CH X : Séries entières

I. Motivation (rapide) du chapitre

Dans le chapitre « Séries numériques », nous avons rencontré les résultats suivants :

1) $\boxed{\text{Si } |x| < 1,\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k \ = \ \dfrac{1}{1-x}}$ *2)* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \ = \ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}}$

- L'écriture $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un « polynôme de degré $+\infty$ ».
- Les fonctions polynomiales sont des fonctions idéales à bien des égards :
  - × l'ensemble des fonctions polynomiales est stable par somme et produit ce qui permet des manipulation algébriques simples de l'objet polynôme.
  - × les fonctions polynomiales sont infiniment dérivables et il est simple d'en déterminer la dérivée. Elles sont aussi facilement intégrables et il est simple d'en déterminer des primitives.
  - × l'ensemble des fonctions polynomiales est souvent utilisé comme socle de base de beaucoup de notions analytiques et notamment de toutes celles concernant les limites. Typiquement, lorsqu'on étudie la notion de continuité (puis celle de dérivabilité puis la notion de classe $\mathscr{C}^k$ puis $\mathscr{C}^\infty$), on signale que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. On se sert de ces fonctions et d'autres fonctions usuelles (comme les fonctions ln, $\sqrt{\cdot}$, exp ...) pour construire de nouvelles fonctions continues par somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou encore comme composée (en travaillant sur des intervalles adéquates) de fonctions continues.
- Si le cadre des fonctions polynomiales est assez idéal, il faut toutefois noter qu'il est assez restreint : peu de fonctions sont polynomiales. Ce manque d'expressivité de la notion de fonction polynomiale est son défaut majeur.
- Il faut nuancer le point précédent. Une fonction qui n'est pas polynomiale peut, si elle est suffisamment régulière, être approchée au voisinage d'un point, par une fonction polynomiale. C'est le résultat fourni par le théorème de Taylor avec reste intégral (qui donne lieu aux développements limités). On parvient ainsi à relier un grand nombre de fonctions avec des fonctions polynomiales.
- Maintenant que l'on a bien cerné l'intérêt des fonctions polynomiales, revenons à l'objet $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n$. Les résultats donnés en début de remarque (série géométrique et série exponentielle) sont particulièrement intéressants. En s'autorisant à considérer des polynômes de degré $+\infty$, on s'aperçoit que l'on gagne grandement en expressivité. On parvient notamment à présenter la fonction exponentielle comme « fonction polynomiale de degré $+\infty$ ». Cela démontre qu'il est pertinent de creuser l'étude de cette généralisation des polynômes. En particulier, deux questions paraissent assez naturelle :
  - *(1)* quelles sont les fonctions qui s'expriment sous forme de « fonction polynomiale de degré $+\infty$ » ?

    Autrement dit, quelle est l'expressivité de cette nouvelle construction ?
  - *(2)* accepter le degré $+\infty$ fait-il perdre le caractère idéal du cadre des fonctions polynomiales. Plus précisément, comment cette construction se comporte-t-elle d'un point de vue analytique. Conserve-t-on la régularité des polynômes ?

Le but de ce chaître est de répondre à ces deux questions.

II. Notion de série entière

II.1. Introduction et vocabulaire

II.1.a) Série entière de la variable réelle et de la variable complexe

Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique à coefficients réels ou complexes.

- Une **série entière** de la variable complexe est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a_n\, z^n \end{array}$$
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n\, z^n}$.
On note généralement :
$$S : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\, z^n \end{array}$$
la fonction somme de cette série entière.
- Une **série entière** de la variable réelle est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & a_n\, x^n \end{array} \quad \left(\begin{array}{c}\text{plus précisément, } f_n \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R} \\ \text{si } (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ et } f_n \text{ est à valeurs dans } \mathbb{C} \text{ si} \\ (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\end{array}\right)$$
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n\, x^n}$.
On note généralement :
$$S : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\, x^n \end{array}$$
la fonction somme de cette série entière.
- Les coefficients de la suite (a_n) sont appelés **coefficients** de la série entière.

Remarque

- Il est primordial de comprendre qu'une série entière est une série de fonctions. En toute rigueur, en lieu et place de la notation $\sum a_n\, x^n$, on devrait écrire $\sum f_n$ où :
$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto a_n\, x^n$$
où même écrire : $\sum \left(x \mapsto a_n\, x^n\right)$. Ces notations sont considérées trop lourdes et on préfère donc la notation $\sum a_n\, x^n$ même si elle ne permet pas de faire la différence entre :
  - × série entière $\sum a_n\, x^n$,
  - × série numérique $\sum a_n\, x^n$ où x est un nombre réel donnée.
- Une série entière étant une série de fonctions particulière, toute l'étude effectuée sur les séries de fonctions va servir pour effectuer l'étude des séries entières. En particulier, on pourra se poser les questions :
  - × de convergence simple sur un intervalle I d'une série entière $\sum a_n\, x^n$,
  - × de convergence uniforme sur un intervalle I d'une série entière $\sum a_n\, x^n$,
  - × de convergence normale sur un intervalle I d'une série entière $\sum a_n\, x^n$.

  On pourra évidemment se servir, sous les hypothèses habituelles, de tous les résultats d'interversion de symboles qui ont été étudiés lors du chapitre sur les séries de fonctions.
- Une série entière est une série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général possède une forme très particulière :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto a_n\, x^n$$
Cette forme va amener certaines particularités, notamment concernant :
  - × la forme de l'intervalle de convergence simple,
  - × la propriété de convergence normale.

- Dans le point précédent, on a signalé qu'une série entière de la variable réelle est une série de fonctions particulière. On s'est bien gardé d'écrire une telle chose pour une série entière de la variable complexe $\sum a_n z^n$. Dans le chapitre sur les (suites et) séries de fonctions, on a étudié des suites de fonctions (f_n) qui sont des éléments de $\left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ où I est un intervalle RÉEL non réduit à un point. Une série entière de la variable complexe $\sum a_n z^n$ est de ce point de vue un nouvel objet (puisque $f_n : z \mapsto a_n z^n$ est une fonction qui est un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$). Pour cet objet, on se limitera à chercher les valeurs de $z_0 \in \mathbb{C}$ qui assurent la convergence de la série numérique $\sum a_n z_0{}^n$. Autrement dit, on cherchera sur quel ensemble complexe a lieu la convergence simple de la série entière $\sum a_n z^n$.
- On va voir que les séries entières de la variable réelle $\sum a_n x^n$ sont des séries de fonctions qui vérifient beaucoup de propriétés permettant une manipulation simple de leur somme. Autant le dire, les séries entières de la variable réelle constituent un cadre idéal d'étude de séries de fonctions. On pourra notamment justifier facilement du caractère infiniment dérivable de leur somme et intervertir sans beaucoup plus de difficulté les symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_a^b$.

II.1.b) Convergence simple de séries entières : premiers exemples

- $\boxed{\sum x^n}$

  Étudions la convergence simple de cette série entière de la variable réelle. On cherche les réels x_0 tels que la série numérique $\sum x_0{}^n$ est convergente.

  × Si $|x_0| < 1$ c'est-à-dire si $x_0 \in]-1,1[$ alors la série numérique $\sum x_0{}^n$ est (absolument) convergente.

