CH VII (1/2) : Modes de convergence d'une suite de fonctions

Notion de limites

- En première année, on a vu la notion de convergence d'une suite.
  Plus précisément, on dit qu'une suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |\, u_n - \ell\,| < \varepsilon)}$$

  ou encore *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |\, u_n - \ell\,| < \varepsilon}$$

- On a aussi défini la notion de limite d'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ ($f \in \mathbb{K}^I$) en un point $x_0 \in \overline{I}$. Plus précisément, f admet la limite $\ell \in \mathbb{K}$ en x_0 si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

- Dans ces définitions, on constate que ce qui importe c'est de définir la notion de proximité, de distance entre des quantités, d'objets qui se rapprochent.
- On se pose maintenant dans ce chapitre la question de la définition de convergence d'une suite de fonctions (f_n). Que peut vouloir dire qu'une suite de fonctions se rapproche d'une fonction f ? On verra qu'il existe plusieurs modes de convergence. En fonction des modes de convergence, on pourra déduire des propriétés des fonctions de la suite (f_n), des propriétés de la fonction limite f.

Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre, on considère les notations suivantes :

× I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

× $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

× $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Il est primordial pour comprendre les définitions de ce chapitre de bien faire la différence entre la notation f qui désigne une fonction et la notation $f(x)$ qui désigne une quantité (un réel ou un complexe suivant l'exercice).

Cette différence permet de comprendre la différence entre les objets suivants :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui désigne une suite de fonctions.
- $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui désigne une suite numérique, c'est-à-dire une suite dont tous les coefficients sont des quantités (réelles ou complexes).

I. La convergence simple

I.1. Définition

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I vers la fonction f si pour tout $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

$$\boxed{(f_n) \text{ CS sur } I \text{ vers } f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)}$$

  Cette propriété s'écrit à l'aide des quantificateurs :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)}$$

  ou encore, *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon}$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite simple** de la suite (f_n).

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions définies par :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{n} \sin(x) \end{array} \qquad g_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx}{1+nx} \end{array} \qquad h_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2\, x^n\,(1-x) \end{array}$$

1) Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0, 1]$. Remarquons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \left| \frac{\sin(x_0)}{n} \right| = \frac{|\sin(x_0)|}{|n|} = \frac{|\sin(x_0)|}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Or :

× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

× $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit, par théorème d'encadrement : $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } f : x \mapsto 0.}$$ □

2) Démontrer que la suite (g_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction g à déterminer.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0, +\infty[$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$: $g_n(0) = \dfrac{n \times 0}{1 + n \times 0} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

- Si $x_0 > 0$: $g_n(x_0) = \dfrac{n\, x_0}{1 + n\, x_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\, x_0}{n\, x_0} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

On note alors :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La suite } (g_n) \text{ converge simplement sur } [0,+\infty[\text{ vers la fonction } g.}$$ □

3) a) Démontrer que la suite (h_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction h à déterminer.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0, 1]$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 \in [0, 1[$: $h_n(x_0) = n^2\, {x_0}^n\, (1 - x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  En effet :
  × $1 - x_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - x_0$,
  × $n^2\, {x_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées car $x_0 \in]0, 1[$.
- Si $x_0 = 1$: $h_n(1) = n^2\, 1^n\, (1 - 1) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (h_n) \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } h : x \mapsto 0.}$$ □

b) La suite (h_n) converge-t-elle simplement sur $[0, +\infty[$?

Démonstration.
Soit $x_0 > 1$. Alors $h_n(x_0) = n^2\, {x_0}^n\, (1 - x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

$$\boxed{\text{La suite } (h_n) \text{ ne converge pas simplement sur } [0,+\infty[.}$$ □

MÉTHODO **Démontrer la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) sur un intervalle I vers une fonction f**

Pour démontrer la convergence simple sur I de (f_n) vers f :

(i) on commence toujours par fixer un élément x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».

(ii) on étudie ensuite la suite numérique $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de x_0, ce qui fournit la fonction limite simple f.

Cette étape amène généralement à une disjonction de cas, notamment si les fonctions de la suite (f_n) sont définies par cas.

Remarque

- Une suite (f_n) converge simplement sur un intervalle I vers une fonction f si pour tout $x_0 \in I$, la suite **numérique** $\big(f_n(x_0)\big)$ est convergente de limite $f(x_0)$. La convergence simple d'une suite de fonctions se ramène donc à l'étude de la nature de suites numériques.
- Il est (relativement) fréquent d'avoir à utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall r \in \,]0,1[,\ n^a\ r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

  Ce résultat n'est qu'une instance particulière du théorème des croissances comparées. Si $a > 0$ et $r \in \,]0,1[$, alors $\frac{1}{r} > 1$ et, de manière classique :

$$n^a\ r^n \ = \ \frac{n^a}{\left(\frac{1}{r}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Comme on le voit dans les exemples, lorsque l'on étudie la convergence simple, il est classique d'effectuer une disjonction de cas en fonction des valeurs de $x_0 \in I$. Évidemment, la disjonction est dictée par les résultats de convergence à étudier et le découpage dépend de la suite de fonctions étudiée.
- Les exemples précédents permettent de constater que certaines propriétés passent mal à la limite :

Si toutes les fonctions de la (f_n) sont continues en un point, la limite f ne l'est pas forcément.

- En revanche, il est simple de démontrer que si deux suites (f_n) et (g_n) convergent simplement sur I respectivement vers f et g, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la suite $(\alpha\, f_n + \beta\, g_n)$ (resp. $(f_n \times g_n)$) converge simplement sur I vers la fonction $\alpha\, f + \beta\, g$. Ce résultat provient du fait que la combinaison linéaire (resp. le produit) de deux suites **numériques** convergentes est convergente, de limite la combinaison linéaire (resp. le produit) des limites.

Exercice

On considère la suite (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto x + \dfrac{1}{n}$.

1) Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.

2) Démontrer que la suite $\big({f_n}^2\big)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g à déterminer.

I.2. Propriétés transmises par convergence simple

Théorème 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ *une fonction.*

On suppose que la suite (f_n) *converge simplement sur* I *vers* f.

