CH VI (bis) : Introduction aux variables discrètes

I. Notion de variable aléatoire discrète

I.1. Définition

Définition

Soit E un ensemble *(on considère souvent $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$)*.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- On dit que X est une **variable aléatoire discrète à valeurs dans** E et définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  - ***(i)*** X est une application de Ω dans E ($X : \Omega \to E$).
  - ***(ii)*** $\forall x \in E,\ X^{-1}(\{x\}) = \{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$.
  - ***(iii)*** L'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

    (l'ensemble image $X(\Omega)$ est, par définition, l'ensemble des valeurs prise par l'application X)
- On dit que la v.a. X est **finie** si $X(\Omega)$ est fini.
  On dit que la v.a. X est **infinie** si $X(\Omega)$ est un ensemble infini.

Remarque

- Il est important de souligner que le programme permet de considérer des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble E quelconque.
- Cependant, dans les sujets, les variables aléatoires étudiées sont :
  - × majoritairement à valeurs dans $\mathbb{R}$,
  - × de temps en temps à valeurs dans $\mathbb{C}$,
  - × très rarement à valeurs dans un ensemble E qui n'est ni $\mathbb{R}$, ni $\mathbb{C}$.
- Si les variables aléatoires réelles sont les plus étudiées aux concours, c'est parce que ce sont celles qui donnent lieu, à notre niveau, aux développements les plus importants. Typiquement, les notions de variance et d'écart-type ne sont définies que pour les variables aléatoires réelles. Par ailleurs, les lois usuelles sont toutes des lois de variables aléatoires réelles.
- On pourrait alors se limiter à l'étude des varaibles aléatoires réelles. Le programme n'a pas pris ce parti car il peut arriver que l'étude d'autres variables aléatoires soit pertinent dans un exercice.
- Profitons-en pour rappeler qu'un ensemble G est :
  - × fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G est en bijection avec $[\![1, n]\!]$.
  - × (infini) dénombrable si G est en bijection avec $\mathbb{N}$,
  - × au plus dénombrable s'il existe $I \subset \mathbb{N}$ tel que G est en bijection avec I.

  Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ mais aussi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$ sont dénombrables.

I.2. Ensemble image $X(\Omega)$ d'une variable aléatoire discrète X

I.2.a) Image directe et image réciproque d'une application

Définition

Soient E et F des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

- Pour toute partie A de E ($A \subset E$), on appelle image directe de la partie A par f, et on note $f(A)$, le sous-ensemble de F défini par :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \in F \mid x \in A\} \end{aligned}$$

  Dans le cas $A = E$, l'ensemble $f(E)$ est noté $\mathrm{Im}(f)$ et est appelé image de l'application f.
- Pour toute partie B de F ($B \subset F$), on appelle image réciproque de la partie B par f, et on note $f^{-1}(B)$, le sous-ensemble de E défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Remarque

- Une variable aléatoire est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. La notation $X(\Omega)$ doit être comprise pour ce qu'elle est : c'est l'image de Ω par l'application X.
- On retrouve ce qui est signalé dans la définition de variable aléatoire : $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X.
- Pour insister sur ces notions d'image directe et réciproque, on peut aussi remarquer :
$$\forall x \in E,\ \{X = x\} = X^{-1}\big(\{x\}\big)$$

I.2.b) Conséquence du caractère au plus dénombrable de $X(\Omega)$

- Rappelons qu'un ensemble G est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (il existe une application $\varphi : G \to \mathbb{N}$ qui réalise une bijection de G dans $\mathbb{N}$). Un ensemble au plus dénombrable est un ensemble en bijection avec une partie I de $\mathbb{N}$.
- Le caractère au plus dénombrable de $X(\Omega)$ est à l'origine des spécificités des variables aléatoires discrètes. Dire qu'une variable aléatoire X est discrète c'est signifier que son ensemble image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable. Autrement dit, la variable X prend au plus une infinité dénombrable de valeurs. Cela permet de numéroter les valeurs possibles prises par X. En conséquence, on peut numéroter les éléments de $X(\Omega)$ c'est-à-dire l'écrire sous la forme :
$$\boxed{X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\} \quad \text{où} \quad I \subset \mathbb{N}}$$
Avec cette notation, l'ensemble $X(\Omega)$ est fini si I l'est (et est infini dénombrable sinon).

Attention à ne pas confondre les deux notions suivantes.

- L'ensemble image $X(\Omega)$ est indexé par $\mathbb{N}$.
Autrement dit : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- L'ensemble image $X(\Omega)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Par exemple : $X(\Omega) = \{3, 5, 7, 10, 11 \dots\}$

- On peut d'ailleurs préciser :
$$X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad X \text{ est une variable discrète}$$
$$X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \quad \not\Leftarrow \quad X \text{ est une variable discrète}$$
Par exemple, si $X(\Omega) = \{1, \sqrt{2}, e^6, 23\}$, alors :
  × X est une variable discrète (puisque $X(\Omega)$ est un ensemble fini),
  × $X(\Omega)$ n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Exemple *(variable aléatoire discrète réelle)*

1) On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à effectuer 2 lancers successifs d'un même dé à 6 faces.

- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$.
- L'univers Ω étant fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.
- On considère la v.a.r. X égale à la somme des deux résultats obtenus :
$$X : \left| \begin{array}{ccc} [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!] & \to & \mathbb{R} \\ (i \quad , \quad j) & \mapsto & i + j \end{array} \right.$$
Cette variable aléatoire est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On peut préciser l'image de cette v.a.r. : $X(\Omega) = [\![2, 12]\!] \subseteq \mathbb{R}$.
- L'ensemble $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant 4\}$ est bien un événement.
On peut aussi l'écrire :
A : « la somme des deux dés est inférieur à 4 ».
$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\} \quad (A \in \mathscr{P}(\Omega))$
On notera : $A = \{X \leqslant 4\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant 4\}$

  L'ensemble $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 10\}$ est aussi un événement :
$$B = \bigcup_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k > 10}} \{X = k\}$$
B : « la somme des deux dés est strictement supérieur à 10 »
$B = \{(5,6), (6,6), (6,5)\} \quad (B \in \mathscr{P}(\Omega))$
On notera : $B = \{X > 10\} = \overline{\{X \leqslant 10\}} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 10\}$

2) On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à observer le résultat de 4 lancers successifs d'1 dé à 6 faces.
- $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^4$.
- L'univers étant fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.
- On considère la v.a.r. X égale au nombre de Pile obtenus lors du lancer.
- L'ensemble $C = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant 2\}$ est un bien un événement :
  C : « le lancer a produit, au plus, deux Pile ».
  Des lancers tels que $(\text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face})$, $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Face})$, ou $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face})$ réalisent cet événement.
  On notera $C = \{X \leqslant 2\}$.

  On peut aussi considérer les événements :
  × $\{X = 2\}$: « le lancer contient exactement 2 Pile ».
  × $\{1 < X \leqslant 3\}$: « le lancer contient soit 2 Pile soit 3 Pile ».

3) On effectue maintenant une infinité de lancers successifs d'1 dé à 6 faces.
- $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^{\mathbb{N}^*}$.
- On considère la v.a.r. X égale au rang d'apparition du premier Pile.
- Dans la suite, on considère les événements :
  × P_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ tirage »,
  × F_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ tirage ».
- Ces événements permettre de décrire précisément les événements construits à l'aide de X. Par exemple :
  × $\{X = 3\} = F_1 \cap F_2 \cap P_3$. Cet événement est réalisé par les tirages :
  $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Face}, \ldots)$,
  $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \ldots)$,
  $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \ldots)$, ...
  i.e. par tous les tirages qui commencent par Face, Face, Pile.
  (ne pas confondre événement et tirages réalisant cet événement)
  × $\{X \geqslant 8\} = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_7$.
  × $\{X \geqslant 2\} = P_1 \cup (F_1 \cap P_2)$.
  (contient les tirages qui commencent par Pile ou par (Face, Pile))

I.3. Système complet d'événements associé à une variable discrète

Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Notons $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où $I \subseteq \mathbb{N}$.

> La famille $(\{X = x_i\})_{i \in I}$ est un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements associé à X.**

On en déduit la propriété suivante

1) *Si X est fini et $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors :* $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X = x_i\}) = 1$

2) *Si X est infini et $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ alors :* $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = x_i\}) = 1$

3) *En résumé :* $\boxed{\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\}) = 1}$

Démonstration.
Il y a deux propriétés à démontrer.

1) $(\{X = x_i\})_{i \in I}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles :

Soit $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$ et soit $\omega \in \{X = x_i\} \cap \{X = x_j\}$.
Cela signifie que :
× $\omega \in \{X = x_i\}$ donc $X(\omega) = x_i$,
× $\omega \in \{X = x_i\}$ donc $X(\omega) = x_j$.
Par définition, $x_i \neq x_j$.
On en conclut qu'il n'existe pas d'élément $\omega \in \{X = x_i\} \cap \{X = x_j\}$.
Ainsi $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \varnothing$.

2) $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} \{X = x_i\}$:

($\supset$) $\bigcup\limits_{i \in I} \{X = x_i\} \subset \Omega$ puisque $\bigcup\limits_{i \in I} \{X = x_i\}$ est un événement (en tant qu'union dénombrable d'événements).

