CH VI : Suites et séries de fonctions

Notion de limites

- En première année, on a vu la notion de convergence d'une suite.
  Plus précisément, on dit qu'une suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |\, u_n - \ell \,| < \varepsilon)}$$

  ou encore *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |\, u_n - \ell \,| < \varepsilon}$$

- On a aussi établi la défintion de convergence d'une série $\sum u_n$. Il n'y a pas de difficulté particulière sur ce point car la série $\sum u_n$ n'est rien d'autre que la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)$. Définir la convergence de la série c'est définir la convergence de cette suite.
- On a aussi défini la notion de limite d'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ ($f \in \mathbb{K}^I$) en un point $x_0 \in \overline{I}$. Plus précisément, f admet la limite $\ell \in \mathbb{K}$ en x_0 si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

- Dans ces définitions, on constate que ce qui importe c'est de définir la notion de proximité, de distance entre des quantités, d'objets qui se rapprochent.
- On se pose maintenant dans ce chapitre la question de la définition de convergence d'une suite de fonctions (f_n). Que peut vouloir dire qu'une suite de fonctions se rapproche d'une fonction f ? On verra qu'il existe plusieurs modes de convergence. En fonction des modes de convergence, on pourra déduire des propriétés des fonctions de la suite (f_n), des propriétés de la fonction limite f.
- On définira enfin la notion de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$.

Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre, on considère les notations suivantes :

× I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

× $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

× $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Modes de convergence d'une suite de fonctions

I.1. La convergence simple

I.1.a) Définition

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I vers la fonction f si pour tout $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Autrement dit, si :

$$\boxed{(f_n) \text{ CS sur } I \text{ vers } f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)}$$

  Cette propriété s'écrit à l'aide des quantificateurs :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)}$$

  ou encore, *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon}$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite simple** de la suite (f_n).

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions définies par :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{n}\sin(x) \end{array} \qquad g_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx}{1+nx} \end{array} \qquad h_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2\, x^n\,(1-x) \end{array}$$

1) Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0,1]$. Remarquons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \left| \frac{\sin(x_0)}{n} \right| = \frac{|\sin(x_0)|}{|n|} = \frac{|\sin(x_0)|}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Or :
× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
× $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit, par théorème d'encadrement : $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } f : x \mapsto 0.}$$ □

2) Démontrer que la suite (g_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction g à déterminer.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0, +\infty[$. Deux cas se présentent.
- Si $x_0 = 0$:
$$g_n(0) = \frac{n \times 0}{1 + n \times 0} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
- Si $x_0 > 0$:
$$g_n(x_0) = \frac{n\,x_0}{1 + n\,x_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\,x_0}{n\,x_0} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On note alors :
$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La suite } (g_n) \text{ converge simplement sur } [0,+\infty[\text{ vers la fonction } g.}$$ □

3) a) Démontrer que la suite (h_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction h à déterminer.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0,1]$. Deux cas se présentent.
- Si $x_0 \in [0,1[$:
$$h_n(x_0) = n^2\, {x_0}^n\,(1 - x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
En effet :
× $1 - x_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - x_0$,
× $n^2\, {x_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées car $x_0 \in]0,1[$.
- Si $x_0 = 1$:
$$h_n(1) = n^2\, 1^n\,(1-1) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (h_n) \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } h : x \mapsto 0.}$$ □

b) La suite (h_n) converge-t-elle simplement sur $[0, +\infty[$?

Démonstration.
Soit $x_0 > 1$.
$$h_n(x_0) = n^2\, {x_0}^n\,(1 - x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\boxed{\text{La suite } (h_n) \text{ ne converge pas simplement sur } [0,+\infty[.}$$ □

MÉTHODO **Démontrer la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) sur un intervalle I vers une fonction f**

Pour démontrer la convergence simple sur I de (f_n) vers f :

(i) on commence toujours par fixer un élément x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».

(ii) on étudie ensuite la suite numérique $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de x_0, ce qui fournit la fonction limite simple f.

Cette étape amène généralement à une disjonction de cas, notamment si les fonctions de la suite (f_n) sont définies par cas.

Remarque

- Une suite (f_n) converge simplement sur un intervalle I vers une fonction f si pour tout $x_0 \in I$, la suite **numérique** $\big(f_n(x_0)\big)$ est convergente de limite $f(x_0)$. La convergence simple d'une suite de fonctions se ramène donc à l'étude de la nature de suites numériques.
- Il est (relativement) fréquent d'avoir à utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall r \in \,]0,1[,\ n^a\, r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Ce résultat n'est qu'une instance particulière du théorème des croissances comparées. Si $a > 0$ et $r \in \,]0,1[$, alors $\frac{1}{r} > 1$ et, de manière classique :

$$n^a\, r^n \;=\; \frac{n^a}{\left(\frac{1}{r}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Comme on le voit dans les exemples, lorsque l'on étudie la convergence simple, il est classique d'effectuer une disjonction de cas en fonction des valeurs de $x_0 \in I$. Évidemment, la disjonction est dictée par les résultats de convergence à étudier et le découpage dépend de la suite de fonctions étudiée.
- Les exemples précédents permettent de constater que certaines propriétés passent mal à la limite :

Si toutes les fonctions de la (f_n) sont continues en un point, la limite f ne l'est pas forcément.