1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est à valeurs positives sur* I $\Rightarrow$ *La fonction* f *est à valeurs positives sur* I

2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est croissante sur* I $\Rightarrow$ *La fonction* f *est croissante sur* I

Remarque

On peut relâcher un peu les hypothèses de ce théorème. Plus précisément, il suffit que les propriétés soient vérifiées à partir d'un certain rang (« il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est ... »).

Démonstration.

1) Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est à valeurs positives.
Soit $x \in I$.

$$\forall n \geqslant n_0,\ f_n(x) \ \geqslant\ 0$$

$$\text{donc} \quad \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{f(x)} \ \geqslant\ 0 \qquad \textit{(car la suite } (f_n) \textit{ converge simplement sur } I \textit{ vers } f\textit{)}$$

On obtient bien : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0$.

2) Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction f_n croissante sur I $(\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f_n(x) \leqslant f_n(y))$.
Soit $(x,y) \in I^2$ tel que : $x \leqslant y$. Alors :

$$\forall n \geqslant n_0,\ f_n(x) \ \leqslant\ f_n(y)$$

$$\text{donc} \quad \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{f(x)} \ \leqslant\ \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(y)}_{f(y)} \qquad \textit{(car la suite } (f_n) \textit{ converge simplement sur } I \textit{ vers } f\textit{)}$$

On obtient bien, pour tout $(x,y) \in I^2$: $(x \leqslant y) \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)$.
Ainsi f est croissante sur I. $\square$

Remarque

On pourra retenir que les propriétés *ponctuelles* se transmettent par convergence simple : signe, croissance, décroissance, périodicité, parité ...

I.3. Propriétés non transmises par la convergence simple

Théorème 2.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ *une fonction.*

1) *Les propriétés de régularité ne sont pas transmises par convergence simple.*

• (f_n) *converge simplement sur* I *vers* f • *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$, f_n *continue en* $x_0 \in I$	$\not\Rightarrow$	f *continue en* $x_0 \in I$

2) *Les propriétés d'interversion ne sont pas forcément vérifiées en cas de convergence simple.*

(f_n) *CS sur* I *vers* f	$\not\Rightarrow$	$\forall x\in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$

(f_n) *CS sur* I *vers* f	$\not\Rightarrow$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\,dt$

Remarque

- Il faut faire attention à bien lire ce théorème. Il stipule que la convergence simple n'est pas suffisante pour la transmission de certaines propriétés. En particulier, si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge simplement sur I vers une fonction f, on ne peut conclure quant à la continuité de f (elle peut l'être ou ne pas l'être).
- La convergence simple est une convergence point à point (on étudie la limite de $f_n(x_0)$ à x_0 fixé). Il est naturel que ce type de convergence ne permette pas de transmettre des propriétés comme la continuité. En effet, lorsque l'on doit démontrer la continuité d'une fonction en x_0, on s'intéresse à son comportement à proximité de x_0. Plus précisément, il s'agit de faire l'étude dans un voisinage de x_0 c'est-à-dire dans un intervalle de la forme $[x_0 - \delta, x_0+\delta]$ avec $\delta > 0$. Pour ce type de propriété, il est nécessaire de disposer d'une convergence plus globale (sur un intervalle entier) que ponctuelle.

Démonstration.
Il s'agit de trouver des contre-exemples aux propriétés citées.
C'est l'objet des exercices qui suivent. □

Illustration des propriétés non transmises

(1)

• (f_n) converge simplement sur I vers f • Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n continue en $x_0\in I$	$\not\Rightarrow$	f continue en $x_0 \in I$

Exercice

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. Quelle propriété des fonctions de la suite (f_n) n'est pas transmise à la fonction f ?

(2) $\boxed{(f_n) \text{ CS sur } I \text{ vers } f \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad \forall x \in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)}$

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

1. Démontrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Démontrer que la suite (f_n') ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ vers f'.

Remarque

La suite (f_n') n'admet même pas de limite simple sur $\mathbb{R}$.

(3) $\boxed{(f_n) \text{ CS sur } I \text{ vers } f \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\ dt}$

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n : x \mapsto n^2\, x\, (1-x^2)^n$.

1. Démontrer la convergence simple sur $[0,1]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Déterminer le comportement asymptotique de la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

II. La convergence uniforme

II.1. Définition

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite (f_n) **converge uniformément sur** I vers f si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\Big)}$$

ou encore *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon}$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite uniforme** de la suite (f_n).

Remarque

À première vue, la définition de la convergence uniforme ressemble à s'y méprendre à celle de la convergence simple. La seule différence est la position du quantificateur $\forall x \in I$. C'est en réalité une différence majeure :

× la notion de convergence simple d'une suite de fonctions est une notion très **ponctuelle**. Pour chaque point $x_0 \in I$ et toute précision $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver un rang n_0 à partir duquel on peut majorer la distance $\left|f_n(x_0) - f(x_0)\right|$ par ε.
L'idée est d'évaluer, en chaque point x_0, la distance de $f_n(x_0)$ à $f(x_0)$ et de constater, que pour n suffisamment grand (ce n dépend alors du point x_0 choisi et de la précision considérée), cette distance devient aussi petite que souhaitée.

× la notion de convergence uniforme se détache de la dépendance ponctuelle. Pour toute précision $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel on peut majorer la distance $\left|\, f_n(x) - f(x) \,\right|$ par ε `POUR TOUT` $x \in I$.
L'idée n'est plus d'évaluer une distance ponctuelle mais une distance globale c'est-à-dire la distance de la courbe représentative de f_n à la courbe représentative de f. On doit alors constater que, pour n suffisamment grand (ce n ne dépend que de la précision choisie), cette distance globale devient aussi petite que souhaitée.

II.2. La convergence uniforme implique la convergence simple

Théorème 3.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\boxed{(f_n)\ \textit{CU vers}\ f \quad \Rightarrow \quad (f_n)\ \textit{CS vers}\ f}$$

(la limite uniforme d'une suite de fonctions, si elle existe, coïncide avec la limite simple)

Démonstration.
Supposons que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.
Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

Soit $x_0 \in I$. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \geqslant n_0$. Comme : $\forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$, alors on a notamment, pour $x = x_0 \in I$:

$$\left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui achève cette démonstration. □

La réciproque est fausse en général.

$$\text{La suite } (f_n) \text{ CS vers } f \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \text{La suite } (f_n) \text{ CU vers } f$$

II.3. Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide de la norme infinie

II.3.a) Rapide rappel sur la notion de norme infinie d'une fonction

Définition

Soit f une fonction bornée sur I.