  Profitons-en pour rappeler :

  $$\forall x_0 \in]-1,1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} x_0{}^n = \frac{1}{1-x_0}$$

  × Si $|x_0| \geqslant 1$ c'est-à-dire si $x_0 \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ alors la série numérique $\sum x_0{}^n$ est (grossièrement) divergente.

- $\boxed{\sum z^n}$

  Pour bien saisir la différence d'objets, étudions maintenant la convergence simple de la série entière de la variable complexe $\sum z^n$.

  × Si $|z_0| < 1$ c'est-à-dire si z_0 est un élément du disque ouvert unité alors la série numérique $\sum z_0{}^n$ est (absolument) convergente.

  Profitons-en pour rappeler :

  $$\forall |\, z_0 \,| < 1, \ \sum_{n=0}^{+\infty} z_0{}^n = \frac{1}{1-z_0}$$

  × Si $|z_0| \geqslant 1$ alors la série numérique $\sum z_0{}^n$ est (grossièrement) divergente.

  Pour la série entière $\sum a_n x^n$, on a démontré que la convergence simple avait lieu sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.
  Pour la série entière $\sum a_n z^n$, on a démontré que la convergence simple avait lieu sur le disque ouvert unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |\, z \,| < 1\}$.

- $\boxed{\sum \frac{x^n}{n}}$

  × Si $|x_0| < 1$ c'est-à-dire si $x_0 \in]-1,1[$ alors la série numérique $\sum \frac{x_0{}^n}{n}$ est (absolument) convergente.

  × Si $|x_0| > 1$ c'est-à-dire si $x_0 \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ alors la série numérique $\sum \frac{x_0{}^n}{n}$ est (grossièrement) divergente.

  × Si $|x_0| = 1$ deux cas se présentent :

  - si $x_0 = -1$ alors la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (par critère spécial des séries alternées).
  - si $x_0 = 1$ alors la série numérique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente en tant que série de Riemann d'exposant 1 ($\ngtr 1$).

  Il y a donc convergence simple sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. La convergence est aussi assurée sur l'une des deux valeurs du bord et il y a divergence dans tous les autres cas.

- $\boxed{\sum \dfrac{z^n}{n}}$

  × Si $|z_0| < 1$ alors la série numérique $\sum \dfrac{{z_0}^n}{n}$ est (absolument) convergente.

  × Si $|z_0| > 1$ alors la série numérique $\sum \dfrac{{z_0}^n}{n}$ est (grossièrement) divergente.

  × Si $|z_0| = 1$, on a déjà constaté que :

  ▸ si $z_0 = -1$ alors la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente (par critère spécial des séries alternées).

  ▸ si $z_0 = 1$ alors la série numérique $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente en tant que série de Riemann d'exposant 1 ($\not> 1$).

  Il reste alors tous les cas où z_0 est un élément du **cercle** unité et différent de -1 et 1.

  En fait, on peut démontrer que la série numérique $\sum \dfrac{\left(e^{i\theta}\right)^n}{n}$ est convergente pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

  Il y a donc convergence simple sur le disque ouvert unité. La convergence est aussi assurée sur le cercle unité privé du point 1 et il y a divergence dans tous les autres cas.

- Sur ces deux premiers exemples, on voit apparaître un comportement similaire, à savoir :

  × convergence sur un intervalle ouvert (ou disque ouvert dans le cas des séries entières de la variables complexe),

  × une étude plus précise qui doit être menée sur le bord de l'intervalle ouvert (ou sur le bord du disque ouvert) où il peut y avoir convergence ou divergence,

  × divergence au-delà.

  Ce comportement est en fait toujours vérifié pour les séries entières comme le démontre le paragraphe qui suit.

II.2. Rayon de convergence d'une série entière

II.2.a) Rayon de convergence

Définition

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On note E_a l'ensemble défini par :

$$\begin{aligned} E_a &= \left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée} \right\} \\ &= \left\{ |z| \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } \left(a_n z^n\right) \text{ est bornée} \right\} \end{aligned}$$

- On appelle rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ défini par :

  × $R = \sup \left(E_a\right)$ si l'ensemble E_a est majoré,

  × $R = +\infty$ si l'ensemble E_a n'est pas majoré.

Remarque

- En première année, on a vu que toute partie réelle non vide et majorée possède une borne supérieure (on dit que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de borne supérieure). Ici, l'ensemble $E_a = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée}\}$ est une partie réelle (on a même $E_a \subset \mathbb{R}_+$) qui est non vide car elle contient toujours 0. Si cette partie est de plus majorée, alors elle possède une borne supérieure qui est, par définition, le plus petit de ses majorants.
- Si $R \neq +\infty$, le réel R apparaît comme un majorant de E_a. Pour autant le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ n'est pas forcément un élément de E_a. Autrement dit, la suite $\left(a_n R^n\right)$ peut être bornée ou ne pas l'être. Cela dépendra de la série entière étudiée.
- Rappelons qu'une suite numérique (à valeurs réelles ou complexes) (u_n) est bornée si la suite numérique $\left(|u_n|\right)$ est majorée. On peut alors démontrer :

$$\begin{aligned} &\text{La suite numérique } \left(a_n z^n\right) \text{ est bornée} \\ \Leftrightarrow\ &\text{La suite numérique } \left(a_n |z|^n\right) \text{ est bornée} \end{aligned}$$

Pour autant, il ne faudra pas confondre E_a, partie de $\mathbb{R}_+$ avec l'ensemble D_a suivant :

$$D_a \;=\; \left\{z \in \mathbb{C} \mid \text{La suite numérique } (a_n\, z^n) \text{ est bornée}\right\} \;\subset\; \mathbb{C}$$

Si la série entière étudiée est une série entière de la variable réelle, on utilisera la même notation D_a pour désigner :

$$D_a \;=\; \left\{x \in \mathbb{R} \mid \text{La suite numérique } (a_n\, x^n) \text{ est bornée}\right\}$$

- Les ensembles E_a et D_a sont tous les deux intéressants à étudier. Plus précisément, déterminer leur forme nous fournira des informations sur la série entière $\sum\ a_n\, z^n$. Dans le cas où $R \neq +\infty$, R est un majorant de E_a. Cela permet d'affirmer que pour tout $r \geqslant 0$:

$$r \in E_a \;\Rightarrow\; r \;\leqslant\; R$$

On peut alors se poser la question de la réciproque.
Peut-on affirmer : $r \;\leqslant\; R \;\Rightarrow\; r \in E_a$?
Si cette propriété était vérifiée, on pourrait notamment affirmer que R est toujours un élément de E_a ce qui ne paraît pas forcément crédible d'après l'un des points précédents (une borne supérieure n'est pas forcément atteinte). Il serait plus légitime de savoir si la propriété suivante est vérifiée :

$$r \;<\; R \;\Rightarrow\; r \in E_a$$

C'est l'objectif du théorème suivant.

II.2.b) L'ensemble E_a est l'intervalle $[0, R|$

Théorème 1.

Soit $\sum\ a_n\, z^n$ une série entière.
Notons :
- × *R le rayon de convergence de cette série entière.*
- × $D_a \;=\; \left\{z \in \mathbb{C} \mid \textit{La suite numérique } (a_n\, z^n) \textit{ est bornée}\right\}$
- × $E_a \;=\; \left\{\ r \in \mathbb{R}_+ \mid \textit{La suite numérique } \left(a_n\, r^n\right) \textit{ est bornée}\ \right\}$

0. *Si $R = +\infty$ alors :*
- × *pour tout $r \geqslant 0$, la suite $\left(a_n\, r^n\right)$ est bornée.*
- × *pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $\left(a_n\, z^n\right)$ est bornée.*

On suppose maintenant $R \neq +\infty$.