- En revanche, il est simple de démontrer que si deux suites (f_n) et (g_n) convergent simplement sur I respectivement vers f et g, alors pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, la suite $(\alpha\, f_n + \beta\, g_n)$ (resp. $(f_n \times g_n)$) converge simplement sur I vers la fonction $\alpha\, f + \beta\, g$. Ce résultat provient du fait que la combinaison linéaire (resp. le produit) de deux suites **numériques** convergentes est convergente, de limite la combinaison linéaire (resp. le produit) des limites.

Exercice

On considère la suite (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto x + \dfrac{1}{n}$.

1) Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.

2) Démontrer que la suite $\left({f_n}^2\right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g à déterminer.

I.1.b) Propriétés transmises par convergence simple

Théorème 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur I vers f.

1)	*$\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est à valeurs positives sur I*	$\Rightarrow$	*La fonction f est à valeurs positives sur I*
2)	*$\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante sur I*	$\Rightarrow$	*La fonction f est croissante sur I*

Remarque

On peut relâcher un peu les hypothèses de ce théorème. Plus précisément, il suffit que les propriétés soient vérifiées à partir d'un certain rang (« il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est ... »).

Démonstration.

1) Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est à valeurs positives.
Soit $x \in I$.

$$\forall n \geqslant n_0,\ f_n(x) \ \geqslant\ 0$$

$$\text{donc} \quad \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n(x)}_{f(x)} \ \geqslant\ 0 \qquad \textit{(car la suite } (f_n) \textit{ converge simplement sur } I \textit{ vers } f\textit{)}$$

On obtient bien : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0$.

2) Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction f_n croissante sur I ($\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f_n(x) \leqslant f_n(y)$).
Soit $(x,y) \in I^2$ tel que : $x \leqslant y$. Alors :

$$\forall n \geqslant n_0,\ f_n(x) \ \leqslant\ f_n(y)$$

$$\text{donc} \quad \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n(x)}_{f(x)} \ \leqslant\ \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n(y)}_{f(y)} \qquad \textit{(car la suite } (f_n) \textit{ converge simplement sur } I \textit{ vers } f\textit{)}$$

On obtient bien, pour tout $(x,y) \in I^2$: $(x \leqslant y) \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)$.
Ainsi f est croissante sur I. □

Remarque
On pourra retenir que les propriétés *ponctuelles* se transmettent par convergence simple : signe, croissance, décroissance, périodicité, parité ...

I.1.c) Propriétés non transmises par la convergence simple

Théorème 2.
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1) *Les propriétés de régularité ne sont pas transmises par convergence simple.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ (f_n) \textit{ converge simplement sur } I \textit{ vers } f \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \textit{ continue en } x_0 \in I \end{array}\right\} \ \cancel{\Rightarrow}\ \begin{array}{c} f \textit{ continue} \\ \textit{en } x_0 \in I \end{array}}$$

2) *Les propriétés d'interversion ne sont pas forcément vérifiées en cas de convergence simple.*

$$\boxed{\begin{array}{c} (f_n) \textit{ CS sur} \\ I \textit{ vers } f \end{array} \ \cancel{\Rightarrow}\ \forall x \in I,\ \left(\lim_{n \to +\infty} f_n\right)'(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (f_n) \textit{ CS sur} \\ I \textit{ vers } f \end{array} \ \cancel{\Rightarrow}\ \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t)\right)\ dt}$$

Démonstration.
Il s'agit de trouver des contre-exemples aux propriétés citées.
C'est l'objet des exercices qui suivent. □

Illustration des propriétés non transmises

(1)

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ (f_n) \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f\\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue en } x_0 \in I\end{array}\right\} \not\Longrightarrow \begin{array}{c} f \text{ continue} \\ \text{en } x_0 \in I\end{array}$$

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\,x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
(on pourra tracer l'allure des courbes représentatives des f_n pour intuiter le résultat)

2. Quelle propriété des fonctions de la suite (f_n) n'est pas transmise à la fonction f ?

3. Étudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

(2)

$$\begin{array}{c}(f_n) \text{ CS sur} \\ I \text{ vers } f\end{array} \not\Longrightarrow \forall x \in I,\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

1. Démontrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Démontrer que la suite (f_n') ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ vers f'.

Remarque

La suite (f_n') n'admet même pas de limite simple sur $\mathbb{R}$.

(3) $\boxed{\begin{array}{c}(f_n) \text{ CS sur} \\ I \text{ vers } f\end{array} \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\ dt}$

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n : x \mapsto n^2\, x\, (1-x^2)^n$.

1. Démontrer la convergence simple sur $[0,1]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Déterminer le comportement asymptotique de la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque

Dnas l'exercice 2, on constate que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ n'existe éventuellement pas.

I.2. La convergence uniforme

I.2.a) Définition

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite (f_n) **converge uniformément sur** I vers f si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)}$$

  ou encore *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon}$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite uniforme** de la suite (f_n).

Remarque

- À première vue, la définition de la convergence uniforme ressemble à si méprendre à celle de la convergence simple. La seule différence est la position du quantificateur $\forall x \in I$. C'est en réalité une différence majeure :
  - × la notion de convergence simple d'une suite de fonctions est une notion très **ponctuelle**. Pour chaque point $x_0 \in I$ et toute précision $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver un rang n_0 à partir duquel on peut majorer la distance $\big|f_n(x_0) - f(x_0)\big|$ par ε.
    Le rang n_0 est ici dépendant du point x_0 d'étude. En certains points, il faut attendre « plus longtemps » (le rang n_0 est plus élevé) pour que $f_n(x_0)$ se rapproche de $f(x_0)$ qu'en d'autres points.
  - × la notion de convergence uniforme se détache de la dépendance ponctuelle. Pour toute précision $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel on peut majorer la distance $\big|\, f_n(x) - f(x) \,\big|$ par ε `POUR TOUT` $x \in I$.
    Les fonctions de la suite (f_n) se rapprochent donc de la suite f « à la même vitesse », indépendamment d'un éventuel point d'étude particulier.