On appelle **norme infinie** de f sur I, et on note $\|f\|_{\infty,I}$ le réel :

$$\|f\|_{\infty,I} \ = \ \sup_{x\in I} \Big(\big|f(x)\big|\Big)$$

Remarque

- Rappelons que toute partie E de $\mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) qui est à la fois **non vide** et **majorée** possède une borne supérieure. Par définition, la borne supérieure d'un tel ensemble E est le plus petit de ses majorants. On note alors indistinctement $\sup(E)$ ou $\sup\limits_{x\in E}\ x$ la borne supérieure de E.
- Par définition, si un ensemble E admet une borne supérieure, alors celle-ci :
  × est un majorant de E. Ainsi : $\forall x \in E,\ x \ \leqslant \ \sup(E)$.
  × est le plus petit des majorants de E.
  Ainsi : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ x > \sup(E) - \varepsilon$.
- En particulier, si on considère $E_{f,I} = \big\{|f(x)| \mid x \in I\big\}$ où f est un fonction bornée, alors :

$$\forall x \in I,\ |f(x)| \ \leqslant \ \sup\Big(\big\{|f(x)| \mid x \in I\big\}\Big) \ = \ \|f\|_{\infty,I}$$

  Par ailleurs, s'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant \delta$ $(*)$ alors :

$$\|f\|_{\infty,I} \ \leqslant \ \delta$$

  En effet, la propriété $(*)$ signifie que δ est un majorant de $E_{f,I}$. Il est donc logique que ce majorant soit plus grand que $\|f\|_{\infty,I}$ qui n'est autre que le plus petit des majorants de $E_{f,I}$.

- On retiendra : $\boxed{\Big(\forall x \in I,\ \big|f(x)\big| \ \leqslant \ \delta\Big) \ \Rightarrow \ \|f\|_{\infty,I} \ \leqslant \ \delta}$

  Cette propriété sera notamment utilisée pour trouver une sur-approximation de fonctions se présentant sous la forme $f_n - f$.

$$\boxed{\Big(\forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \ \leqslant \ \delta\Big) \ \Rightarrow \ \|f_n - f\|_{\infty,I} \ \leqslant \ \delta}$$

II.3.b) Convergence uniforme et norme infinie

Théorème 4.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\boxed{\begin{array}{c} (f_n) \text{ CU sur } I \\ \text{vers } f \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \textit{Il existe un rang } n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tel que :} \\ \quad \forall n \geqslant n_0, \textit{ la fonction } f_n - f \textit{ est bornée} \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0 \end{array} \right.}$$

(Pourquoi doit-on ajouter le caractère bornée des fonctions de la suite $(f_n - f)$? Tout simplement pour être en mesure d'écrire $\|f_n - f\|_{\infty,I}$!)

À RETENIR

- Attention à bien lire cet énoncé. Si une suite (f_n) converge uniformément sur I vers f alors :
  × cela n'implique pas que f est bornée,
  × cela n'implique pas que f_n est bornée.
  On peut seulement en conclure que, pour n suffisamment grand, les fonctions $f_n - f$ sont bornées.

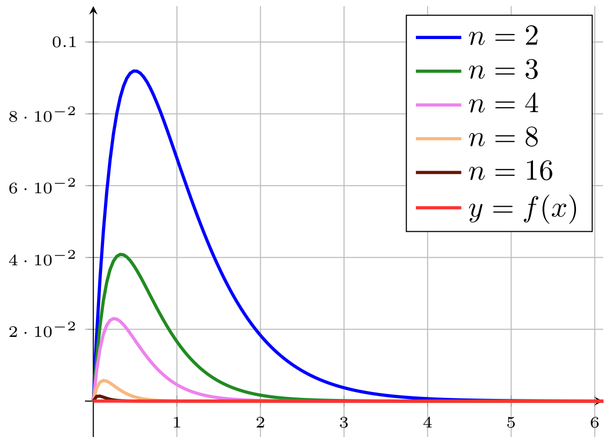
Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais que f_n n'est pas bornée.

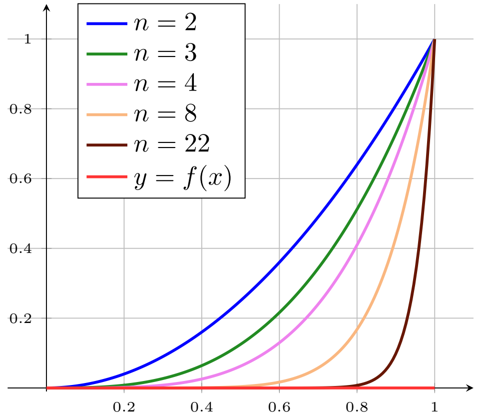
Remarque

- La notion de norme infinie permet de mieux comprendre la remarque précédente qui visait à différencier convergence simple et convergence uniforme. Il y a convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f si en tout point x_0, la distance de $f_n(x_0)$ à $f(x_0)$ devient aussi petite que souhaitée pour n suffisamment grand. La convergence uniforme a lieu si la distance entre la courbe de f_n et celle de f (distance globale et plus ponctuelle) devient aussi petite que souhaitée pour n suffisamment grand. Plus précisément, la quantité $\|f_n - f\|_{\infty,I}$ doit se rapprocher de 0 lorsque n augmente pour assurer la convergence uniforme.
- Pour bien comprendre cette notion, illustrons-la avec l'exemple suivant.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n}\, \mathrm{e}^{-nx}$.

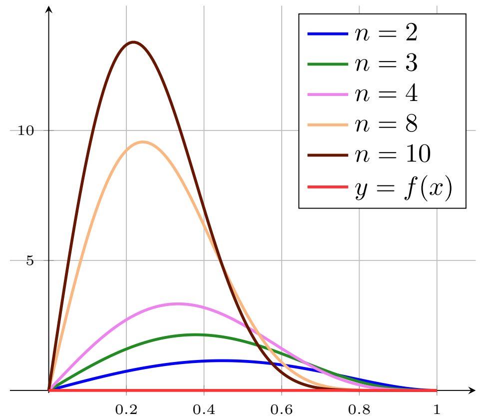


  La représentation graphique témoigne que la distance entre les courbes représentatives des fonctions de la suite (f_n) et celle de f tend vers 0. Il y a bien convergence uniforme de la suite (f_n) vers f sur $[0, +\infty[$.