1. a) *Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}_+$:* $\boxed{r_0 < R \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\textit{La suite numérique}\\ \left(a_n\, {r_0}^n\right) \textit{ est bornée}\end{array}}$

Cela démontre : $\boxed{[0, R[\; \subset E_a}$

b) *Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$:* $\boxed{|\, z_0\,| < R \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\textit{La suite numérique}\\ \left(a_n\, {z_0}^n\right) \textit{ est bornée}\end{array}}$

Cela démontre : $\boxed{\mathscr{B}(0, R) \subset D_a}$

2. a) *Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}_+$:* $\boxed{r_0 > R \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\textit{La suite numérique}\\ \left(a_n\, {r_0}^n\right) \texttt{ N'} \textit{ est } \texttt{PAS} \textit{ bornée}\end{array}}$

Cela démontre : $\boxed{]R, +\infty[\; \subset \overline{E_a}}$ *et donc* $\boxed{E_a \subset [0, R]}$

b) *Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$:* $\boxed{|\, z_0\,| > R \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\textit{La suite numérique}\\ \left(a_n\, {z_0}^n\right) \texttt{ N'} \textit{ est } \texttt{PAS} \textit{ bornée}\end{array}}$

Cela démontre : $\boxed{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{B}(0, R)} \;\subset\; \mathbb{C} \setminus \overline{D_a}}$ *et donc* $\boxed{\overline{D_a} \;\subset\; \overline{\mathscr{B}(0, R)}}$

Remarque

- Il faut bien comprendre que ce théorème ne fournit aucun résultat sur la suite $\left(a_n {z_0}^n\right)$ lorsque z_0 se situe sur $\mathscr{C}(0, R)$ (le cercle de centre 0 et de rayon R). Elle peut être bornée ou non.
- De la même manière, ce théorème ne permet pas de savoir si la suite $\left(a_n R^n\right)$ est bornée ou non. Ainsi : $E_a = [0, R]$ ou $E_a = [0, R[$.

Démonstration.

1. ***a)*** Soit $r_0 \geqslant 0$. On suppose $r_0 < R$.
Deux cas se présentent.

- Si la suite $(a_n R^n)$ est bornée (c'est-à-dire $R \in E_a$).
Il existe donc $M \geqslant 0$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| a_n R^n \right| \ \leqslant\ M \qquad (*)$$
(remarquons au passage que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| a_n R^n \right| = \left| a_n \right| R^n$)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{array}{lrcll} & {r_0}^n & \leqslant & R^n & \textit{(car la fonction } x \mapsto x^n \textit{ est croissante sur } [0, +\infty[\textit{)} \\ \text{donc} & \left| a_n \right| {r_0}^n & \leqslant & \left| a_n \right| R^n & \\ \text{donc} & \left| a_n \right| {r_0}^n & \leqslant & M & \textit{(par } (*)\textit{)} \end{array}$$
On a démontré : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| a_n \right| r^n \leqslant M$.
Ainsi, la suite $(a_n R^n)$ est bornée.
- Si la suite $(a_n R^n)$ n'est pas bornée (c'est-à-dire $R \notin E_a$).
Démontrons qu'il existe $r \in \left]r_0, R\right[$ tel que la suite $(a_n {r_0}^n)$ est bornée. On procède par l'absurde.
On suppose que pour tout réel $r \in \left]r_0, R\right[$, la suite $(a_n {r_0}^n)$ est non bornée (c'est-à-dire : $\forall r \in \left]r_0, R\right[,\ r \notin E_a$). On sait de plus :
   × $R \notin E_a$ par hypothèse,
   × $\forall r > R,\ r \notin E_a$. En effet, par définition, R est un majorant de E_a ce qui signifie :
   $$\forall r \in E_a,\ r \ \leqslant\ R$$
   Il ne peut donc exister de réel $r \in E_a$ tel que $r > R$.

   Finalement : $\forall r > r_0,\ r \notin E_a$. On en déduit : $E_a \subset [0, r_0]$.
   En particulier : $\forall r \in E_a,\ r \leqslant r_0$. Le réel r_0 est un majorant de l'ensemble E_a qui est strictement plus petit que R.
   C'est impossible par définition de R.

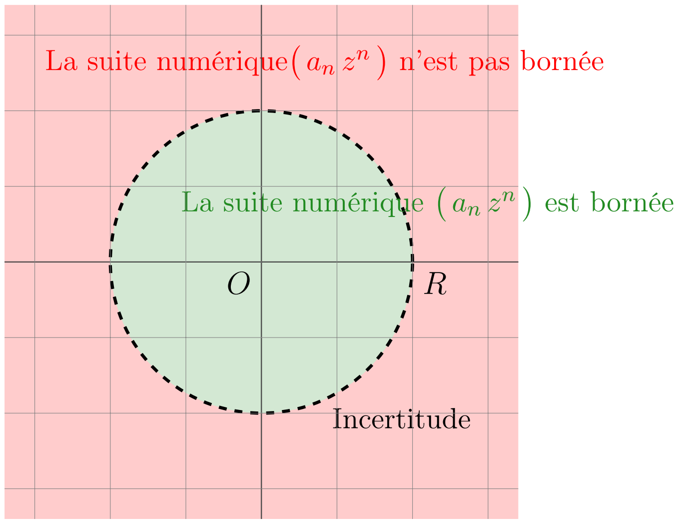
   Finalement : il existe $r \in \left]r_0, R\right[$ tel que la suite $(a_n {r_0}^n)$ est bornée.
   On se retrouve alors dans la situation du premier point étudié ci-dessus (en remplaçant R par r). En raisonnant de manière similaire, on démontre que la suite $\left(a_n {r_0}^n \right)$ est bornée.

b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons $\left| z_0 \right| < R$.
Notons alors $r_0 = \left| z_0 \right|$.
D'après le point précédent, la suite $\left(a_n {r_0}^n \right)$ est bornée. Cela implique que la suite $\left(a_n {z_0}^n \right)$ est bornée et achève ainsi la démonstration.

2. ***a)*** Soit $r_0 \geqslant 0$. Supposons $r_0 > R$.
Comme R est un majorant de E_a, alors forcément $r_0 \notin E_a$ (sinon on aurait $r \leqslant R$). La suite $\left(a_n r^n \right)$ est donc non bornée.

b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons $\left| z_0 \right| > R$.
Notons alors $r_0 = \left| z_0 \right|$.
D'après le point précédent, la suite $\left(a_n {r_0}^n \right)$ est non bornée. Cela implique que la suite $\left(a_n {z_0}^n \right)$ n'est pas bornée non plus. □

Représentation graphique associée (cas $R \neq +\infty$)



II.2.c) Lemme d'Abel et conséquence

Théorème 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

La suite numérique $(a_n z_0{}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée	$\Rightarrow$	*Pour tout $\|z\| < \|z_0\|$ la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument*

Démonstration.