- Comme on va le voir, la convergence uniforme implique la convergence simple mais la réciproque n'est pas vérifiée. Il existe donc des exemples de suites de fonctions qui convergent simplement mais pas uniformément vers une fonction f sur un intervalle I.

I.2.b) La convergence uniforme implique la convergence simple

Théorème 3.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\boxed{(f_n)\ \textit{CU vers}\ f \quad \Rightarrow \quad (f_n)\ \textit{CS vers}\ f}$$

Démonstration.
Supposons que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.
Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)$$

Soit $x_0 \in I$. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \geqslant n_0$. Comme : $\forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$, alors on a notamment, pour $x = x_0 \in I$:

$$\big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui achève cette démonstration. □

La réciproque est fausse en général.

(f_n) converge simplement vers f $\quad \cancel{\Rightarrow} \quad$ (f_n) converge uniformément vers f

Remarque

- On retiendra de ce théorème que la limite uniforme d'une suite de fonctions n'est autre que la limite simple de cette suite de fonctions.
- Cela a un impact fort sur la présentation des exercices :
  - × tout d'abord, on demande de démontrer qu'une suite (f_n) converge simplement sur I vers f.
  - × on demande alors en suite de démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers cette limite simple f.

I.2.c) Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide de la norme infinie

Définition

Soit f une fonction bornée sur I.

On appelle **norme infinie** de f sur I, et on note $\|f\|_{\infty,I}$ le réel :

$$\|f\|_{\infty,I} \ = \ \sup_{x\in I} \left(\big|f(x)\big|\right)$$

Remarque

- Rappelons que toute partie E de $\mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) qui est à la fois **non vide** et **majorée** possède une borne supérieure. Par définition, la borne supérieure d'un tel ensemble E est le plus petit de ses majorants. On note alors indistinctement $\sup(E)$ ou $\sup\limits_{x\in E} x$ la borne supérieure de E.
- Par définition, si un ensemble E admet une borne supérieure, alors celle-ci :
  - × est un majorant de E. Ainsi : $\forall x \in E,\ x \ \leqslant\ \sup(E)$.
  - × est le plus petit des majorants de E. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ x > \sup(E) - \varepsilon$$

- En particulier, si on considère $E = \big\{|f(x)| \mid x \in I\big\}$ où f est une fonction bornée, alors :

$$\forall x \in I,\ |f(x)| \ \leqslant\ \sup\left(\big\{|f(x)| \mid x \in I\big\}\right) \ = \ \|f\|_{\infty,I}$$

- La norme infinie est une norme. Elle vérifie donc les propriétés caractéristiques des normes à savoir : homogénéité / séparation / inégalité triangulaire.

Théorème 4.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\boxed{(f_n) \text{ CU sur } I \text{ vers } f \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \text{Il existe un rang } n_0 \text{ tel que :} \\ \quad \forall n \geqslant n_0, \text{ la fonction } f_n - f \text{ est bornée} \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0 \end{array} \right.}$$

Démonstration.

□

Exercice

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n}\, \mathrm{e}^{-nx}$.
Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais que f_n n'est pas bornée.

À RETENIR

- Si une suite (f_n) CU sur I vers f alors :
  - × cela n'implique pas que f est bornée,
  - × cela n'implique pas que f_n est bornée.

I.2.d) Démontrer en pratique de la convergence uniforme : caractérisation séquentielle

Théorème 5.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

(f_n) CU sur I vers f
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Il existe un rang } n_0 \text{ tel que :} \\ \quad \forall n \geqslant n_0, \text{ la fonction } f_n - f \text{ est bornée} \\ \bullet \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une suite } (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de limite nulle} \\ \text{et un rang } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que :} \\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant a_n \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une suite } (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de limite nulle} \\ \text{et un rang } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que :} \\ \forall n \geqslant n_0,\ \|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant a_n \end{array} \right.$$

Exercice

Soit $a \in [0, 1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto x^n$.
Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers $f : x \mapsto 0$.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k}$.

1) Montrer que la suite (S_n) converge simplement sur $[1, 2]$ vers une fonction notée S. Par la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $R_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$.

2) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [1, 2], |\, R_n(x)\,| \leqslant \dfrac{1}{x + (n + 1)}$.

3) En déduire que la suite (S_n) converge uniformément sur $[1, 2]$ vers S.

MÉTHODO **Démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) sur un intervalle I vers une fonction f**

La limite simple f de la suite (f_n) est la seule candidate qui pourrait permettre la convergence uniforme de la suite (f_n). Une fois cette limite simple déterminer, pour démontrer la convergence uniforme de (f_n) vers f, on pourra utiliser l'une des méthodes suivantes.

(i) on commence par fixer un enter n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

- × $\left|f_n(x) - f(x)\right| \ \leqslant \ \delta_n$
- × δ_n **ne fait pas apparaître** x,
- × $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\|f_n - f\|_{\infty,I} \ \leqslant \ \delta_n$.