- Il existe des suites de fonctions (f_n) qui convergent simplement sur I vers une fonction f mais qui ne convergent pas uniformément :
  - × la distance point à point peut diminuer tandis que la distance entre courbes reste constante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto x^n$.



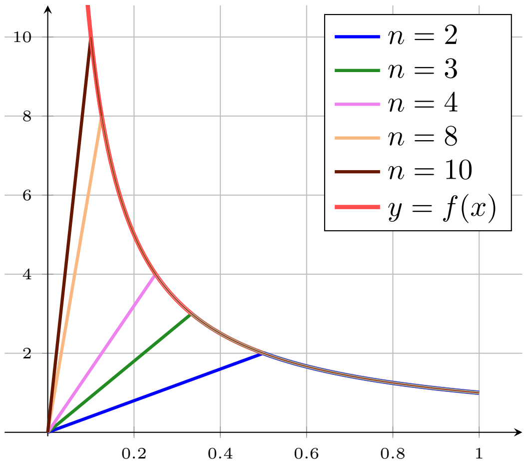
    Ici, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 1$ et il n'y a donc pas convergence uniforme.
  - × la distance point à point peut diminuer tandis que la distance entre courbes augmente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto n^2\ x\ (1 - x^2)^n$.



    (on peut démontrer $\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$)

× la distance point à point peut diminuer tandis que la distance entre courbes n'existe même pas (est infinie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\, x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$



II.4. Conséquence pratique pour démontrer la convergence uniforme

II.4.a) Par calcul de $\|f_n - f\|_{\infty,I}$

MÉTHODO **Démontrer la convergence uniforme par calcul de la norme infinie**

La limite simple f (on suppose qu'elle existe) de la suite (f_n) est la seule candidate qui pourrait permettre la convergence uniforme de la suite (f_n).

Il s'agit alors de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée et calculer sa borne supérieure. Pour ce faire, on peut faire l'étude de cette fonction $f_n - f$, en dresser le tableau de variation et en déduire $\|f_n - f\|_{\infty,I}$.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

2. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f.

Démonstration.

1. Soit $x_0 \in [0, +\infty[$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$: $f_n(x_0) \; = \; 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $x_0 > 0$:

$$f_n(x_0) \;=\; \frac{x_0}{1+n^2\,x_0^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_0}{n^2\,x_0^2} = \frac{1}{x_0}\,\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $f : x \mapsto 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $f_n - f = f_n$ est dérivable sur $[0, +\infty[$.
De plus, pour tout $x \geqslant 0$:

$$f_n'(x) \;=\; \frac{1 \times \left(1+n^2\,x^2\right) - x \times 2n^2\,x}{\left(1+n^2\,x^2\right)^2} \;=\; \frac{1-n^2\,x^2}{\left(1+n^2\,x^2\right)^2}$$

Comme $\left(1+n^2\,x^2\right)^2 \geqslant 0$, la quantité $f_n'(x)$ est du signe de $1-n^2\,x^2$. Or :

$$1-n^2\,x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 < \frac{1}{n^2} \;\Leftrightarrow\; x < \frac{1}{n}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
Signe de $(f_n - f)'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f_n - f$	0	$\nearrow$	$(f_n - f)\left(\frac{1}{n}\right)$	$\searrow$	0

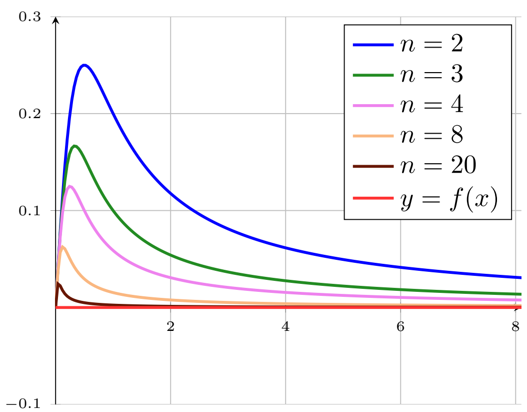
Enfin :

$$(f_n - f)\left(\frac{1}{n}\right) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2n}$$

On déduit de cette étude que la fonction $f_n - f$ est bornée et :

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers $f : x \mapsto 0$.



II.4.b) Par majoration de $\|f_n - f\|_{\infty,I}$

Théorème 5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f

$\Leftrightarrow$ *Il existe une suite numérique $(\delta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de limite nulle, et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \delta_n$*

Démonstration.

($\Rightarrow$) Il suffit de noter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = \|f_n - f\|_{\infty,I}$.

($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(\delta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, suite réelle de limite nulle, vérifiant, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \delta_n$$

La quantité δ_n est un majorant de l'ensemble :

$$E_{f_n-f,I} = \{\left|f_n(x) - f(x)\right| \mid x \in I\}$$

On en déduit que :

- × l'ensemble $E_{f_n-f,I}$ admet une borne supérieure (en tant qu'ensemble réel non vide et majoré).
- × la quantité δ_n est plus grande que le plus petit des majorants de $E_{f_n-f,I}$.

Finalement, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$0 \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$$

Or :

- × $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- × $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

□

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\|f_n - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cela démontre que la suite (f_n) converge uniformément vers f. □

MÉTHODO **Démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) sur un intervalle I vers une fonction f**

La limite simple f de la suite (f_n) est la seule candidate qui pourrait permettre la convergence uniforme de la suite (f_n). Une fois cette limite simple déterminée, pour démontrer la convergence uniforme de (f_n) vers f, on pourra utiliser l'une des méthodes suivantes.

(i) On commence par fixer un entier n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) On cherche δ_n tel que :

× $\forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \delta_n$,

× δ_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = 0$.

