CH VII (2/2) : Modes de convergence d'une série de fonctions

I. Notion de série de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On appelle **série de terme général** f_n et on note $\sum f_n$ la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

- La suite de fonctions (S_n) est appelée **suite des sommes partielles** associée à la série de fonctions $\sum f_n$. Le terme général S_n de la suite de fonctions (S_n) est appelé **somme partielle d'ordre** n associée à la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque

Une série de fonctions est une suite de fonctions particulière (une suite de sommes partielles de fonctions). Comme on va le voir, les notions de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$ (convergence simple et convergence uniforme) se définissent tout naturellement comme la convergence de la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, suite des sommes partielles associée à la série de fonctions $\sum f_n$.

Exemple

Définir une série de fonctions, c'est définir son terme général. Notons (f_n) la suite de fonctions définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto n\, x^2\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
La série de fonctions $\sum f_n$ est définie par la suite de fonctions (S_n), elle-même définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} k\, x^2\ \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}$$

II. Convergence simple d'une série de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I si la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
- La fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est alors appelée somme de la série de fonctions $\sum f_n$. On la note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

La série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I

$\Leftrightarrow$ La suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction S

$\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x_0)$

$\Leftrightarrow$ Pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente (de somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x_0)$)

> Dans la première partie sur les suites de fonctions, on précisait systématiquement que la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) se faisait sur un intervalle I vers une fonction f. Dans le cas d'une série de fonctions $\sum f_n$, si la convergence a lieu, la limite simple est la fonction : $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions définies par :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n\,x^2}{1+n^3\,x} \end{array} \qquad g_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2\,x^n\,(1-x) \end{array}$$

$$h_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^{-(n+1)\,x} \end{array} \qquad u_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{i\,nx}}{3^n} \end{array}$$

$$v_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+n\,x}} \end{array} \qquad w_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\big(1+\mathrm{e}^{-n\,x}\big) \end{array}$$

1) Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $x_0 \neq 0$ alors :
  - × $\left| \dfrac{n\,x_0^2}{1+n^3\,x_0} \right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left| \dfrac{n\,x_0^2}{n^3\,x_0} \right| = \left| \dfrac{x_0}{n^2} \right| = \dfrac{|\,x_0\,|}{n^2}$
  - × Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

  On en déduit que la série $\sum f_n(x_0)$ est (absolument) convergente.
- Si $x_0 = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$f_n(0) = \frac{0}{1+0} = 0$$

  La série $\sum 0$ est convergente.

Finalement, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque

- Il est important de bien comprendre les objets et en particulier de différencier les séries $\sum f_n$ et $\sum f_n(x_0)$ qui représentent des objets différents.

$\sum f_n$	$\sum f_n(x_0)$
C'est une **série de fonctions**. Autrement dit, c'est la **suite de fonctions** (S_n) de terme général $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$	C'est une **série numérique**. Autrement dit, c'est la **suite numérique** $\big(S_n(x_0)\big)$ de terme général $S_n(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_0)$

  La notation x_0 a un intérêt pédagogique (utilisée dans le corrigé mais pas dans l'énoncé qui préfère la notation x). Elle a pour but d'insister sur le fait que cet élément est fixé ce qui permet de mettre en avant que $\sum f_n(x_0)$ est une série numérique et pas une série de fonctions.
- Étudier la convergence simple d'une série de fonctions sur un intervalle I, c'est étudier la nature de la série numérique $\sum f_n(x_0)$ pour x_0 élément fixé dans I. Il est donc logique qu'une telle étude donne lieu à l'utilisation des méthodes listées dans le chapitre sur les séries numériques (notamment les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs).

□

2) Démontrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0,1]$.

- Si $x_0 \neq 1$ alors :
  - × $\left| n^2 x_0{}^n \ (1-x_0) \right| \ = \ (1-x_0)\ n^2\, x_0{}^n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-x_0)\ n(n-1)\, x_0{}^n$
  - × La série $\sum n(n-1)\, x_0{}^n$ est convergente en tant que série géométrique dérivée de raison $x_0 \in [0,1[$.

  On en déduit que la série $\sum f_n(x_0)$ est (absolument) convergente.
- Si $x_0 = 1$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(1) = n^2 \times 1^n \ (1-1) = 0$$

  La série $\sum 0$ est convergente.

Finalement, pour tout $x_0 \in [0,1]$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } [0,1].}$$ □

3) Démontrer que la série de fonctions $\sum h_n$ converge simplement sur $[0,+\infty$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0,+\infty[$.

- Si $x_0 \neq 0$ alors :
  - × $\left| x_0 \ \mathrm{e}^{-(n+1)\, x_0} \right| \ = \ x_0\ \mathrm{e}^{-x_0}\ \mathrm{e}^{-x_0\, n} \ = \ x_0\ \mathrm{e}^{-x_0}\ \left(\mathrm{e}^{-x_0}\right)^n$
  - × Or, la série $\sum \left(\mathrm{e}^{-x_0}\right)^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x_0} \in \,]0,1[$.