La quantité δ_n est un majorant (ce n'est pas forcément le plus petit) de $\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right| \mid x \in I\right\}$.
Quand on peut s'en passer (c'est-à-dire lorsque la recherche de majorant ne nécessite pas d'étude précise), on ne cherche pas le plus petit des majorants.
Si les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas, on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x\in I} \left(\left|f_n(x) - f(x)\right|\right)$ (en étudiant les variations de $f_n - f$ par exemple).
On pourra conclure quant à la convergence uniforme si :

$$\sup_{x\in I} \left(\left|f_n(x) - f(x)\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque
En l'absence de convergence uniforme sur I (par exemple si les fonctions $f_n - f$ ne sont pas bornées), il est fréquent d'établir la convergence uniforme sur certaines parties de I, ce qui suffit pour les théorèmes d'interversion. La forme de ces parties dépend de l'exercice considéré (cela peut être des intervalles du type $[a,1]$, $[0,a]$ ou encore $[a,+\infty[$ ...).

I.2.e) Démontrer en pratique qu'il n'y a pas convergence uniforme

Théorème 6.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ *une fonction.*

(f_n) *CU sur I vers* f	$\Rightarrow$	$\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, *la suite* $\left(\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de limite nulle*

$\exists (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, *la suite* $\left(\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas de limite nulle*	$\Rightarrow$	(f_n) *ne CU pas sur I vers* f

Exercice
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{n}}{1 + n\,x^2}$.
Démontrer que (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple

- On considère la suite (f_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $f_n : x \mapsto x^n$. Celle-ci :

  × converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

  × ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

  En effet : $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

- Par le même argument, on peut démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1[$. Il est à noter que, lorsque l'on considère $I = [0,1[$ la limite simple de la suite (f_n), dans ce cas,

I.2.f) Un mode de convergence plus faible qui s'avérera utile dans la suite

Théorème 7.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Supposons que (f_n) converge uniformément sur I vers f.

Alors, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

La réciproque est fausse !
Autrement dit, il existe de suites (f_n) telles que :

× la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de I.

× la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I.

Exemple

On considère la suite (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$.
On a en effet déjà démontré que :

× la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ pour tout $(a,b) \in [0,1[\times [0,1[$ tel que $a < b$.

× la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1[$.

Exercice Par exemple, la suite (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : x \mapsto e^{-\frac{x}{n}}$:

× converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$ vers f.

× ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

I.3. Propriétés transmises par la convergence uniforme

I.3.a) Premières propriétés

Théorème 8.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

1) $$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ bornée sur } I \\ \bullet\ (f_n) \text{ CU sur } I \text{ vers } f \end{array}\right\} \Rightarrow\ f \text{ bornée sur } I$$

2) $$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (f_n) \text{ CU sur } I \text{ vers } f \\ \bullet\ (g_n) \text{ CU sur } I \text{ vers } g \end{array}\right\} \Rightarrow\ \begin{array}{l} \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \\ (\lambda\, f_n + \mu\, g_n) \text{ CU sur } I \text{ vers } \lambda\, f + \mu\, g \end{array}$$

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{n}{nx+1}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée.

2. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $]0,1[$.

3. Démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

La convergence uniforme n'est pas stable par produit.
On peut par exemple considérer la suite (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n}$$

La suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$, mais pas la suite (f_n^2).

I.3.b) La continuité est transmise par convergence uniforme

Théorème 9.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue sur } I \\ \bullet\ (f_n) \text{ CU sur } I \text{ vers } f \end{array}\right\} \Rightarrow\ f \text{ continue sur } I$$

Démonstration.

Supposons : $\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue sur } I \\ (f_n) \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } f \end{array}\right.$

Soit $a \in I$. Soit $\varepsilon > 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rll} & \left|f(x) - f(a)\right| & \\ = & \left|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)\right| & \\ \leqslant & \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \left|f_n(a) - f(a)\right| & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ \leqslant & \|f - f_n\|_{\infty,I} + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \|f_n - f\|_{\infty,I} & \end{array}$$

- Or (f_n) converge uniformément sur I vers f. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $\|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \varepsilon$. En particulier :

$$\|f - f_{n_0}\|_{\infty,I} \ = \ \|f_n - f\|_{\infty,I} \ \leqslant \ \varepsilon \qquad (*)$$

- De plus, la fonction f_{n_0} est continue sur I et donc continue en a. Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$:

$$\left(\ |x-a| \leqslant \delta\ \right) \quad \Rightarrow \quad \left(\ \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| \leqslant \varepsilon\ \right) \qquad (**)$$

- Soit $x \in I$. Supposons : $|x-a| \leqslant \delta$. On obtient :

$$\begin{array}{rcll} \left|f(x)-f(a)\right| & \leqslant & \|f-f_{n_0}\|_{\infty,I} + \left|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a)\right| + \|f_{n_0}-f\|_{\infty,I} & \\ & \leqslant & \varepsilon + \left|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a)\right| + \varepsilon & \textit{(d'après } (*)\textit{)} \\ & \leqslant & 3\,\varepsilon & \textit{(d'après } (**)\textit{)} \end{array}$$

On en déduit que f est continue en a.
Comme ceci est valable pour tout $a \in I$, alors f est continue sur I. □

Exercice

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n : x \mapsto x^n$.
Démontrer de nouveau que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2. Démontrons qu'on ne peut pas affaiblir les hypothèses du théorème précédent en considérant seulement les f_n continues par morceaux sur I.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n continue par morceaux sur $[0,1]$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left\{ \begin{array}{ll} f_n(x) = 0 & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\[2mm] \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ f_n(x) = \dfrac{1}{k} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \end{array} \right.$$

a) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_n.

b) Démontrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ mais que sa limite n'est pas continue par morceaux.