Les deux premiers points permettent alors de conclure :

$$0 \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$$

Or :

× $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

× $\delta_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On peut alors en conclure, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0$$

II.5. Démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme

Théorème 6.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1)	*La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f*	$\Rightarrow$	*Pour tout $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, la suite numérique $\Big(\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle*
2)	*Il existe une suite numérique $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite numérique $\Big(\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right|\Big)$ n'est pas de limite nulle*	$\Rightarrow$	*La suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f*

Remarque

- On peut démontrer la propriété ***1)*** en revenant à la définition (avec quantificateurs) de la convergence uniforme, ou en remarquant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

- La propriété ***2)*** est simplement la contraposée de la propriété ***1)***. Elle fournit une méthode permettant de démontrer qu'une suite de fonctions (f_n) n'est pas uniformément convergente sur I.

Exemple

On considère la suite (f_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $f_n : x \mapsto x^n$. Celle-ci :

× converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f : x \mapsto 0$.

× ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

En effet, si on note (x_n) la suite de terme général $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, alors :

$$\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \left|\,(x_n)^n - 0\,\right| = \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} \neq 0$$

Exercice *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$.
Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(n\,x)}{1+n^2\,x^2}$.

a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0,+\infty[$.

II.6. Convergence uniforme et manipulations algébriques

Théorème 7.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ *une fonction.*

- *La suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément sur* I *vers* f
- *La suite de fonctions* (g_n) *converge uniformément sur* I *vers* g

$\Rightarrow$ *Pour tout* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$*, la suite de fonctions* $(\lambda\,f_n + \mu\,g_n)$ *converge uniformément sur* I *vers la fonction* $\lambda\,f + \mu\,g$

Exercice
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{n}{nx+1}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée.

2. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $]0,1[$.

3. Démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

Une suite obtenue par produit de suites uniformément convergentes n'est pas uniformément convergente. On peut s'en convaincre en considérant la suite (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n}$$

La suite (f_n) CU sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto x^2$, mais la suite $\left({f_n}^2\right)$ ne CU pas sur I vers la fonction $f^2 = f \times f : x \mapsto x^2$.

III. Un mode de convergence plus faible : la convergence uniforme sur tout segment de l'intervalle

Théorème 8.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ *une fonction.*
Supposons que (f_n) *converge uniformément sur* I *vers* f.
Alors, pour tout segment $[a,b]$ *inclus dans* I*, la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers* f.

La réciproque est fausse en général.
Par exemple, la suite (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$:

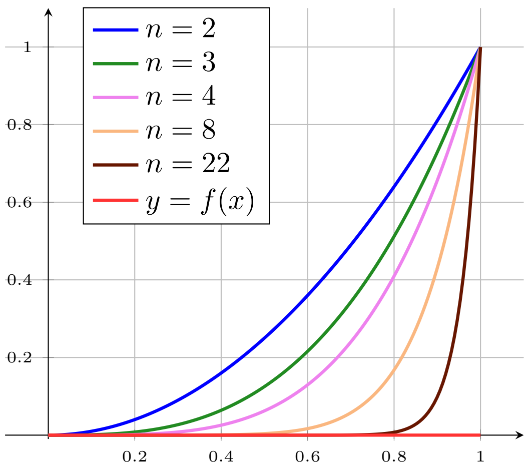
- × converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$ vers f.
- × ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

Remarque

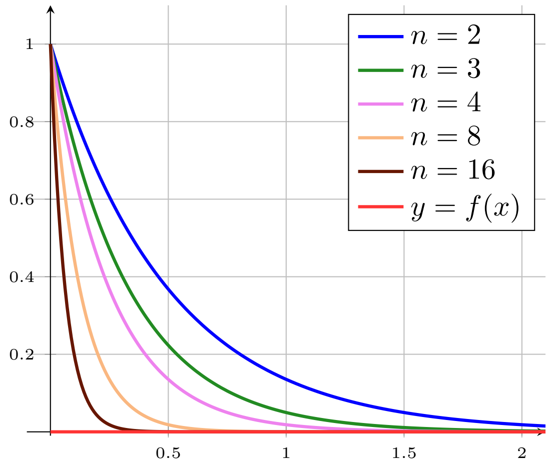
- Si l'intervalle I sur lequel est réalisé l'étude est un segment ($I = [a,b]$), la notion de convergence uniforme sur tout segment de I n'a pas d'intérêt. En effet, s'il y a convergence uniforme sur tout segment de $I = [a,b]$, il y a en particulier convergence uniforme sur $[a,b] \subset [a,b]$.
- La convergence sur tout segment de l'intervalle I permet généralement de s'écarter d'un point qui pose problème en créant « une zone de sécurité ». Typiquement, la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f peut ne pas être vérifié sur l'intervalle $[0,+\infty[$ mais se réaliser sur tout segment $[a,b]$ où $a > 0$ et $b > 0$. D'ailleurs, si c'est bien de 0 qu'on souhaite s'écarter, la convergence sera plutôt démontrée sur des intervalles du type $[a,+\infty[$ où $a > 0$. On parle alors plutôt d'intervalles « adaptés au problème ». Généralement, c'est l'énoncé qui introduit ces intervalles adaptés. On verra leur utilité pour les théorèmes d'interversion de symboles.

Exemple

- La suite (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto x^n$:
  - × converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$.
  - × ne converge pas uniformément sur $[0,1[$.



- La suite (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-n\,x}$:
  - × converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$ vers f.
  - × ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.



IV. Théorème d'interversion de symboles

IV.1. Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to x_0}$ (la continuité est transmise par convergence uniforme)

Théorème 9.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Supposons :

(i) $\boxed{\textit{Caractère } \mathscr{C}^0}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I.

(ii) $\boxed{\textit{Convergence uniforme}}$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur (tout segment de) I vers f.

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Démonstration.

Supposons que (f_n) converge uniformément sur I vers f et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I.

Soit $a \in I$. Soit $\varepsilon > 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$:

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f(a)\right| &= \left|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)\right| \\
&\leqslant \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \left|f_n(a) - f(a)\right| \\
&\leqslant \|f - f_n\|_{\infty,I} + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \|f_n - f\|_{\infty,I}
\end{aligned}$$

- Or (f_n) converge uniformément sur I vers f. Ainsi : $\|f_n - f\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $\|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ $\quad (*)$.

