Probabilités

Exercice 1 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\mathbb{P}\big(\{X_i \leqslant n\}\big)$, puis $\mathbb{P}\big(\{X_i > n\}\big)$.

2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min\ \big(X_1(\omega), \ldots, X_N(\omega)\big)$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}\big(\{Y > n\}\big)$.
En déduire $\mathbb{P}\big(\{Y \leqslant n\}\big)$ puis $\mathbb{P}\big(\{Y = n\}\big)$.

b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 2 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Elles suivent la même loi définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) = p\, q^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup\ (X, Y)$ et $V = \inf\ (X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).

2. Déterminer la loi marginale de U.

On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\big(\{V = n\}\big) = p\, q^{2n}\ (1 + q)$.

3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
En déduire l'espérance de V.

4. Les varrables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big((X, Y) = (j, k)\big)\ =\ \frac{(j+k)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Prouver que $\mathbb{E}\big(2^{X+Y}\big)$ existe et la calculer.

Exercice 4 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\} \big) \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1}\ j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. ***a)*** Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $\mathbb{P}\big(\{X = Y\} \big)$.

Exercice 5 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \,]-1, 1[$, la série $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que :

$$\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} \;=\; \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$$

Soit $p \in \,]0, 1[$.

Soit $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Y = n\} \big) \;=\; \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p\,(1-p)^n & \textit{si } k \leqslant n \\[2ex] 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. ***a)*** Déterminer la loi de Y.

b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.

c) Déterminer l'espérance de Y.

3. Déterminer la loi de X.

Exercice 6 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.

À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

× A_n l'événement « l'animal est en A après son $n^{\text{ème}}$ trajet ».

× B_n l'événement « l'animal est en B après son $n^{\text{ème}}$ trajet ».

× C_n l'événement « l'animal est en C après son $n^{\text{ème}}$ trajet ».

On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

1. ***a)*** Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

3. Montrer comment les résultats de la question ***2.*** peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 7 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

× on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

× on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

× si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.

2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}\, p_n + \dfrac{4}{7}$.

3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 8 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.

2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

   a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{Y=k\} \mid \{X=i\}\big)$.

   b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\displaystyle\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 9 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé.

1. ***a)*** Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

   b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in]0,1[$. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $\{Y=m\}$ est une loi binomiale de paramètre (m,p).
Déterminer la loi de X.

Exercice 10 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

   a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

   b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

   a) Déterminer la loi de X.

   b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 11 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.

2. *a)* Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X = 2\}\big)$.

b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 12 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 13 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $n \in N^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 14 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient $n \in N^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^2$ tels que $A \subset B$.

2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.

3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifiant $A \cup B \cup C = E$

Exercice 15 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) = \dfrac{\lambda}{n\,(n+1)\,(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = x(x+1)(x+2)$.

2. Calculer λ.

3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.

4. La variable X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice 16 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) = p_n$$

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\ t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer : $\forall t \in]-1,1[, G_S(t) = G_{X_1}(t)\ G_{X_2}(t)$:

a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in]-1,1[$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Exercice 17 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On considère la série entière $\sum\ t^n\ \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$ de variable réelle t.
On note R_X son rayon de convergence.

a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.

On pose $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n\ \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.
Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$ en fonction de ${G_X}^{(k)}(0)$.

2. *a)* On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in \mathrm{D}_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

b) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice 18 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Rappler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de mêm loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

Prouver : $\forall a \in]0,+\infty[,\ \mathbb{P}\left(\left\{\left|\dfrac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right\}\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Y_1)}{n\,a^2}$.

3. **Application**

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Exercice 19 (Centrale 2016-863)

Soit X une variable aléatoire.

On dit que X est décomposable s'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z telles que $Y+Z$ ait la même loi que X.

1. Si X est décomposable, donner une relation entre G_X, G_Y, G_Z.

2. Soient $n \geqslant 2$ et $p \in]0,1[$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, montrer que X est décomposable.

3. Soit $n \geqslant 2$ non premier. On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{0,\dots,n-1\}$. Montrer qu'il existe $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \left(\dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=0}^{r-1} t^i\right)\left(\dfrac{1}{s}\sum\limits_{j=0}^{s-1} t^{rj}\right)$.

En déduire que X est décomposable.

4. On suppose que $n \geqslant 3$ est premier. Soit X suivant une loi uniforme sur $\{0,\dots,n-1\}$.

Montrer que X n'est pas décomposable.

Exercice 20 (Centrale 2019-1121)

1. Montrer la convergence $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^k}{2^n}$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$ et calculer cette somme.

2. Montrer que l'on définit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big) = \frac{n}{2^{n+1}}$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

3. On note toujours X la variable aléatoire définie à la question précédente.

Une urne contient X boules numérotées de 1 à X. On tire une boule au hasard et on note Y son numéro.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 21 (Centrale 2018-1181)

Une urne contient initialement deux boules vertes et une boule noire. À chaque étape, on tire une boule au hasard dans l'urne avec remise et l'on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur que la boule tirée.

La variable aléatoire X (resp. Y) désigne le rang de la première boule verte (resp. noire) tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Z_n désigne le nombre de boules vertes dans l'urne après n étapes.

Enfin U_n est la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée à la n^e étape est verte et 0 sinon.

1. Déterminer les lois de X et Y.

2. Exprimer Z_n en fonction de certains des $(U_i)_{i\geqslant 1}$ et déterminer $Z_n(\Omega)$.

3. Calculer $\mathbb{P}\big(\{U_{n+1}=1\} \mid \{Z_n=k\}\big)$.

4. Démontrer par récurrence que U_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Déterminer la loi de Z_n.

Exercice 22 (Mines 2018-1011)

Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Exercice 23 (CCINP 2016-957)

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et $Y = X^2+1$.

1. Déterminer l'espérance de Y.

2. Quelle est la probabilité que $2X < Y$?

3. Comparer les probabilités que X soit paire et que X soit impaire.

Exercice 24

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, par la suite, les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles discrètes.

Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, la fonction génératrice des moments de X, lorsqu'elle existe, est la fonction numérique de la variable réelle t, $M_X : t \to \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$, où $\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire e^{tX}.

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, \ldots, p_r$ où $r \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on définit la fonction φ_X sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\ \ln\big(M_X(t)\big)$$

1. Déterminer M_Z, lorsque Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0,1]$.

2. Montrer que M_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout entier naturel k, $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\big(X^k\big)$.

3. ***a)*** Montrer que φ_X est bien définie sur R^* et prolongeable parcontinuité en 0.

On pose $\varphi_X(0) = \mathbb{E}(X)$ et on note encore φ_X la fonction ainsi prolongée.

b) Démontrer que φ_X est dérivable en 0 et calculer $\varphi'_X(0)$ en fonction de la variance $\mathbb{V}(X)$ de X.

c) On admet dans la suite : $\forall u \leqslant 0$, $\mathrm{e}^u \leqslant 1 + u + 2u$.

Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors :

$$\forall t \geqslant 0,\ \varphi_X(t) \leqslant \mathbb{E}(X) + \frac{t}{2}\ \mathbb{E}(X^2)$$

d) (i) Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $t \mapsto \mathrm{e}^{t\, x_i}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

(ii) En déduire que deux variables discrètes finies X et Y ont la même loi si, et seulement si, les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.

e) Montrer que si X et Y sont des variables discrètes finies indépendantes, alors, $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

f) En déduire M_X, lorsque X suit une loi binomiale de paramètre $s \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.