Supposons que la suite numérique $(a_n z_0{}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n z_0{}^n| \leqslant M$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons : $|z| < |z_0|$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n z^n| = |a_n| \, |z|^n = \frac{|z|^n}{|z_0|^n} |a_n| \, |z_0{}^n| = \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n |a_n z_0{}^n| \leqslant M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$$

On obtient :

× $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |a_n z^n| \leqslant M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$

× La série $\sum \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ est convergente car géométrique de raison $\frac{|z|}{|z_0|} < 1$.
Ainsi la série $\sum M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ l'est aussi.
(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum |a_n z^n|$ est convergente.
Autrement dit, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. □

Remarque

- On l'a signalé précédemment : dire que la suite $\left(a_n z^n\right)$ est bornée équivaut au fait que la suite $\left(a_n |z|^n\right)$ soit bornée. De manière similaire, la convergence absolue de la série $\sum a_n z^n$ équivaut à la convergence absolue de la série $\sum a_n |z|^n$.
- Dès lors, la version énoncée du lemme d'Abel suffit à démontrer la suivante. Pour tout $r_0 > 0$:

La suite numérique $(a_n r_0{}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée	$\Rightarrow$	Pour tout $r < r_0$ la série numérique $\sum a_n r^n$ converge absolument

Théorème 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

0. *Cas où $R = +\infty$*
Dans ce cas, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum a_n z_0{}^n$ est convergente.

On suppose maintenant $R \neq +\infty$.

1. a) *Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$:* $r < R \Rightarrow$ *La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente*

b) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:* $|z| < R \Rightarrow$ *La série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente*

2. a) *Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$:* $r > R \Rightarrow$ *La série numérique $\sum a_n r^n$ est grossièrement divergente*

b) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:* $|z| > R \Rightarrow$ *La série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente*

Démonstration.

1. a) Soit $r \geqslant 0$. Supposons $r < R$. Notons $r_0 = \dfrac{r+R}{2}$. Alors :

$$r < r_0 < R$$

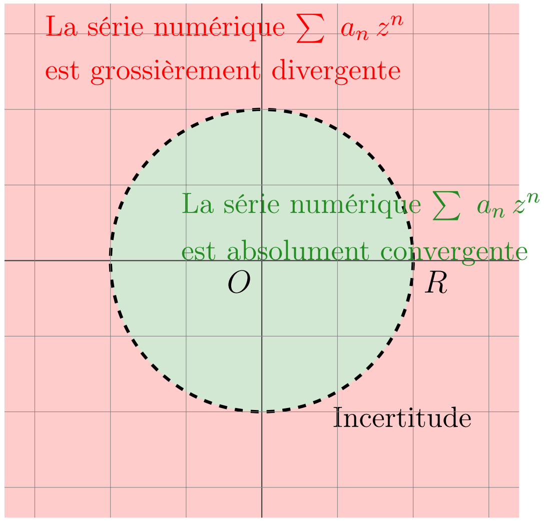
Comme $r_0 < R$, alors, par le théorème 1, $r_0 \in E_a$. Autrement dit, la suite numérique $\left(a_n {r_0}^n\right)$ est bornée. Comme $r < r_0$, le lemme d'Abel permet de conclure que la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente.

b) On reprend la démonstration précédente en remplaçant r par $|\,z\,|$ et r_0 par $z_0 = \frac{r+R}{2}$.

2. a) D'après le théorème 1, si $r > R$ alors la suite $\left(a_n r^n\right)$ n'est pas bornée et donc la série $\sum a_n r^n$ est grossièrement divergente.

b) D'après le théorème 1, si $|\,z\,| > R$ alors la suite $\left(a_n z^n\right)$ n'est pas bornée et donc la série $\sum a_n r^n$ est grossièrement divergente. □

Représentation graphique du schéma de convergence (cas $R \neq +\infty$)



Définition

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

- On appelle **disque ouvert de convergence** le disque de centre 0 et de rayon R c'est-à-dire l'ensemble défini par :

$$\mathscr{B}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

- Dans le cas d'une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ de rayon R, appelle **intervalle ouvert de convergence** le disque de centre 0 et de rayon R c'est-à-dire l'ensemble défini par :

$$\mathscr{B}(0,R) \;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x < R\} \;= \,]-R,R[$$

Remarque

- Ce théorème permet de justifier, après coup, la terminologie **rayon de convergence**. Dans le cas où $R \neq +\infty$, le rayon de conevrgence R d'une série entière est l'unique réel $R \geqslant 0$ tel que :
  - × $\forall\,|\,z\,| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
  - × $\forall\,|\,z\,| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.
- Insistons de nouveau sur le fait que l'on ne possède pas de connaissance, a priori, sur le bord du disque ouvert de convergence. Autrement dit, si $|\,z\,| = R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ peut être convergente ou divergente. On peut trouver des exemples de séries entières telles que :
  - × pour tout $|z| = R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge.
    Considérer par exemple la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$.
  - × pour tout $|z| = R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge.
    Considérer par exemple la série entière $\sum z^n$.
  - × il existe des complexes $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| = R$ tels que la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge et des complexes $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| = R$ tels que la série numérique $\sum a_n z^n$ converge.
    Considérer par exemple la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n}$.

II.3. Estimation du rayon de convergence

II.3.a) Majoration / minoration du rayon de convergence

Théorème 4.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On note R son rayon de convergence.

1. *Minoration du rayon de convergence*

a) *Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n {z_0}^n$ est (absolument) convergente* $\Rightarrow R \geqslant |z_0|$

b) *Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n {z_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée* $\Rightarrow R \geqslant |z_0|$

c) *Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n {z_0}^n = 0$* $\Rightarrow R \geqslant |z_0|$

2. *Majoration du rayon de convergence*

a) *Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n {z_0}^n$ est (grossièrement) divergente* $\Rightarrow R \leqslant |z_0|$

b) *Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n {z_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée* $\Rightarrow R \leqslant |z_0|$

c) *Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n {z_0}^n \neq 0$* $\Rightarrow R \leqslant |z_0|$

Exemple

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \sin(n)\, z^n$.

Démonstration.

On note R le rayon de convergence de cette série.

- On remarque d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant |\sin(n)\, 1^n| \leqslant 1$$

La suite $\big(|\sin(n)\, 1^n|\big)$ est donc bornée.
La suite $\big(\sin(n)\, 1^n\big)$ est donc également bornée. Ainsi :

$$R \geqslant 1$$

- De plus, la série $\sum |\sin(n)\, 1^n|$ est (grossièrement) divergente (la suite $\big(|\sin(n)|\big)$ ne tend pas vers 0). On en déduit :

$$R \leqslant 1$$

Finalement : $R = 1$. □

II.3.b) Théorème de comparaison

Théorème 5.

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.

1) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n| \Rightarrow R_a \geqslant R_b}$

2) $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n) \Rightarrow R_a \geqslant R_b}$

3) $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \Rightarrow R_a = R_b}$

Démonstration.

1) Supposons : $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n)$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$|a_n| \leqslant M\,|b_n|$$
Soit $z \in \mathbb{C}$. On obtient, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$|a_n\, z^n| \leqslant M\,|b_n\, z^n|$$
Supposons alors : $|z| < R_b$. On cherche à montrer que la suite $(a_n\, z^n)$ est bornée pour en déduire : $R_a \geqslant R_b$.