- De plus, la fonction f_{n_0} est continue sur I et donc continue en a.
  Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta]$:

$$\left(\ \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\ \right) \qquad (**)$$

- Soit $x \in I$. Supposons : $|x - a| \leqslant \delta$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f(a)\right| &\leqslant \|f - f_{n_0}\|_{\infty,I} + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| + \|f_{n_0} - f\|_{\infty,I} \\
&\leqslant \tfrac{\varepsilon}{3} + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| + \tfrac{\varepsilon}{3} && \textit{(d'après } (*) \textit{ en } n_0\textit{)} \\
&\leqslant 3\,\tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon && \textit{(d'après } (**)\textit{)}
\end{aligned}$$

On a démontré : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I,\ \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, f est continue en a. Comme ceci est valable pour tout $a \in I$, alors f est continue sur I. □

Remarque

Ce théorème est un résultat d'interversion de symboles. Plus précisément, pour tout $x_0 \in I$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to x_0} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) \\
= {} & \lim_{x\to x_0} \left(f(x) \right) && \textit{(car } (f_n) \textit{ converge simplement sur } I \textit{ vers } f\textit{)} \\
= {} & f(x_0) && \textit{(car } f \textit{ est continue en } x_0 \in I \textit{ - c'est le résultat du théorème !)} \\
= {} & \lim_{n\to+\infty} \left(f_n(x_0) \right) && \textit{(car } (f_n) \textit{ converge simplement sur } I \textit{ vers } f\textit{)} \\
= {} & \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right) && \textit{(car } f_n \textit{ est continue en } x_0 \in I\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x_0 \in I,\ \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x\to x_0} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right)}$$

Exercice 1 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a,b]$.
Démontrer que f est continue en x_0.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n : x \mapsto x^n$.
Démontrer de nouveau que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2. Démontrons qu'on ne peut pas affaiblir les hypothèses du théorème précédent en considérant seulement les f_n continues par morceaux sur I.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n continue par morceaux sur $[0,1]$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad \begin{cases} f_n(x) = 0 & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], \ f_n(x) = \dfrac{1}{k} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \end{cases}$$

a) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_n.

b) Démontrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ mais que sa limite n'est pas continue par morceaux.

IV.2. Interversion des symboles $\lim\limits_{n \to +\infty}$ et $\lim\limits_{x \to \alpha}$ (théorème de la double limite)

Théorème 10.
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
On note $I = |\,\alpha, \beta\,|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Supposons :

(i) $\boxed{\textit{Existence d'une limite finie}}$

Il existe une suite $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \lim\limits_{x \to \alpha} f_n(x) = \ell_n$.
(pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to \alpha} f_n(x)$ est une quantité finie notée ℓ_n)

(ii) $\boxed{\textit{Convergence uniforme}}$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I.

Alors la suite numérique $\left(\ell_n\right)$ est convergente et :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to \alpha} f_n(x) \right) = \lim_{x \to \alpha} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)}$$

Remarque

- Le résultat a été présenté en α mais il est évidemment aussi vérifié en β.
- On aurait pu ne faire qu'un seul théorème avec les deux résultats précédents. Il est possible d'intervertir les symboles $\lim\limits_{n \to +\infty}$ et limite en un point de l'intervalle, **les bords éventuellement infinis étant ajoutés**, dès lors qu'il y a convergence uniforme de la suite (f_n) et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en le point considéré :
  - × dans le premier théorème, l'existence de cette limite finie est assuré par continuité de f_n.
  - × dans le deuxième résultat, l'existence de cette limite finie est supposée. On peut utiliser ce résultat pour déterminer des limites lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (on ne peut évoquer d'argument de continuité pour assurer une limite finie de f_n en l'infini).

IV.3. Interversion des symboles $\lim\limits_{n \to +\infty}$ et $\displaystyle\int_a^b$

Théorème 11.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction.

Supposons que :

× *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,*

× *la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.*

Alors :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt \; = \; \int_a^b f(t) \, dt \; = \; \int_a^b \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right) dt}$$

Remarque

Dans ce résultat, les intégrales considérées sont des intégrales de fonctions continues sur un `SEGMENT`. Ce résultat ne peut en aucun cas être utilisé lors de l'étude d'intégrales impropres en (au moins) l'une des bornes.

> La convergence simple d'une suite (f_n) sur $[a, b]$ vers f ne suffit pas si l'on souhaite intervertir les symboles limite et intégrale.

Démonstration.
Supposons que :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,

× la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.

On souhaite montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t) \, dt \right)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t) \, dt$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \left| \displaystyle\int_a^b f_n(t) \, dt - \int_a^b f(t) \, dt \right| & = & \left| \displaystyle\int_a^b f_n(t) - f(t) \, dt \right| & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & \leqslant & \displaystyle\int_a^b |f_n(t) - f(t)| \, dt & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ & \leqslant & \displaystyle\int_a^b \|f_n - f\|_{\infty, [a,b]} \, dt & \\ & \leqslant & (b - a) \, \|f_n - f\|_{\infty, [a,b]} & \end{array}$$

Ainsi :

$$0 \; \leqslant \; \left| \int_a^b f_n(t) \, dt - \int_a^b f(t) \, dt \right| \; \leqslant \; (b - a) \, \|f_n - f\|_{\infty, [a,b]}$$

Or :

× $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

× $(b - a) \, \| \, f_n - f \, \|_{\infty, [a,b]}$ puisque (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\left| \int_a^b f_n(t) \, dt - \int_a^b f(t) \, dt \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

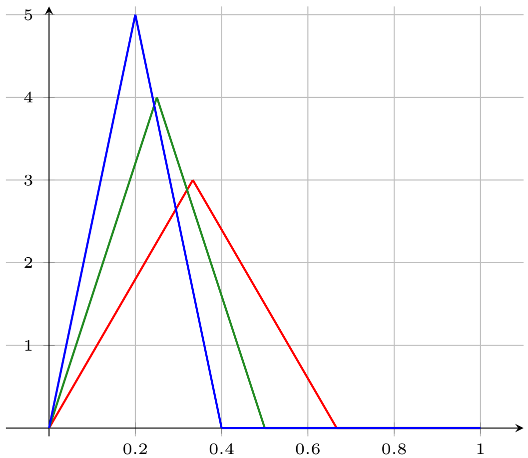
D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt$. □

Exemple

- Pour démontrer que la convergence simple ne suffit pas à intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_a^b$, il suffit d'exhiber un contre exemple.
- Pour ce faire, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\,x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2\,x + 2n & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Représentons graphiquement les premières fonctions de la suite (f_n) (ci-dessous pour $n = 3$ (rouge), $n = 4$ (vert) et $n = 5$ (bleu) :



La suite (f_n) :

× converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto 0$,

× vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$.