Théorème 10.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ (f_n) \textit{ CU sur tout segment de } I \textit{ vers } f \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \textit{ continue sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow f \textit{ continue sur } I}$$

I.4. Théorème d'interversion de symboles

I.4.a) Théorème de la double limite

Théorème 11.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ *une fonction.*

Soit $x_0 \in \overline{I}$.

Supposons que :

- *il existe une suite* $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *telle que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \ell_n$.
- *la suite* (f_n) *converge uniformément sur* I *vers* f.

Alors la suite (ℓ_n) *est convergente et :* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$, *c'est-à-dire :*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)}$$

Exercice

En utilisant la série géométrique, démontrer que ce résultat est faux si la convergence est uniforme sur tout segment de I.

I.4.b) Interversion des symboles limite et intégrale

Théorème 12 (Interversion limite / intégrale)**.**

Soient (f_n) *une suite de fonctions et* f *une fonction définies sur* $[a, b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

Supposons que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est continue sur* $[a, b]$,
- *la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers* f.

Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt}$$

Démonstration.

Supposons que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,
- la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.

On souhaite montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ dt\right)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt\right| &= \left|\int_a^b f_n(t) - f(t)\ dt\right| && \textit{(par linéarité de l'intégrale)}\\
&\leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\ dt && \textit{(par inégalité triangulaire)}\\
&\leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}\ dt\\
&\leqslant (b-a)\,\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}
\end{aligned}$$

Or (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f. Donc : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\left|\int_a^b f_n(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt.$ □

Ce résultat est faux si on suppose seulement la convergence simple de (f_n) vers f sur $[a, b]$.
On peut considérer par exemple la suite de fonctions (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

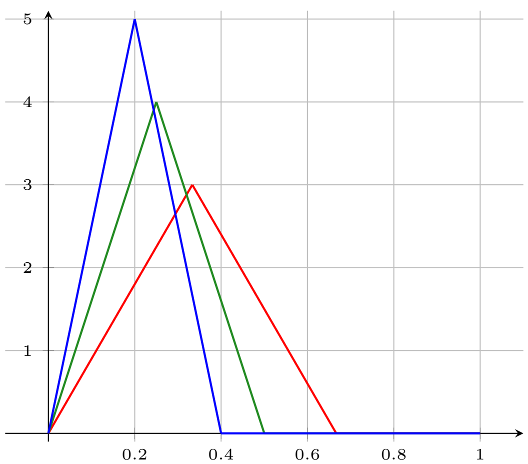
$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\, x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2\, x + 2n & \text{si } x \in \,]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in \,]\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

Cette suite de fonctions (f_n) :

× converge simplement vers la fonction nulle,

× vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt = 1$.

On pourra se convaincre de ce résultat (avant de le démontrer rigoureusement) grâce à l'allure de la courbe représentative de f_n (ci-dessous pour $n = 3$ (rouge), $n = 4$ (vert) et $n = 5$ (bleu).



Exercice
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 2\, \dfrac{x-k}{n} & \text{si } x \in [k, k+\frac{1}{2}],\ k \leqslant n \\ 2\, \dfrac{k+1-x}{n} & \text{si } x \in [k+\frac{1}{2}, k+1],\ k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

I.4.c) Interversion des symboles limite et dérivée

Théorème 13 (Limite de dérivées)**.**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
Soit $h \in \mathbb{K}^I$ une fonction.
Supposons :

(i) **Régularité**
$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

(ii) **Convergence simple**
La suite (f_n) converge simplement sur I vers f,

(iii) **Convergence uniforme**
La suite (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers h.

Alors :
× *la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,*
× *$f' = h$.*

Ce que l'on peut retenir sous la forme :

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n'\right)}$$

Démonstration.
Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n : \int_a^x f_n'(t)\ dt$. Démontrons que (h_n) converge uniformément vers $H : x \mapsto \int_a^x h(t)\ dt$.

  Soit $x \in [a, b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |h_n(x) - H(x)| &= \left| \int_a^x f_n'(t)\ dt - \int_a^x h(t)\ dt \right| \\ &= \left| \int_a^x f_n'(t) - h(t)\ dt \right| && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &\leqslant \int_a^x \left| f_n'(t) - h(t) \right|\ dt && \text{(par inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant |x - a|\ \|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} \\ &\leqslant |b - a|\ \|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} \end{aligned}$$

  Comme le majorant ne dépend pas de x, on en déduit que la fonction $h_n - H$ est bornée sur $[a, b]$, et :

$$\|h_n - H\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |b - a|\ \|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]}$$

  Or : $\|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc :

$$\|h_n - H\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Autrement dit, la suite (h_n) converge uniformément (et donc simplement) sur $[a, b]$ vers H.

- De plus, pour tout $x \in [a, b]$:

$$h_n(x) = \int_a^x f_n'(t)\ dt = \left[f_n(t) \right]_a^x = f_n(x) - f_n(a)$$

  Comme la suite (f_n) converge simplement sur I vers f, on obtient :

$$h_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) - f(a)$$

  Autrement dit, la suite (h_n) converge simplement vers $x \mapsto f(x) - f(a)$.

- Par unicité de la limite, on en déduit, pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x) - f(a) = H(x) = \int_a^x h(t)\ dt \qquad (*)$$

  De plus, la fonction h est continue sur $[a, b]$ en tant que limite uniforme de fonctions continues sur $[a, b]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n' continue sur I). La fonction H est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ car c'est la primitive de h qui s'annule en a.
  Avec la relation $(*)$, on en déduit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.
  Comme ceci est valable pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, on obtient que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. De plus, toujours avec $(*)$:

$$\forall x \in [a, b],\ f'(x) = h(x)$$

  Comme précédemment, ceci étant valable pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I : $\forall x \in I,\ f'(x) = h(x)$.

