X est développable en série entière sur $]-1, 1[$, alors G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et est égale à sa série de Taylor. Ainsi, pour tout $t \in [-r, r]$:

$$G_X(t) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}\, t^k$$

De plus, par définition de G_X :

$$G_X(t) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\, t^k$$

Par unicité du développement en série entière, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \;=\; \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

On obtient bien sûr le même résultat pour la v.a.r. Y.

- On en déduit, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) &= \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} \\ &= \frac{G_Y^{(k)}(0)}{k!} \qquad \textit{(car } G_X = G_Y\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) \end{aligned}$$

□

Les v.a.r. X et Y ont donc même loi.

Remarque
On a démontré ici :

$$G_X = G_Y \qquad \Rightarrow \qquad X \text{ et } Y \text{ ont même loi}$$

De plus, par définition de G_X et G_Y, on a bien sûr :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \qquad \Rightarrow \qquad G_X = G_Y$$

Ainsi :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \qquad \Leftrightarrow \qquad G_X = G_Y$$

On dit alors que la fonction génératrice caractérise la loi d'une v.a.r.

Théorème 19.

Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.

1) *X admet une espérance $\quad \Leftrightarrow \quad$ G_X dérivable en 1*
Dans ce cas : $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

2) *X admet une variance $\quad \Leftrightarrow \quad$ G_X deux fois dérivable en 1*
Dans ce cas : $\mathbb{E}\big(X\,(X-1)\big) = G''_X(1)$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $p_n = \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$.

1) On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que X admet une espérance.
Alors la série $\sum n\,p_n$ est convergente. On en déduit que la série $\sum n\,p_n\,t^{n-1}$ converge normalement sur $[0,1]$. La fonction G_X est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ de dérivée, pour tout $t \in [0,1]$:

$$G'_X(t) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} n\,p_n\,t^{n-1}$$

En particulier :

$$G'_X(1) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} n\,p_n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}\big(\{X=n\}\big) \;=\; \mathbb{E}(X)$$

($\Leftarrow$) Supposons G_X dérivable en 1.
La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la sérir $\sum n\,p_n$ converge absolument. Cela revient à démontrer sa convergence car c'est une série à terme positif.

- Tout d'abord, on remarque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n\,p_n \geqslant 0$. On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} n\,p_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Il suffit donc de démontrer qu'elle est majorée pour en déduire sa convergence.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{N} n\,p_n\,t^{n-1} \;=\; \sum_{n=0}^{N} n\,p_n$$

On cherche donc à étudier $\sum n\,p_n\,t^{n-1}$.

- D'après les résultats du cours, la série dérivée $\sum n\,p_n\,t^{n-1}$ converge normalement sur tout segment inclus dans $[0,1[$.
Ainsi, pour tout $t \in [0,1[$:

$$G'_X(t) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} n\,p_n\,t^{n-1}$$

D'où, comme G_X est dérivable en 1 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,p_n\,t^{n-1} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} G'_X(1)$$

- On obtient, pour tout $t \in [0,1[$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{n=0}^{N} n\,p_n\,t^{n-1} & \leqslant & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\,p_n\,t^{n-1} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle t\to 1^-} & & \Big\downarrow{\scriptstyle t\to 1^-} \\ \sum\limits_{n=0}^{N} n\,p_n & & G'_X(1) \end{array}$$

Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} n\, p_n\right)$ est :

- × croissante,
- × majorée par $G'_X(1)$.

Elle est donc convergente.

On en déduit que X admet une espérance.

2) Avec un raisonnement similaire à celui de *1)*, on peut démontrer :

G_X est deux fois dérivable en 1 $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\sum n\,(n-1)\,p_n$ est convergente

Or :

$\sum n\,(n-1)\,p_n$ est convergente $\quad\Leftrightarrow\quad$ $X\,(X-1)$ admet une espérance

On obtient bien :

G_X est deux fois dérivable en 1 $\quad\Leftrightarrow\quad$ $X\,(X-1)$ admet une espérance

Dans ce cas :

$$G''_X(1) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1)\,p_n\, 1^{n-2} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1)\,p_n \ = \ \mathbb{E}\big(X\,(X-1)\big)$$

□

Exercice 14

1. Lorsqu'elle existe, exprimer la variance de X en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

2. Reprendre les exemples concernant les lois classiques.

Théorème 20.

Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonctions génératrices G_X et G_Y.

Supposons que X et Y sont indépendantes.

Alors : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

Démonstration.
Soit $t \in\,]-1,1[$.

$$\begin{array}{rcll} G_{X+Y}(t) & = & \mathbb{E}\left(t^{X+Y}\right) & \\ & = & \mathbb{E}\left(t^X\, t^Y\right) & \\ & = & \mathbb{E}\left(t^X\right)\mathbb{E}\left(t^Y\right) & \textit{(car, comme } X \textit{ et } Y \textit{ indépendantes, } t^X \textit{ et } t^Y \textit{ le sont par lemme des coalitions)} \\ & = & G_X(t)\, G_Y(t) & \end{array}$$

□

La réciproque est fausse !
Notons X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $[\![0,2]\!]$ de loi jointe :

$$\mathbb{P}\big(\{X=0\}\cap\{Y=0\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X=2\}\cap\{Y=2\}\big) = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}\big(\{X=0\}\cap\{Y=2\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=0\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X=2\}\cap\{Y=1\}\big) = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{P}\big(\{X=0\}\cap\{Y=1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=2\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X=2\}\cap\{Y=0\}\big) = 0$$

On peut alors vérifier qu'on a bien : $G_{X+Y} = G_X\, G_Y$. Cependant X et Y ne sont pas indépendantes.

Théorème 21 (Stabilité de lois usuelles)**.**

1) *Soient $p \in [0,1]$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des v.a.r. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$.*
Alors $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

2) *Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.*
Alors $X+Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Démonstration.

1) Soit $t \in \,]-1,1[$.

$$\begin{aligned} G_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) &= \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) && \textit{(par récurrence, car } X_1, \dots, X_n \textit{ mutuellement indépendantes)} \\ &= \left(G_{X_1}(t)\right)^n && \textit{(car } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ &= \big((1-p)+p\,t\big)^n && \textit{(d'après l'Exercice 13)} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Or la fonction génératrice caractérise la loi. Ainsi : $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n,p)$.

2) Soit $t \in \,]-1,1[$.

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= G_X(t) \times G_Y(t) && \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ indépendantes)} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda\,(t-1)}\,\mathrm{e}^{\mu\,(t-1)} && \textit{(d'après l'Exercice 13)} \\ &= \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)\,(t-1)} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une v.a.r. de loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. Or la fonction génératrice caractérise la loi. Ainsi : $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. □

Exercice 15

1. Soient X une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(n,p)$ et Y une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(m,p)$. On suppose que X et Y sont indépendantes.
Déterminer la loi de $X+Y$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(X_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi, et T une v.a.r. à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ indépendante des (X_k).

a) Déterminer la fonction génératrice de $S : \omega \mapsto \sum\limits_{k=1}^{T(\omega)} X_k(\omega)$ en fonction des fonctions génératrices de X_1 et de T.

b) **[Identité de Wald]** Si X_1 et T sont d'espérances finies, montrer que S est d'espérance finie et : $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(T)$.

c) Déterminer la valeur moyenne obtenue en sommant le résultat de T lancers de dés, lorsque T suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.