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} 1 \neq 0 = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$$

- Les résultats d'interversion sont parfois utilisés pour démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n). Imaginons que l'on considère une suite (f_n) vérifiant :

× la suite (f_n) converge simplement sur I vers f.

× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$

Si c'est le cas, on peut conclure que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f. La manière la plus rigoureuse pour le démontrer est de procéder par l'absurde. La rédaction est la suivante :

> `On procède par l'absurde.`
> `On suppose que la suite` (f_n) `converge uniformément sur` I `vers` f.
> `On peut donc en conclure [...résultat d'interversion ...].`
> `Or : [...démonstration que l'interversion n'a pas lieu ...].`
> `Absurde !`

Exercice *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto (x^2+1)\,\dfrac{n\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Exercice *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2\,x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

2. Soit $a \in \,]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit X un ensemble, soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et soit g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,x^2} \cos\left(\sqrt{n}\,x\right)$$

a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 2\,\dfrac{x-k}{n} & \text{si } x \in [k, k+\frac{1}{2}],\ k \leqslant n \\ 2\,\dfrac{k+1-x}{n} & \text{si } x \in [k+\frac{1}{2}, k+1],\ k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Remarque

- Dans le chapitre sur les suites et séries de fonctions, on a vu le théorème d'interversion de symboles suivant :

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \displaystyle\int_I h_n(t)\,dt$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.
>
> Soit $h : I \to \mathbb{K}$ une fonction.
>
> ***(i)*** Existence d'une limite finie - étude « en n »
>
> ▸ La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur I vers h.
> ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n \to +\infty} h_n(t) = h(t)$)
>
> ▸ La fonction h est continue par morceaux sur I.
>
> ***(ii)*** Intégrabilité (par domination) - étude « en t »
>
> ▸ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction h_n est continue par morceaux sur I.
>
> ▸ Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ |\,h_n(t)\,| \leqslant \varphi(t)$$
>
> Alors :
>
> × la fonction h est intégrable sur I.
>
> × la suite $\left(\displaystyle\int_I h_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie en $+\infty$ définie par :
>
> $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_I h_n(t)\,dt = \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} h_n(t)\right)\,dt = \int_I h(t)\,dt}$$

- Il est alors légitime de se poser la question du théorème à utiliser en pratique. Remarquons tout d'abord que le théorème d'interversion par hypothèse de convergence uniforme ne s'applique que dans le cas **d'intégrales sur un segment**. Ainsi :
  × dans le cas d'une intégrale généralisée, on raisonnera exclusivement à l'aide du théorème de convergence dominée.
  × dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte de l'exercice peut amener à utiliser l'un ou l'autre des énoncés.
- Pour compléter le dernier point, il faut aussi remarquer que le théorème de convergence dominée présente des hypothèses très faibles. En réalité, on peut démontrer que si le théorème d'interversion par convergence uniforme s'applique, alors le théorème de convergence dominée s'applique. En effet, si l'on suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur un segment $[a,b]$ vers une fonction f alors :

$$\begin{aligned}\forall t \in [a,b],\ |f_n(t)| &= \left|\big(f_n(t)-f(t)\big)+f(t)\right| \\ &\leqslant \|f_n-f\|_{\infty,[a,b]}+\|f\|_{\infty,[a,b]}\end{aligned}$$

  Or : $\|f_n-f\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \|f_n-f\|_{\infty,[a,b]} \leqslant 1$$

  Il suffit alors de considérer la fonction $\varphi : t \mapsto 1+\|f\|_{\infty,[a,b]}$ qui est intégrable sur le segment $[a,b]$ car constante.
- Finalement :

L'interversion par convergence uniforme s'applique	$\Rightarrow$	L'interversion par convergence dominée s'applique
L'interversion par convergence uniforme ne s'applique pas	$\Leftarrow$	L'interversion par convergence dominée ne s'applique pas

À RETENIR

- Dans le cas d'une intégrale généralisée, on travaillera exclusivement à l'aide du théorème de convergence dominée.
- Dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte doit guider le choix du théorème.
- Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont les moins exigeantes.

IV.4. Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et dérivée

Théorème 12 (Limite de dérivées)**.**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Soit $h \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Supposons :

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

(ii) $\boxed{\text{Convergences successives}}$

(0) *La suite (f_n) converge simplement sur I vers f,*

(1) *La suite (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers h.*

Alors :
- *la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,*
- *$f' = h$.*

Ce que l'on peut retenir sous la forme :

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n'\right)}$$

Démonstration.
Soit $[a,b]$ un segment inclus dans I.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n'(t)\, dt$. Démontrons que (h_n) converge uniformément vers $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\, dt$.

  Soit $x \in [a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} |h_n(x) - H(x)| & = & \left|\displaystyle\int_a^x f_n'(t)\, dt - \int_a^x h(t)\, dt\right| & \\ & = & \left|\displaystyle\int_a^x f_n'(t) - h(t)\, dt\right| & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & \leqslant & \displaystyle\int_a^x \left|f_n'(t) - h(t)\right| dt & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ & \leqslant & |x-a|\, \|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} & \\ & \leqslant & |b-a|\, \|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} & \end{array}$$

  Comme le majorant ne dépend pas de x, on en déduit que la fonction $h_n - H$ est bornée sur $[a,b]$, et :

$$\|h_n - H\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |b-a|\, \|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]}$$

  Or : $\|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc :

$$\|h_n - H\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Autrement dit, la suite (h_n) converge uniformément (et donc simplement) sur $[a,b]$ vers H.

- De plus, pour tout $x \in [a,b]$:

$$h_n(x) = \int_a^x f_n'(t)\, dt = \big[\ f_n(t)\ \big]_a^x = f_n(x) - f_n(a)$$

Comme la suite (f_n) converge simplement sur I vers f, on obtient :

$$h_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) - f(a)$$

Autrement dit, la suite (h_n) converge simplement vers $x \mapsto f(x) - f(a)$.