- Démontrons enfin la convergence uniforme de (f_n) vers f sur tout segment de I.
  Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} & \left| f_n(x) - f(x) \right| \\ = \ & \left| f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a) + f(a) - f(x) \right| \\ \leqslant \ & \left| \big(f_n(x) - f_n(a)\big) - \big(f(x) - f(a)\big) \right| + \left| f_n(a) - f(a) \right| && \text{(par inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\left|\big(f_n(x) - f_n(a)\big) - \big(f(x) - f(a)\big)\right| &= \left|\int_a^x f_n'(t)\ dt - \int_a^x h(t)\ dt\right| \\
&= \left|\int_a^x f_n'(t) - h(t)\ dt\right| \\
&\leqslant \int_a^x \left|f_n'(t) - h(t)\right|\ dt \\
&\leqslant |x-a|\,\|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} \\
&\leqslant |b-a|\,\|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant |b-a|\,\|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} + \left|f_n(a) - f(a)\right|$$

Cette majoration ne dépendant pas de x, on en déduit que la fonction $f_n - f$ est bornée et :

$$\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |b-a|\,\|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} + \left|f_n(a) - f(a)\right|$$

Enfin :

× la suite (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers f. D'où :

$$\left|f_n(a) - f(a)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

× la suite (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers h. D'où :

$$\|f_n' - h\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par théorème d'encadrement, on a : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

> On ne peut se passer de la convergence uniforme de la suite (f_n').
> On trouvera deux contre-exemples dans l'exercice suivant.

Exercice

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction défnie sur $[-1,1]$ par :

$$f_n : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$$

a) Démontrer que (f_n) converge uniformément (donc simplement) sur $[-1,1]$ vers la fonction valeur absolue.

b) Démontrer que (f_n') ne converge pas uniformément sur $[-1,1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$.

a) Démontrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

b) Démontrer que (f_n') ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

> Le théorème précédent ne permet pas de conclure quant à une convergence uniforme sur I (tout en entier) de (f_n) vers f.
> On pourra par exemple considérer la suite (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$. Alors :
> × (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$,
> × (f_n') converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$,
> × (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

I.4.d) Interversion des symboles limite et dérivation $k^{\text{ème}}$

Théorème 14.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ *une fonction.*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $(h_1, \dots, h_k) \in \left(\mathbb{K}^I\right)^k$ *un* k*-uplet de fonctions.*

Supposons :

(i) **Régularité**

$\forall n \in \mathbb{N}$, *f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,*

(ii) **Convergence simple**

– *La suite (f_n) converge simplement sur I vers f,*

– $\forall j \in [\![1, k-1]\!]$, *la suite* $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur I vers h_j,*

(iii) **Convergence uniforme**

La suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur (tout segment de) I vers h_k.

Alors :

× *la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,*

× $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $f^{(j)} = h_j$.

Ce que l'on peut retenir sous la forme :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!],\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)} = \left(\lim_{n\to+\infty} {f_n}^{(j)}\right)}$$

I.5. Les bons réflexes pour une étude de suite de fonctions

MÉTHODO **Plan d'étude d'une suite de fonctions**

Pour étudier une suite de fonctions (f_n) sur I, on procèdera (sauf mention contraire de l'énoncé) dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple

Pour démontrer la convergence simple sur I de (f_n) vers f :

(i) on commence toujours par fixer un élément x de I : « Soit $x \in I$ ».

(ii) on étudie ensuite la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de x, ce qui fournit la fonction limite f.

2) Convergence uniforme

Maintenant qu'on a trouvé une fonction limite f candidate à la convergence uniforme (avec ***1)***), on pourra démontrer la convergence uniforme de (f_n) vers f avec l'une des méthodes suivantes.

(i) on commence par fixer un enter n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

× $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \delta_n$

× δ_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

La quantité δ_n est un majorant (ce n'est pas forcément le plus petit) de $\Big\{\left|f_n(x) - f(x)\right| \mid x \in I\Big\}$. Quand on peut s'en passer (c'est-à-dire lorsque la recherche de majorant ne nécessite pas d'étude précise), on ne cherche pas le plus petit des majorants.

Si les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas, on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x\in I} \Big(\left|f_n(x) - f(x)\right|\Big)$ (en étudiant les variations de $f_n - f$ par exemple).

On pourra alors conclure quant à la convergence uniforme si :

$$\sup_{x\in I} \Big(\left|f_n(x) - f(x)\right|\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque

En l'absence de convergence uniforme sur I (par exemple si les fonctions $f_n - f$ ne sont pas bornées), on peut parfois établir la convergence uniforme sur certaines parties de I (souvent des segments).

MÉTHODO **Démontrer la non convergence uniforme**

Pour démontrer qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers une fonction f. On pourra utiliser l'une des méthodes suivantes.

a) On exhibe une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
En effet, si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors, pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

D'où $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ tend vers 0.
(on utilise dans ce cas la contraposée de l'implication démontrée)

b) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I, alors on peut étudier la régularité de f sur I.
Si f n'est pas continue sur I, alors (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f.

De manière générale, on peut démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée par f.

Exercice. *(Convergence d'une suite de fonctions de répartition)*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

× la v.a.r. X_n est à valeurs dans $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$,

× pour tout $k \in X_n(\Omega)$: $\mathbb{P}\left(\left\{X_n = \dfrac{k}{n}\right\}\right) = \alpha_n \left(\mathrm{e}^{\frac{k}{n}} - 1\right)$,

où $\alpha_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{k}{n}} - 1\right)}$.