- Comme $|z| < R_b$, alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $|z| < r < R_b$. On obtient :
$$|b_n\, z^n| = |b_n\, r^n| \left|\frac{z}{r}\right|^n$$
On en déduit :
$$|a_n\, z^n| \leqslant M\,|b_n\, r^n| \left|\frac{z}{r}\right|^n$$
- Or, comme $r < R_b$, la suite $(b_n\, r^n)$ est bornée. De plus, comme $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{z}{r}\right|^n = 0$.
On en déduit que la suite $(|a_n\, z^n|)$ est bornée.

Ainsi, la suite $(a_n\, z^n)$ est bornée. Ceci est vrai pour tout z tel que $|z| < R_b$.
D'où : $R_a \geqslant R_b$.

2) Supposons : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. Alors il existe une suite (ε_n) telle que :
$$a_n = b_n\,(1+\varepsilon_n) \qquad \text{où} \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$
D'où :
$$|a_n| = |b_n|\,|1+\varepsilon_n| \leqslant |b_n|\,\big(1+|\varepsilon_n|\big)$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$|a_n| \leqslant 2\,|b_n|$$
D'où : $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n)$. D'après le point précédente : $R_a \geqslant R_b$.
Par symétrie de $\underset{n\to+\infty}{\sim}$, on obtient : $R_b \geqslant R_a$.
Finalement : $R_a = R_b$.

3) Supposons : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n\,b_n$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Supposons : $|z| < R_a$. On sait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|a_n\, z^n| = |n\, b_n\, z^n| \geqslant |n\, b_n|$$
Comme $|z| < R_a$, alors la suite $(|a_n\, z^n|)$ est bornée. On en déduit que la suite $(|b_n\, z^n|)$ aussi.
Finalement :
$$R_b \geqslant R_a$$
- Supposons : $|z| < R_b$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $|z| < r < R_b$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|a_n\, z^n| = |a_n\, r^n| \left|\frac{z}{r}\right|^n = |n\, b_n\, r^n| \left|\frac{r}{r}\right|^n = |b_n\, r^n| \times n \left|\frac{z}{r}\right|^n$$
Or, comme $r < R_b$, la suite $(|b_n\, r^n|)$ est bornée. De plus, par croissances comparées, comme $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \left|\frac{z}{r}\right|^n = 0$.
On en déduit que la suite $(|a_n\, z^n|)$ est bornée.
Finalement :
$$R_a \geqslant R_b$$

□

Exercice 1

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum \dfrac{n^3}{n!}\, z^n$

2. Déterminer, grâce à la formule de Stirling, le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{n^n}{n!}\, z^n$.

II.3.c) Règle de d'Alembert

Rappel de la règle pour les séries numériques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que les termes de (u_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ (la suite numérique $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ est convergente ou diverge vers $+\infty$).

Alors *1)* $0 \leqslant \ell < 1 \quad \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (absolument) convergente

2) $\ell > 1 \quad \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente

Théorème 6.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On suppose que les termes de (a_n) sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in [0,+\infty]$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{L}$.

(avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$)

Démonstration.

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Dans la suite, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n {z_0}^n$.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}\,{z_0}^{n+1}}{a_n\,{z_0}^n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,\frac{|z_0|^{n+1}}{|z_0|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|z_0| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L\times|z_0|$$

(avec la convention $L\times|z_0| = +\infty$ si $L = +\infty$)

- Trois cas se présentent alors.
  - × Si $L = +\infty$ alors $\ell = +\infty$.
    D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n {z_0}^n$ est (grossèrement) divergente et ce pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
    Dans ce cas : $\boxed{R = 0}$.
  - × Si $L = 0$ alors $\ell = 0 \times |z_0| = 0 \in [0,1[$.
    D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum a_n {z_0}^n$ est convergente et ce pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
    Dans ce cas : $\boxed{R = +\infty}$.
  - × Si $L \in \mathbb{R}^*$, remarquons :

$$L \times |z_0| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z_0| < \tfrac{1}{L}$$

    - ▸ D'après la règle de d'Alembert, **pour tout** $|z_0| < \frac{1}{L}$, la série numérique $\sum a_n {z_0}^n$ est absolument convergente. On en déduit : $R \geqslant \frac{1}{L}$.
    - ▸ D'après la règle de d'Alembert, **pour tout** $|z_0| > \frac{1}{L}$, la série numérique $\sum a_n {z_0}^n$ est grossièrement divergente. On en déduit : $R \leqslant \frac{1}{L}$.

    Finalement, dans ce cas : $\boxed{R = \dfrac{1}{L}}$. □

II.3.d) Quelques exemples

Exercice 2
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3n}{n+2}x^n$.

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n}\, x^{2n}$.

3. $\sum\ a_n\ x^n$ où la suite (a_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Démonstration.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{\left| \frac{3(n+1)}{(n+1)+2} \right|}{\left| \frac{3n}{n+2} \right|} \\ &= \frac{3n+3}{n+3}\ \frac{n+2}{3n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n\times n}{n\times 3n} \\ &= 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

On en déduit, par la règle de d'Alembert, que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3n}{n+2}x^n$ est de rayon de convergence : $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0) = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| &= \frac{\left| \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{n+1}\ {x_0}^{2\,(n+1)} \right|}{\left| \frac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n} \right|} \\ &= \frac{|\,\mathrm{ch}(n+1)\,|}{|\,\mathrm{ch}(n)\,|} \times \frac{|\,n\,|}{|\,n+1\,|} \times \frac{|\,x_0\,|^{2n+2}}{|\,x_0\,|^{2n}} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)}\ \frac{n}{n+1}\ |x_0|^2 \end{aligned}$$

Or :

× $\dfrac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}+\mathrm{e}^{-(n+1)}}{\cancel{2}}\ \dfrac{\cancel{2}}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^1$

× $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1$

Finalement : $\dfrac{|\,u_{n+1}(x_0)\,|}{|\,u_n(x_0)\,|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^1 \times 1 \times |\,x_0\,|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1\ |\,x_0\,|^2$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^1\ |\,x_0\,|^2 < 1 &\Leftrightarrow |\,x_0\,|^2 < \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &\Leftrightarrow |\,x_0\,| < \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \quad \textit{(car la fonction racine est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \end{aligned}$$

- D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|\,x_0\,| < \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est absolument convergente.
  On en déduit : $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
- D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|\,x_0\,| > \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est grossièrement divergente.
  On en déduit : $R \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } R = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.}$$

3. • Tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant 4$$

On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur au rayon de convergence de la série entière $\sum 4 x^n$.
Ainsi : $R \geqslant 1$.

• Par ailleurs, la série $\sum a_n (1)^n$ (c'est-à-dire la série $\sum a_n$) est grossièrement divergente puisque la suite (a_n) n'admet pas de limite (en particulier $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$).
On en déduit : $R \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } R = 1.}$$

□

Exercice 3 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries suivantes :

a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$

c) $\sum \cos(n) z^n$

Exercice 4 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*
Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivante, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.