  On en déduit que la série $\sum f_n(x_0)$ est (absolument) convergente.
- Si $x_0 = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(0) = 0 \times \mathrm{e}^{-(n+1)\, 0} = 0$$

  La série $\sum 0$ est convergente.

Finalement, pour tout $x_0 \in [0,+\infty[$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } [0,+\infty[.}$$ □

4) Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0,+\infty[$.

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{i\, n\, x_0}}{3^n} \right| \ = \ \frac{\left|\mathrm{e}^{i\, n\, x_0}\right|}{3^n} \ = \ \frac{1}{3^n}$$

Or, la série $\sum \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in \,]0,1[$.

Finalement, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$ □

5) Démontrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $[0,+\infty$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0,+\infty[$. Remarquons :

- × la série $\sum (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{1+n\, x_0}}$ est alternée car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+n\, x_0}} > 0$.
- × la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+n\, x_0}}\right)$ est décroissante.
- × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+n\, x_0}} = 0$.

Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+n\, x_0}}$ est convergente.

$$\boxed{\text{Autrement dit, la série } \sum v_n \text{ converge simplement sur } [0,+\infty[}$$ □

6) Démontrer que la série $\sum w_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \,]0, +\infty[$. Remarquons :

× $\left| \ln(1 + \mathrm{e}^{-x_0 n}) \right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left| \mathrm{e}^{-x_0 n} \right| = (\mathrm{e}^{-x_0})^n$

× La série $\sum (\mathrm{e}^{-x_0})^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x_0} \in [0, 1[$.

Finalement, pour tout $x_0 \in \,]0, +\infty[$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[.}$$

□

III. Convergence uniforme d'une série de fonctions

III.1. Définition

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- En appliquant la définition de convergence uniforme à la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)$:

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

$\Leftrightarrow$ La suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

$\Leftrightarrow$
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I
- Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction $S_n - S$ est bornée
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| S - S_n \right\|_{\infty,I} = 0$

$\Leftrightarrow$
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I
- Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction R_n est bornée
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| R_n \right\|_{\infty,I} = 0$

(où l'on a noté, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$)

$\Leftrightarrow$ La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CU sur I vers la fonction nulle

Exercice 1 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A	$\Rightarrow$	La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $x \mapsto 0$ sur A

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = n\, x^2\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? Justifier.

Remarque

Dans le chapitre sur les séries numériques, on établit :

× une condition nécessaire de convergence.

× une caractérisation de la convergence dans le cas d'une série télescopique.

On peut aussi établir ce genre de résultats dans le cas d'une série de fonctions.

- **Une condition nécessaire de convergence uniforme**

Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n = R_{n-1} - R_n$.
Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle $h : x \mapsto 0$. Il en est de même de la suite $(R_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$. On en déduire alors, par stabilité par combinaison linéaire de la convergence uniforme des suites de fonctions, que la suite (f_n) converge vers la fonction $h - h = 0_{\mathcal{F}(I,\mathbb{K})}$. On retiendra :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I	$\Rightarrow$	La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle

- **Cas des séries de fonctions télescopiques**

Considérons une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$. Alors :

La série de fonctions $\sum \left(g_{n+1} - g_n\right)$ converge uniformément sur I

$\Leftrightarrow$ La suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \left(g_{k+1} - g_k\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(g_{k+1} - g_k\right)(x)$

$\Leftrightarrow$ La suite de fonctions $\left(g_{n+1} - g_0\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(g_{k+1} - g_k\right)(x)$

$\Leftrightarrow$ La suite de fonctions $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $S + g_0 : x \mapsto g_1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(g_{k+1} - g_k\right)(x)$

On retiendra :

La série de fonctions $\sum \left(g_{n+1} - g_n\right)$ converge uniformément sur I	$\Leftrightarrow$	La suite de fonctions $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $S + g_0$

III.2. La convergence uniforme implique la convergence simple

Théorème 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I	$\Rightarrow$	*La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I*

La réciproque est fausse en général.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I	$\not\Rightarrow$	La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

III.3. Critère spécial des séries alternées : cas des séries de fonctions

Théorème 2.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.

1. *Énoncé du critère spécial des séries alternées Supposons :*

- *Pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est une série alternée (s'écrit sous la forme $\sum (-1)^n a_n(x_0)$ où $(a_n(x_0))$ est une suite numérique de signe constant)*
- *Pour tout $x_0 \in I$, $\left(|f_n(x_0)|\right)$ est décroissante,*
- $\forall x_0 \in I,\ |f_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

2. *De plus, si la série de fonctions $\sum f_n$ est une série vérifiant les critères ci-dessus, alors :*

a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$:*

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \text{ est du signe de } f_{n+1}(x)$$

($R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série numérique $\sum f_n(x)$)

b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$:*

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)|$$

Remarque

- Les fonctions considérées dans ce théorème sont à valeurs réelles. Cette hypothèse est nécessaire afin de pouvoir parler de série alternée : on ne peut parler de signe d'un nombre complexe !
- Le point ***2.b)*** stipule : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)|$.