× on note F_n la fonction de répartition de X_n.

1. Déterminer un équivalent de (α_n).

2. Déterminer une expression de F_n sans signe $\sum$.

3. Montrer que (F_n) converge simplement vers une fonction continue f.

4. Montrer que cette convergence est uniforme.

II. Modes de convergence d'une série de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On appelle **série de fonctions** de terme général f_n la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions sommes partielles.

II.1. Convergence simple d'une série de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I si pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ est convergente.
- La fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est alors appelée somme de la série de fonctions $\sum f_n$. On la note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Remarque

- Dans la première partie sur les suites, on précisait systématiquement que la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) se faisait sur un intervalle I vers une fonction f. Dans le cas d'une série de fonctions $\sum f_n$, si la convergence a lieu, la limite simple est la fonction :

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Cette fonction

- Une série de fonctions étant définie comme une suite de fonctions sommes partielles, la convergence simple conserve les mêmes propriétés que dans le cas de suites de fonctions.

II.2. Convergence uniforme d'une série de fonctions

II.2.a) Définition

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Théorème 15 (caractérisation à l'aide du reste)**.**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

$$\boxed{\begin{array}{c}\sum f_n \textit{ converge} \\ \textit{uniformément sur } I\end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \ \sum f_n \textit{ converge simplement sur } I \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} \left\| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_{\infty,I} = 0 \end{cases}}$$

Remarque

Une série de fonctions étant définie comme une suite de fonctions sommes partielles, la convergence uniforme conserve les mêmes propriétés que dans le cas de suites de fonctions. Les théorèmes suivants sont donc tous des corollaires de ceux démontrés pour les suites de fonctions.

II.2.b) La convergence uniforme implique la convergence simple

Théorème 16.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

$$\boxed{\begin{array}{c}\sum f_n \textit{ converge} \\ \textit{uniformément sur } I\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\sum f_n \textit{ converge} \\ \textit{simplement sur } I\end{array}}$$

II.2.c) La continuité est transmise par convergence uniforme

Théorème 17.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue sur } I \\ \bullet\ \sum f_n \text{ converge uniformément} \\ \quad \text{sur (tout segment de) } I \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ continue sur } I$$

Exercice

1. Démontrer que $\exp : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

II.2.d) Interversion des symboles $\sum$ et limite

Théorème 18 (Théorème de la double limite)**.**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

Soit $x_0 \in \overline{I}$.

Supposons que :

$\times$ *il existe une suite* $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *telle que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \ell_n$.

$\times$ *la série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* I.

Alors la série numérique $\sum \ell_n$ *est convergente et :*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)}$$

Exercice

Démontrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

II.2.e) Interversion des symboles $\sum$ et intégrale

Théorème 19.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

Supposons que :

$\times$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est continue sur* $[a, b]$,

$\times$ *la série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $[a, b]$.

Alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ dt\right) \ = \ \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)\ dt}$$

Exercice

1. Démontrer : $\forall x \in\ ]-1, 1[,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

2. Démontrer, sur un ensemble à préciser :

$$\arctan(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

II.2.f) Interversion des symboles $\sum$ et dérivée

Théorème 20.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

Supposons :

(i) **Régularité**

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I

(ii) **Convergence simple**

La série $\sum f_n$ *converge simplement sur* I

(iii) **Convergence uniforme**

La série $\sum f_n'$ *converge uniformément sur (tout segment de)* I.

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *et :*

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n{}'}$$

Exercice

1. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in \,]1, +\infty[, \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $g : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(tz)^k}{k!}$. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$g^{(k)} : t \mapsto z^k\, \mathrm{e}^{tz}$$

II.2.g) Interversion des symboles $\sum$ et dérivée $k^{\text{ème}}$

Théorème 21.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons :

(i) **Régularité**

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n *est de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* I

(ii) **Convergence simple**

– *La série* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I

– $\forall j \in [\![1, k-1]\!]$, *la série* $\sum f_n^{(j)}$ *converge simplement sur* I

(iii) **Convergence uniforme**

La série $\sum {f_n}^k$ *converge uniformément sur (tout segment de)* I.

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* I *et :*

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!], \ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n{}^{(j)}}$$

II.3. Convergence normale d'une série de fonctions

II.3.a) Définition

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur I.

- On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement sur** I si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente.

Exercice

1. Supposons qu'il existe une suite (a_n) telle que $\sum a_n$ est convergente et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant a_n$$

Démontrer qu'alors $\sum f_n$ converge normalement sur I.

2. Démontrer que la série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

II.3.b) La convergence normale implique la convergence uniforme

Théorème 22.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

$$\boxed{\begin{array}{c}\sum f_n \text{ converge normalement} \\ \text{sur } I\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\sum f_n \text{ converge uniformément} \\ \text{sur } I\end{array}}$$

La réciproque est fausse !
Autrement dit, il existe des séries de fonctions $\sum f_n$ telles que :

× $\sum f_n$ converge uniformément sur I

× $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I

Exemple

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$:

× converge uniformément sur $[1, 2]$,
(on l'a déjà démontré dans un exercice précédent)

× ne converge pas normalement sur $[1, 2]$.

II.3.c) Un mode de convergence plus faible qui s'avère utile

Théorème 23.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions.*
Supposons que $\sum f_n$ *converge normalement sur* I.
Alors, pour tout segment $[a,b]$ *inclus dans* I, *la série* $\sum f_n$ *converge normalement sur* $[a,b]$.