2. $\sum a_n x^n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

II.3.e) Rayon de convergence de la série dérivée

Théorème 7.
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1) Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^{n-1}$ et $\sum a_n z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

2) Les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n\, a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Généralisation :
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n z^n$, et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration.
Résultat immédiat à l'aide de la règle de d'Alembert. □

II.4. Opérations sur les séries entières

II.4.a) Multiplication par un scalaire de la somme d'une série entière

Théorème 8 (Opérations sur les séries entières)**.**
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.
On note R_a et R_b les rayons respectifs de ces séries entières.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum \lambda\, a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_a.

$$\boxed{\forall |z| < R_a,\ \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\lambda\, a_n\big) z^n}$$

Démonstration.
Résultat immédiat à l'aide des propriétés sur les séries numériques. □

II.4.b) Sommation des fonctions sommes de deux séries entières

Théorème 9 (Opérations sur les séries entières)**.**

Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières.*

On note R_a *et* R_b *les rayons respectifs de ces séries entières.*

On note $R = \min(R_a, R_b)$.

1. a) *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum (a_n+b_n) z^n$ *est supérieur ou égal à* $\min(R_a, R_b)$: $\boxed{R \geqslant \min(R_a, R_b)}$.

b) *On peut même être plus précis : dans le cas où* $R_a \neq R_b$*, le rayon de convergence de la série entière* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *est exactement* $\min(R_a, R_b)$.

2. *Dans tous les cas, on peut écrire :*

$$\boxed{\forall |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\ z^n\ +\ \sum_{k=0}^{+\infty} b_n\ z^n\ =\ \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_n + b_n\right)\ z^n}$$

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si $R_a = R_b$
  Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons $|z| < R_a = R_b$.
  - × Comme $|z| < R_a$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
  - × Comme $|z| < R_b$, la série numérique $\sum b_n z^n$ est absolument convergente.

  Ainsi la série numérique $\sum (a_n + b_n) z^n$ l'est aussi. On a donc démontré :

  Pour tout $|z| < R_a$, la série numérique $\sum (a_n + b_n)z^n$ est (abs) convergente

  $$\boxed{\text{D'où : } R \geqslant R_a = \min(R_a, R_b).}$$

- Si $R_a \neq R_b$
  - × Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons $|z| < \min(R_a, R_b)$.
    - ▸ Comme $|z| < R_a$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
    - ▸ Comme $|z| < R_b$, la série numérique $\sum b_n z^n$ est absolument convergente.

    Ainsi la série numérique $\sum (a_n+b_n) z^n$ l'est aussi. On a donc démontré :

    Pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, la série numérique $\sum (a_n + b_n)z^n$ est (abs) convergente

    $$\boxed{\text{D'où : } R \geqslant R_a = \min(R_a, R_b).}$$

  - × Soit $z \in \mathbb{C}$. Sans perte de généralité, supposons $R_a < R_b$ (l'autre cas se traite de manière similaire).
    Supposons : $R_a < |z| < R_b$.
    - ▸ Comme $|z| > R_a$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.
    - ▸ Comme $|z| < R_b$, la série numérique $\sum b_n z^n$ est absolument convergente.

    Ainsi, la série numérique $\sum (a_n + b_n) z^n$ est (grossièrement) divergente.
    On a donc démontré :

    Pour tout $|z| \in]R_a, R_b[$, la série numérique $\sum (a_n + b_n)z^n$ est (grossièrement) divergente

    $$\boxed{\text{D'où : } R \leqslant R_a.}$$

Finalement : $R = R_a = \min(R_a, R_b)$. □

II.4.c) Produit de Cauchy

Théorème 10 (Opérations sur les séries entières)**.**

Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières.*

On note R_a *et* R_b *les rayons respectifs de ces séries entières.*

On note (c_n) *la suite définie par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

1. *La série* $\sum c_n z^n$ *a un rayon de convergence supérieur ou égal à* $\min(R_a, R_b)$.

2. *De plus :*

$$\boxed{\forall |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\ z^k \ = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\ z^i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\ z^j\right)}$$

Démonstration.
On note R le rayon de convergence de la série $\sum c_n z^n$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons : $|z| < \min(R_a, R_b)$.

- Comme $|z| > R_a$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Comme $|z| < R_b$, la série numérique $\sum b_n z^n$ est absolument convergente.

Ainsi, d'après le paragraphe sur les séries de Cauchy du cours sur les séries numériques, la série numérique, $\sum c_n z^n$ est absolument convergente. On a donc démontré :

> Pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, la série numérique $\sum c_n z^n$ est (abs) convergente

$$\boxed{\text{D'où : } R \geqslant R_a = \min(R_a, R_b).}$$

□

Remarque

- Dans le cas de la somme, si $R_a \neq R_b$, on peut conclure :
$$\mathrm{R_{cv}}\left(\sum (a_n + b_n) z^n\right) = \min(R_a, R_b)$$
- Dans le cas du produit de Cauchy, on peut trouver deux séries entières telles que $R_a \neq R_b$ et $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum c_n z^n\right) \neq \min(R_a, R_b)$.
Pour s'en convaincre, on pourra par exemple considérer les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ où :
  - × $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1$,
  - × $b_0 = 1,\ b_1 = -1$ et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ b_n = 0$.

  Dans ce cas, $R_a = 1$, $R_b = +\infty$ et $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum c_n z^n\right) = +\infty \neq \min(R_a, R_b)$.

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.

1. Rappeler l'ensemble de définition de f.

2. ***a)*** À l'aide d'un produit de Cauchy, déterminer la fonction $f \times f$.

b) Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

II.5. Problèmes au bord du disque pour la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ (BONUS)

On a vu que tous les comportements sont possibles au bord du disque de convergence. On s'intéresse ici au cas particulier de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n}$.
On souhaite démontrer le résultat suivant :

> La série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est convergente sur son disque de convergence si et seulement si $z \neq 1$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{U}$ ($= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$). On procède par disjonction de cas.

- Si $z = 1$, on étudie la série $\sum \dfrac{1}{n}$. On reconnaît une série de Riemann de raison 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente.
- Si $z \neq 1$, comme $z \in \mathbb{U}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tel que :

$$z = \mathrm{e}^{i\theta}$$

× Soit $N \in \mathbb{N}^*$. L'idée est ici d'effectuer une « intégration par partie discrète », autrement nommée règle d'Abel **[HP]** (c'est la somme partielle qui joue le rôle de primitive et la différence de deux termes consécutifs qui joue le rôle de la dérivation). Ce qui guide cette idée est la volonté de « dériver » $\dfrac{1}{n}$ (en une suite équivalente à $\dfrac{1}{n^2}$) pour se ramener, à une constante multiplicative près, à une série convergente.
Détaillons cette étape.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{in\theta} \, \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{ik\theta} \right) \frac{1}{n}$$

On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n} &= \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1}) \, \frac{1}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} S_n \, \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} S_{n-1} \, \frac{1}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} S_n \, \frac{1}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} S_n \, \frac{1}{n+1} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N-1} S_n \, \frac{1}{n} + S_N \, \frac{1}{N} \right) - \left(S_0 + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \, \frac{1}{n+1} \right) \\
&= S_0 + \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 1 + \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \, \frac{1}{n\,(n+1)}
\end{aligned}$$

× Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons alors S_n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}}$$

où la dernière égalité est vérifiée car : $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$.

On obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{-i\frac{(n+1)}{2}\theta} - e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\cancel{-2i}\ \sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)}{\cancel{-2i}\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$|S_n| = \left| e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| = \frac{\left|\sin\left(\frac{n+1}{2}\ \theta\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

Ainsi, la suite (S_n) est bornée.