- Par unicité de la limite, on en déduit, pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x) - f(a) \ = \ H(x) \ = \ \int_a^x h(t)\ dt \qquad (*)$$

De plus, la fonction h est continue sur $[a, b]$ en tant que limite uniforme de fonctions continues sur $[a, b]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$, f'_n continue sur I). La fonction H est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ car c'est la primitive de h qui s'annule en a.
Avec la relation $(*)$, on en déduit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.
Comme ceci est valable pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, on obtient que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. De plus, toujours avec $(*)$:

$$\forall x \in [a, b],\ f'(x) = h(x)$$

Comme précédemment, ceci étant valable pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I : $\forall x \in I$, $f'(x) = h(x)$.

- Démontrons enfin la convergence uniforme de (f_n) vers f sur tout segment de I.
Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
& \left|f_n(x) - f(x)\right| \\
= \ & \left|f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a) + f(a) - f(x)\right| \\
\leqslant \ & \left|\big(f_n(x) - f_n(a)\big) - \big(f(x) - f(a)\big)\right| + \left|f_n(a) - f(a)\right| \quad \textit{(par inégalité triangulaire)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\left|\big(f_n(x) - f_n(a)\big) - \big(f(x) - f(a)\big)\right| \ & = \ \left|\int_a^x f'_n(t)\ dt - \int_a^x h(t)\ dt\right| \\
& = \ \left|\int_a^x f'_n(t) - h(t)\ dt\right| \\
& \leqslant \ \int_a^x \left|f'_n(t) - h(t)\right|\ dt \\
& \leqslant \ |x - a|\, \|f'_n - h\|_{\infty,[a,b]} \\
& \leqslant \ |b - a|\, \|f'_n - h\|_{\infty,[a,b]}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \ \leqslant \ |b - a|\, \|f'_n - h\|_{\infty,[a,b]} + \left|f_n(a) - f(a)\right|$$

Cette majoration ne dépendant pas de x, on en déduit que la fonction $f_n - f$ est bornée et :

$$\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \ \leqslant \ |b - a|\, \|f'_n - h\|_{\infty,[a,b]} + \left|f_n(a) - f(a)\right|$$

Enfin :

× la suite (f_n) converge simplement sur $[a, b]$ vers f. D'où :

$$\left|f_n(a) - f(a)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

× la suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers h. D'où :

$$\|f'_n - h\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par théorème d'encadrement, on a : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

> On ne peut se passer de la convergence uniforme de la suite (f'_n).
> On trouvera deux contre-exemples dans l'exercice suivant.

Exercice

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction défnie sur $[-1, 1]$ par :

$$f_n : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$$

a) Démontrer que (f_n) converge uniformément (donc simplement) sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue.

b) Démontrer que (f'_n) ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$.

a) Démontrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

b) Démontrer que (f'_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Le théorème précédent ne permet pas de conclure quant à une convergence uniforme sur I (tout en entier) de (f_n) vers f.
On pourra par exemple considérer la suite (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : x \mapsto e^{-\frac{x}{n}}$. Alors :

× (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$,

× (f'_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$,

× (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

IV.5. Interversion des symboles $\lim\limits_{n \to +\infty}$ et dérivation $k^{\text{ème}}$

Théorème 13.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(h_1, \dots, h_k) \in \left(\mathbb{K}^I\right)^k$ un k-uplet de fonctions.

Supposons :

(i) *Caractère $\mathscr{C}^k$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,

(ii) *Convergences successives*

(0) *La suite $({f_n}^{(0)})$ converge simplement sur I vers f.*

(...) ...

(k-1) *La suite $({f_n}^{(k-1)})$ converge simplement sur I vers h_{k-1}.*

(k) *La suite $(f_n^{(k)})$* **converge uniformément** *sur (tout segment de) I vers h_k.*

Alors :

× *la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,*

× $\forall j \in [\![1, k]\!],\ f^{(j)} = h_j$.

Ce que l'on peut retenir sous la forme :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!],\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)} = \left(\lim_{n\to+\infty} {f_n}^{(j)}\right)}$$

V. Les bons réflexes pour une étude de suite de fonctions

MÉTHODO **Plan d'étude d'une suite de fonctions**

Pour étudier une suite de fonctions (f_n) sur I, on procèdera (sauf mention contraire de l'énoncé) dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple
Pour démontrer la convergence simple sur I de (f_n) vers f :

- ***(i)*** on commence toujours par fixer un élément x de I : « Soit $x \in I$ ».
- ***(ii)*** on étudie ensuite la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de x, ce qui fournit la fonction limite f.

2) Convergence uniforme
Maintenant qu'on a trouvé une fonction limite f candidate à la convergence uniforme (avec ***1)***), on pourra démontrer la convergence uniforme de (f_n) vers f avec l'une des méthodes suivantes.

- ***(i)*** on commence par fixer un enter n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».
- ***(ii)*** pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :
  - × $\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \delta_n$
  - × δ_n **ne fait pas apparaître** x,
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

  La quantité δ_n est un majorant (ce n'est pas forcément le plus petit) de $\Big\{\big|f_n(x) - f(x)\big| \mid x \in I\Big\}$. Quand on peut s'en passer (c'est-à-dire lorsque la recherche de majorant ne nécessite pas d'étude précise), on ne cherche pas le plus petit des majorants.

  Si les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas, on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x\in I} \Big(\big|f_n(x) - f(x)\big|\Big)$ (en étudiant les variations de $f_n - f$ par exemple).
  On pourra alors conclure quant à la convergence uniforme si :

$$\sup_{x\in I} \Big(\big|f_n(x) - f(x)\big|\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque
En l'absence de convergence uniforme sur I (par exemple si les fonctions $f_n - f$ ne sont pas bornées), on peut parfois établir la convergence uniforme sur certaines parties de I (souvent des segments).

MÉTHODO **Démontrer la non convergence uniforme**

Pour démontrer qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers une fonction f. On pourra utiliser l'une des méthodes suivantes.

a) On exhibe une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
En effet, si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors, pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

D'où $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ tend vers 0.
(on utilise dans ce cas la contraposée de l'implication démontrée)

b) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I, alors on peut étudier la régularité de f sur I.
Si f n'est pas continue sur I, alors (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f.

De manière générale, on peut démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée par f.

VI. Schéma récapitulatif