Remarque

- Évidemment, si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I, alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge aussi uniformément sur tout segment de I.
- La convergence normale sur tout segment de I est un cadre idéal (qui implique la convergence uniforme sur tout segment de I).

La réciproque est fausse !
Par exemple, la série $\sum x^n$:

× converge normalement sur tout segment de $[0,1[$,

× ne converge pas normalement sur $[0,1[$.

II.4. Les bons réflexes pour une étude de série de fonctions

MÉTHODO **Plan d'étude d'une série de fonctions**

Pour étudier une série de fonctions $\sum f_n$ sur I, on procèdera (sauf mention contraire de l'énoncé) dans l'ordre suivant.

1) Convergence normale
Pour démontrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche un majorant u_n de $\left|f_n(x)\right|$, **indépendant de** x, tel que $\sum u_n$ est convergente.

2) Convergence simple (en cas d'échec de la convergence normale).
Pour démontrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer un élement x de I : « Soit $x \in I$ ».

(ii) on étudie démontre ensuite la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$ selon les valeurs de x.

3) Convergence uniforme (toujours en cas d'échec de la convergence normale).

(i) on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche un majorant δ_n de $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|$, **indépendant de** x, tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. convergente.

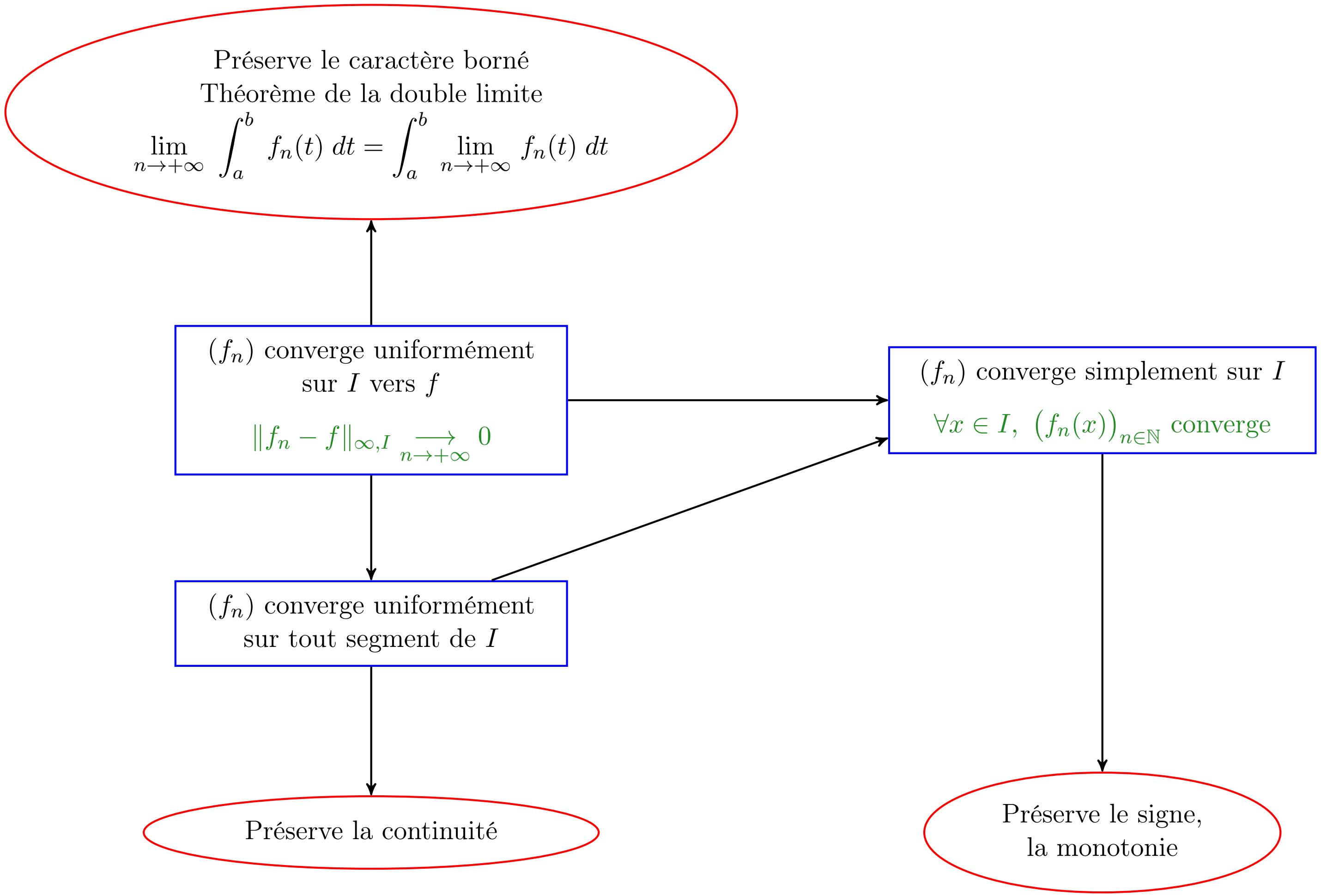
(notons que cela revient à démontrer que le reste de la série $\sum f_n$ *converge uniformément vers* 0 : $\|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*)*

MÉTHODO **Démontrer la non convergence uniforme / normale**

De manière générale, on peut démontrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée.

III. Schémas récapitulatifs

III.1. Suite de fonctions



III.2. Séries de fonctions