× On obtient alors :

- d'une part : $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{S_N}{N} = 0$,
- d'autre part :
  - ▸ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \left| S_n \ \frac{1}{n(n+1)} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \ \frac{1}{n^2}$
  - ▸ la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, car c'est une série de Riemann d'exposant 2 $(2 > 1)$.

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \left| S_n \ \frac{1}{n(n+1)} \right|$ est convergente. Ainsi, la série $\sum\ S_n \ \frac{1}{n(n+1)}$ l'est aussi.

Or on a démontré, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n} = 1 + \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \ \frac{1}{n\,(n+1)}$$

On en déduit donc que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ est convergente.

□

III. Séries entières de la variable réelle

Dans toute cette partie, les séries entières sont considérées comme étant de la variable réelle.

III.1. Convergence normale sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence

Théorème 11.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note R le rayon de convergence de cette série entière.

$$\boxed{\text{La série entière } \sum a_n x^n \text{ converge normalement sur } \texttt{TOUT SEGMENT} \text{ de }]-R,R[}$$

Autrement dit, pour tout $(a,b) \in \,]-R,R[^2$ tel que $a < b$:

- × *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est bornée sur le segment $[a,b]$.*
- × *la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ est convergente.*

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \,]-R,R[^2$ tel que : $a < b$.

- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur le segment $[a,b]$.
  Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$. Ainsi, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que :
  $$|x_0| = \max_{x\in[a,b]} \big(\,|\,x\,|\,\big)$$
  Remarquons de plus : $|x_0| < R$ (car $[a,b] \subset \,]-R,R[$).
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [a,b]$. Alors :
  $$\begin{array}{rcll} |\,x\,| & \leqslant & \displaystyle\max_{x\in[a,b]} \big(\,|\,x\,|\,\big) & \\ \text{donc } |\,x\,|^n & \leqslant & \left(\displaystyle\max_{x\in[a,b]} \big(\,|\,x\,|\,\big)\right)^n & \textit{(par croissance de la fonction élévation à la puissance } n \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{donc } |\,a_n\,|\,|\,x\,|^n & \leqslant & |\,a_n\,|\,|\,x_0\,|^n & \textit{(car } |\,a_n\,| \geqslant 0\textit{)} \\ \text{donc } |\,a_n\,x^n\,| & \leqslant & |\,a_n\,|\,|\,x_0\,|^n & \\ \text{donc } |\,f_n(x)\,| & \leqslant & |\,a_n\,|\,|\,x_0\,|^n & \end{array}$$

Ainsi, la fonction f_n est bornée sur le segment $[a,b]$. De plus :

- × $0 \leqslant \|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |\,a_n\,|\,|\,x_0\,|^n$
- × La série $\sum a_n {x_0}^n$ est absolument convergente puisque $|x_0| < R$.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ est convergente. Autrement dit, la série entière $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ de $]-R,R[$. □

Remarque

- Profitons de ce résultat pour rappeler que la convergence normale sur tout segment d'un intervalle n'implique pas la convergence normale sur l'intervalle tout en entier.
- Il est assez simple de trouver des exemples illustrant le point précédent. Par exemple, la série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1. Le théorème précédent permet donc de conclure que cette série entière converge normalement sur tout segment $[a,b]$ de $]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto x^n$.
  - × Pour autant, **il n'y a pas convergence normale sur** $[-1,1]$ de la série entière $\sum x^n$. Ce point est facile à démontrer : la convergence normale sur un intervalle implique la convergence en tout point de l'intervalle. Ainsi, en cas de convergence normale sur $[-1,1]$, on pourrait conclure que la série $\sum 1^n$ (ou même la série $\sum (-1)^n$) est convergente.

× **Il n'y a pas convergence normale non plus sur $]-1,1[$.**

▸ Méthode 1
On démontre, par étude de fonction : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_{\infty,]-1,1[} = 1$.
Ainsi la série $\sum \|f_n\|_{\infty,]-1,1[}$ est grossièrement divergente.

▸ Méthode 2
On utilise le théorème de la double limite et on procède par l'absurde.
Supposons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $]-1,1[$.

(i) Existence d'une limite finie

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x \to 1} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^n = 1^n = 1$.

(ii) Convergence uniforme

Par hypohtèse, la série $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $]-1,1[$.

On en conclut, par théorème de la double limite, que la série $\sum 1$ est convergente, ce qui est absurde !

(profitons-en pour rappeler que le théorème de la double limite permet alors d'affirmer : $\lim\limits_{x \to 1} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\lim\limits_{x \to 1} f_n(x) \big))$

`À RETENIR`

- Toute série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ converge normalement sur `TOUT SEGMENT` de l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$.
- Cela ne permet `EN AUCUN CAS` de conclure que la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $]-R,R[$.

III.2. Régularité de la somme d'une série entière

III.2.a) Continuité de la somme d'une série entière

Théorème 12.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière.

Notons R son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\boxed{\text{La somme } f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ de la série entière } \sum a_n x^n \text{ est continue sur }]-R,R[}$$

Alors la fonction f est continue sur $]-R,R[$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $]-R,R[$.

(ii) Convergence uniforme sur tout segment de l'intervalle

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur `TOUT SEGMENT` $[a,b]$ de l'intervalle $]-R,R[$.

On en déduit, par théorème de régularité, que la série de fonctions $\sum f_n$ est continue sur `TOUT SEGMENT` $[a,b]$ de $]-R,R[$ et donc sur $]-R,R[$. □

III.2.b) Dérivée de la somme d'une série entière

Théorème 13.

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière.*

Notons R *son rayon de convergence.*

On suppose $R > 0$ *et on note* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

> ***1.*** *La somme* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *de la série entière* $\sum a_n x^n$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]-R, R[$.
>
> ***2.*** *Pour tout* $x \in\ ]-R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto a_n\, x^n$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^1$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$.
- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in\ ]-R, R[,\ f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n\, a_n\, x^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

(ii) Convergences successives

(0) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]-R, R[$ (en effet, pour tout $|x| < R$, c'est-à-dire pour tout $x \in\ ]-R, R[$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est absolument convergente par définition du rayon de convergence R).

(1) La série de fonctions $\sum f_n'$ est une série entière de rayon de convergence R. On en déduit que cette série de fonctions converge normalement (et donc uniformément) sur `TOUT SEGMENT` $[a, b]$ de $]-R, R[$.

On en déduit, par théorème de régularité, que la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur `TOUT SEGMENT` $[a, b]$ de $]-R, R[$ et donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$. De plus :

$$\forall x \in\ ]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

□

III.2.c) Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière

Théorème 14.

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière.*

Notons R *son rayon de convergence.*

On suppose $R > 0$ *et on note* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

> ***1.*** *La somme* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *de la série entière* $\sum a_n x^n$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$.
>
> ***2.*** *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$:
>
> $$\forall x \in\ ]-R, R[,\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, x^{n-k}$$

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto a_n\, x^n$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-R, R[$.

▶ De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \,]-R,R[,\ {f_n}^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in [\![0,k-1]\!] \\ \dfrac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, x^{n-k} & \text{si } n \geqslant k \end{cases}$$

(ii) $\boxed{\text{Convergence uniforme}}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(k) La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ est une série entière de rayon de convergence R (on ne modifie pas le rayon de convergence en multipliant le terme général par $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$).
On en déduit que cette série de fonctions converge normalement (et donc uniformément) sur `TOUT SEGMENT` $[a,b]$ de $]-R,R[$.