  Si on démontre que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle alors, par caractérisation séquentielle, il existe une suite numérique $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

  × la suite numérique $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.

  × il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_{n+1}(x)| \leqslant \delta_n$.

  On en déduit alors que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in I,\ |R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \delta_n$$

  ce qui démontre : $\left\| R_n \right\|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$.

  On en déduit, par théorème d'encadrement : $\left\| R_n \right\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  On en conclut que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

- On déduit du point précédent :

> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.
>
> On suppose que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est une série qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées.
>
> | La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I | $\Leftrightarrow$ | La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle |
> |---|---|---|

(rappelons que, de manière générale, la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur I vers la fonction nulle n'est pas une propriété suffisante pour démontrer la convergence uniforme sur I de la série de fonctions $\sum f_n$)

- Il est à noter que les propriétés ***2.a)*** et ***2.b)*** sont vérifiées pour $n = 0$. Ainsi, pour tout $x \in I$:

Le réel $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_1(x)$ et $\left|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_1(x)|$

On peut aussi démontrer :

Le réel $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_0(x)$ et $\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_0(x)|$

- Cette dernière remarque peut être intéressante pour l'étude d'une série de fonction de la forme $\sum f_k{}'$. Pour peu que cette série vérifie les conditions d'application du critère spécial des séries alternées, on peut alors conclure que, pour tout $x \in I$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k{}'(x)$ est du signe de $f_0{}'(x)$.
Connaissant le signe de la dérivée de la fonction S, on peut alors déterminer la monotonie de S !

IV. Convergence normale d'une série de fonctions

IV.1. Définition

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur I.

- On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement sur** I si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente.

Exercice

1. Supposons qu'il existe une suite (a_n) telle que $\sum a_n$ est convergente et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant a_n$$

Démontrer qu'alors $\sum f_n$ converge normalement sur I.

2. Démontrer que la série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

IV.2. La convergence normale implique la convergence uniforme

Théorème 3.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I	$\Rightarrow$	*La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I*

> La réciproque est fausse !
> Autrement dit, il existe des séries de fonctions $\sum f_n$ telles que :
> × la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I,
> × la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I.

Exemple

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$:

× converge uniformément sur $[1,2]$,
(on l'a déjà démontré dans un exercice précédent)

× ne converge pas normalement sur $[1,2]$.

V. Un mode de convergence plus faible qui s'avère utile

Théorème 4.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que $\sum f_n$ converge normalement sur I.

Alors, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Remarque

- Évidemment, si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I, alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge aussi uniformément sur tout segment de I.
- La convergence normale sur tout segment de I est un cadre idéal (qui implique la convergence uniforme sur tout segment de I).

La réciproque est fausse !
Par exemple, la série $\sum x^n$:

× converge normalement sur tout segment de $[0,1[$,

× ne converge pas normalement sur $[0,1[$.

VI. Théorème d'interversion de symboles

VI.1. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to x_0}$ (la continuité est transmise par convergence uniforme)

Théorème 5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons :

(i) *Caractère $\mathscr{C}^0$*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I

(ii) *Convergence uniforme*

La série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur (tout segment de) I.

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Remarque

Ce théorème doit être compris comme une machine à intervertir les symboles $\lim\limits_{x\to x_0}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$. En effet, pour tout $x_0\in I$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) &= \lim_{x\to x_0} S(x) \\
&= S(x_0) && \textit{(car S est continue en $x_0\in I$)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) && \textit{(car f_n est continue en $x_0\in I$)}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\forall x_0\in I,\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)\right)}$

Exercice

1. Démontrer que $\exp : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

VI.2. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\lim\limits_{x \to \alpha}$ (théorème de la double limite)

Théorème 6.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

On note $I = |\, \alpha, \beta\, |$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposons :

(i) *Existence d'une limite finie*

Il existe une suite $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to \alpha} f_n(x) = \ell_n$.

(pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to \alpha} f_n(x)$ est une quantité finie notée ℓ_n)

(ii) *Convergence uniforme*

La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente et :

$$\boxed{\lim_{x \to \alpha} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to \alpha} f_n(x) \right)}$$

Remarque

- Dans cet énoncé, on `NE` peut `PAS` remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I par une hypothèse de convergence uniforme sur tout segment de I. C'est assez logique puisque l'on s'intéresse au comportement de la fonction S à l'un des bords de l'intervalle I. Il faut donc travailler à proximité de ce bord.
- Plus précisément, si $I =]0, +\infty[$ (par exemple) alors $\beta = +\infty$. Si on cherche la limite de la fonction S en β, il faut alors démontrer que la convergence uniforme a lieu sur un intervalle qui « contient $+\infty$ ». Cela peut être I tout en entier ou $[1, +\infty[$ (ou même $[10, +\infty[$ ou encore $[10^{10}, +\infty[$ ...).