On en déduit, par théorème de régularité, que la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, sur `TOUT SEGMENT` $[a,b]$ de $]-R,R[$ et donc sur $]-R,R[$.
On en conclut que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \,]-R,R[,\ f^{(k)}(x) \ = \ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, x^{n-k}$$

□

Exercice 6 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|\,a_{n+1}\,|}{|\,a_n\,|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum\ a_n x^n$ et $\sum\ (n+1)\, a_{n+1}\ x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.

2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R\,[$.

Exemple

- On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
  Comme la série de fonctions $\sum\ x^n$ est de rayon de convergence $R=1$, alors la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus :
  × $\forall x \in \,]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$
  × $\forall x \in \,]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
  × $\forall x \in \,]-1,1[,\ f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, x^{n-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$
  × $\forall x \in \,]-1,1[,\ f^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} n\,(n-1)\,(n-2)\, x^{n-3} = \dfrac{6}{(1-x)^4}$
  × ...

III.3. Primitive de la somme d'une série entière

Théorème 15.

Soit $\sum\ a_n\, x^n$ *une série entière.*
Notons R *son rayon de convergence.*
On suppose $R > 0$ *et on note* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) *Pour* `TOUT SEGMENT` $[a,b] \subset \,]-R,R[$*, la fonction* f *est intégrable sur* $[a,b]$.

2) *Si* F *est une primitive de* f*, alors :*

$$\boxed{\forall x\ ]-R,R[,\ F(x) - F(0) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\ x^{n+1}}$$

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto a_n\, x^n$.

- Soit $x \in \,]-R, R[$. Remarquons :
  - × pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le SEGMENT $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x \leqslant 0$).
  - × la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le SEGMENT $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x \leqslant 0$).

  Ainsi, par théorème d'intégration terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x f_n(t)\, dt\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n\, t^n\, dt\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}\end{aligned}$$

- Par ailleurs, comme la série entière $\sum a_n\, x^n$ est de rayon de convergence R, la fonction somme f est continue sur $]-R, R[$.
  On note alors F une primitive de f sur $]-R, R[$.

On en conclut alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \int_0^x f(t)\, dt = [\ F(t)\ ]_0^x = F(x) - F(0)$$

□

Exemple
Ce théorème permet notamment de retrouver rapidement les développements en série entière de arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$.

- Développement de la fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$:
  - × Rappelons tout d'abord que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

  - × Or la série entière $\sum (-x^2)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in \,]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2n}$$

  - × D'après la propriété précédente, pour tout $x \in \,]-1, 1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt\right)$$

  Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \,]-1, 1[,\ \arctan(x) - \cancel{\arctan(0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

- Développement de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$:
  - × Rappelons tout d'abord que la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

  - × Or la série entière $\sum (-x)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in \,]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n$$

  - × D'après la propriété précédente, pour tout $x \in \,]-1, 1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^n\, dt\right)$$

  Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \,]-1, 1[,\ \ln(1+x) - \cancel{\ln(1+0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

III.4. Expression et unicité des coefficients d'une série entière

Théorème 16.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière.

Notons R son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}}$$

Démonstration.

- Comme la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.
- De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]-R,R[,\ f^{(m)}(x) &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{n!}{(n-m)!}\, a_n\, x^{n-m} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+m)!}{n!}\, a_{n+m}\, x^n \\
&= \frac{m!}{0!}\, a_m + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+m)!}{n!}\, a_{n+m}\, x^n \\
&= m!\, a_m + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+m)!}{n!}\, a_{n+m}\, x^{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f^{(m)}(0) = m!\, a_m + \cancel{0 \times (\dots)}$$

□

Théorème 17 (Unicité des coefficients)**.**

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières.

On note R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

On suppose $R_a > 0$ et $R_b > 0$.

On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in\,]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$$

Alors : $\forall m \in \mathbb{N},\ a_m = b_m$.

Démonstration.

- Les fonctions $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ au moins sur $]-\min(R_a,R_b), \min(R_a,R_b)[$ comme sommes de séries entières de rayons de convergence strictement positifs.
- On peut donc écrire, pour tout $x \in\,]-r,r[\ \cap\ ]-\min(R_a,R_b), \min(R_a,R_b)[$:

$$f(x) = g(x)$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{f^{(m)}(0)}{m!} & = & \dfrac{g^{(m)}(0)}{m!} \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
a_m & = & b_m
\end{array}$$

□

IV. Développement en série entière

IV.1. Cas des fonctions d'une variable réelle

IV.1.a) Définitions et propriétés

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'intérieur contient 0.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur I.

Soit $r > 0$.

On dit que f est **développable en série entière** sur l'intervalle $]-r, r[$ s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \,]-r, r[, \; f(x) \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^n$$

Exercice 7
Déterminer la forme du développement en série entière d'une fonction paire (resp. impaire) développable en série entière.
On pourra utiliser l'unicité des coefficients d'une série entière

Définition

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de I (intervalle contenant 0) dans $\mathbb{R}$.

On appelle **série de Taylor** de f en 0 la **série entière** $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n$.

IV.1.b) Caractérisation des fonctions développables en séries entières

Théorème 18 (Lien entre série entière et série de Taylor)**.**

1) *Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.*
Alors :

- *(i)* *la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$,*
- *(ii)* *la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence supérieur à r,*
- *(iii)* *la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor. Autrement dit :*

$$\forall x \in \,]-r, r[, \quad f(x) \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n$$

2) *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.*
Alors la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ si et seulement si elle est sa somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

$$f \text{ développable en série entière} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]-r, r[, \; \lim_{N \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} \, f^{(N+1)}(t) \, dt = 0$$

Le théorème précédent indique :

$$f \text{ développable en série entière} \quad \Rightarrow \quad f \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-r, r|$$

Cependant, la réciproque est fausse en toute généralité.

$$f \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-r, r| \quad \cancel{\Rightarrow} \quad f \text{ développable en série entière}$$

On peut par exemple démontrer que la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

IV.1.c) Formulaire de développements en série entière

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Développement en série entière	Rayon de convergence
$\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{sh}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{ch}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$	$R = 1$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\arcsin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)} x^{2n+1}$	$R = 1$

IV.2. Quelques développements en série entière d'une variable complexe

Développement en série entière	Rayon de convergence
$\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$

Théorème 19 (Continuité de la somme, cas complexe)**.**
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe.

Alors la fonction $z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

IV.3. Détermination pratique de développements en série entière

MÉTHODO **Déterminer un développement en série entière**

Pour déterminer le développement en série entière d'une foonction f, on pourra utiliser une ou plusieurs des méthodes suivantes :

1) utiliser la série de Taylor de f.

2) effectuer une combinaison linéaire de sommes de séries entières.

3) effectuer un produit de Cauchy de séries entières.

4) dériver ou primitiver la fonction somme d'une série entière (*cf* exemples de la Partie **III.2.**).

5) utiliser une équation différentielle (*cf* section suivante).

Exercice 8 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?

Exercice 9
Appliquer ce théorème pour la fonction exp.

Corollaire 1.

Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.

Alors le développement en série entière de f en 0 est unique.