Exercice

Démontrer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$.

VI.3. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_a^b$

Théorème 7.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que :

× *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,*

× *la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.*

Alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt \right)\ dt}$$

Exercice

1. Démontrer : $\forall x \in\ ]-1, 1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

2. Démontrer, sur un ensemble à préciser :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

VI.4. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et dérivée

Théorème 8.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons :

(i) $\boxed{\textit{Caractère } \mathscr{C}^1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I

(ii) $\boxed{\textit{Convergences successives}}$

(0) *La série $\sum f_n$ converge simplement sur I*

(1) *La série $\sum f_n'$ converge uniformément sur (tout segment de) I.*

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}'}$$

Exercice

1. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in\,]1, +\infty[, \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $g : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(tz)^k}{k!}$.

Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$g^{(k)} : t \mapsto z^k\, \mathrm{e}^{tz}$$

VI.5. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et dérivée $k^{\text{ème}}$

Théorème 9.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons :

(i) $\boxed{\textit{Caractère } \mathscr{C}^k}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I

(ii) $\boxed{\textit{Convergences successives}}$

(0) *La série $\sum {f_n}^{(0)}$ converge simplement sur I*

(. . .) *. . .*

(k-1) *La série $\sum f_n^{(k-1)}$ converge simplement sur I*

(k) *La série $\sum f_n^{(k)}$* **converge uniformément** *sur (tout segment de) I.*

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!], \ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}^{(j)}}$$

VII. Les bons réflexes pour une étude de série de fonctions

MÉTHODO **Plan d'étude d'une série de fonctions**

Pour étudier une série de fonctions $\sum f_n$ sur I, on procèdera (sauf mention contraire de l'énoncé) dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple

Pour démontrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer un élement x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».

(ii) on démontre ensuite la convergence de la série numérique $\sum f_n(x_0)$ selon les valeurs de x_0.

La convergence simple est généralement utilisée pour trouver le domaine de définition de la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$. Plus précisément, on cherche pour quelles valeurs de x_0 la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est bien définie.

2) Convergence normale

Pour démontrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche on cherche δ_n tel que :

- × $|f_n(x)| \leqslant u_n$,
- × u_n **ne fait pas apparaître** x,
- × $\sum u_n$ est convergente.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\|f_n\|_{\infty,I} \leqslant u_n$.

Le dernier point permet alors de conclure que la série $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente (par théorème de comparaison des séries à termes positifs).

La quantité u_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de l'ensemble $\Big\{|f_n(x)| \mid x \in I\Big\}$.
Si les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas, on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x \in I} \Big(|f_n(x)|\Big)$ (en étudiant les variations de la fonction f_n).

Il est à noter que la convergence normale est une propriété plus forte que la convergence simple et la convergence uniforme (en d'autres termes, la convergence normale implique la convergence simple et la convergence uniforme). En pratique, c'est généralement le mode de convergence dont on se sert dans les exercices.

3) Convergence uniforme (en cas d'échec de la convergence normale).

Pour démontrer la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

- × $\big|R_n(x)\big| = \big|S(x) - S_n(x)\big| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \delta_n$
- × δ_n **ne fait pas apparaître** x,
- × $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = 0$.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\| R_n \|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$.

Le dernier point permet alors de conclure que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, ce qui démontre que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Remarque

En l'absence de convergence normale sur I (par exemple si les fonctions f_n ne sont pas bornées), il est fréquent d'établir la convergence normale sur certaines parties de I, ce qui suffit pour les théorèmes d'interversion. La forme de ces parties dépend de l'exercice considéré (cela peut être des intervalles du type $[a, 1]$, $[0, a]$ ou encore $[a, +\infty[\ \ldots$).

MÉTHODO **Démontrer la non convergence uniforme / normale**

- De manière générale, on peut démontrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée. La manière la plus rigoureuse pour le démontrer est de procéder par l'absurde. La rédaction est la suivante :

  > `On procède par l'absurde.`
  > `On suppose que la série` $\sum f_n$ `converge normalement sur` I
  > `On peut donc en conclure [ résultat d'interversion ].`
  > `Or : [ démonstration que l'interversion n'a pas lieu ].`
  > `Absurde !`

- De manière générale, on aura encore à effectuer des majorations / minorations. Pour cela, on se reporte à la méthodologie détaillée dans le programme sur les suites de fonctions.

VIII. Schéma récapitulatif