($\subset$) Soit $\omega \in \Omega$.
Alors $X(\omega) \in X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$.
Ainsi, il existe $i \in I$ tel que $X(\omega) = x_i$ *i.e.* $\omega \in \{X = x_i\}$. □

I.4. Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- On appelle **loi de probabilité** de X et on note $\mathbb{P}_X$ l'application :

$$\mathbb{P}_X \ : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) \ = \ \mathbb{P}(\{X = x\}) \end{array} \right.$$

- Autrement dit, la loi de X est la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}(\{X = x\})$ pour x décrivant $X(\Omega)$.
- On dit que X et Y ont même loi si :
  (i) $X(\Omega) = Y(\Omega)$
  (ii) $\forall x \in \Omega,\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = x\}\big)$
  Lorsque X et Y suivent la même loi, on note : $X \sim Y$.

Remarque

Dans la définition de variable aléatoire de même loi, on suppose que les v.a. X et Y ont même ensemble image (propriété *(i)*). On peut relâcher un peu cette propriété en remplaçant $X(\Omega)$ par $\mathrm{Supp}(X) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \neq 0\}$ (ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle) et $Y(\Omega)$ par $\mathrm{Supp}(Y) = \{y \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \neq 0\}$ (ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle). Autrement dit, les v.a. X et Y ont même loi si toutes les valeurs pour lesquelles elle diffèrent sont prises avec probabilité nulle.

Exemple *(loi d'une variable aléatoire discrète réelle)*
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer 4 lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

- $\Omega = \{P, F\}^4$.
- On munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
  ($(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé)
  $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^4 = 16$.
- On note X la v.a.r. qui compte le nombre de Piles obtenu lors du lancer.
  On a alors : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$x \in X(\Omega)$	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(\{X = x\})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

(la loi d'une v.a. finie peut être représentée à l'aide d'un tableau)

Remarque (POLY)

- Dans le cas où X est une variable aléatoire discrète, nous avons vu que la loi de X est déterminée par la famille $\Big(\mathbb{P}(\{X = x\})\Big)_{x \in X(\Omega)}$.
- Inversement, si l'on se donne une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans quel cas peut-on dire que cette suite est la loi d'une v.a. discrète ?
  Évidemment, il faut : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \geqslant 0$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
  Cette condition est même suffisante.
  Plus précisément, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et une v.a. discrète X telle que $X(\Omega) \subseteq \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X = x_n\}) = p_n$.

I.5. Opérations sur les variables aléatoires discrètes réelles

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espace probabilisable.*

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathscr{A})$.

On supppose que X *et* Y *sont à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

> *Les variables* $X + Y$, $\lambda \cdot X$ *et* XY *sont des variables aléatoires réelles discrètes.*

où l'on a noté :

$$X+Y \ : \left| \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega)+Y(\omega) \end{array} \right. \qquad \lambda \cdot X \ : \left| \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \lambda X(\omega) \end{array} \right.$$

$$\text{et} \qquad XY \ : \left| \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega)\ Y(\omega) \end{array} \right.$$

Remarque

- Afin de pouvoir faire la somme, le produit, la multiplication par un scalaire de variables aléatoires, il est essentiel de considérer des variables aléatoires qui sont à valeurs dans un ensemble muni de la somme, du produit et de la multiplicaiton par un scalaire. C'est pourquoi on a considéré dans cet énoncé des variables aléatoires réelles. On aurait aussi pu considérer des variables aléatoires à valeurs complexes.
- En revanche, on ne peut faire de telles opérations pour des variables aléatoires qui prennent pour valeurs des couples d'entiers ou des ensembles (par exemple). Par exemple, considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer successivement 2 dés équilibrés dont l'un est rouge et l'autre est vert. On note X (respectivement Y) la variable alétoire qui prend pour valeur le couple des résultats des deux lancers du dé rouge (respectivement vert). Alors :
$$X(\Omega) \ = \ [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] \ = \ Y(\Omega)$$
et on ne peut multiplier les variables aléatoires X et Y.

Démonstration.

Démontrons tout d'abord que $X+Y$, λY et XY sont des variables aléatoires :

(i) $X+Y$, λX et XY sont bien des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.

(ii) Admis.

Il reste alors à démontrer que ces variables aléatoires sont discrètes, autrement dit que leur ensemble image est au plus dénombrable.
Les variables aléatoires X et Y étant discrètes, on peut noter :

× $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où $I \subseteq \mathbb{N}$,

× $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in J\}$ où $J \subseteq \mathbb{N}$.

Ainsi : $(\lambda X)(\Omega) = \{\lambda x_i \mid i \in I\}$. Comme $I \subseteq \mathbb{N}$, la variable aléatoire λX est bien discrète.
D'autre part :

$$(X+Y)(\Omega) = \{x_i + y_j \mid (i,j) \in I \times J\}$$

$$\text{et } (XY)(\Omega) = \{x_i y_j \mid (i,j) \in I \times J\}$$

Or $I \times J$ est une partie de $\mathbb{N}^2$ donc est au plus dénombrable.
Ainsi, $X+Y$ et XY sont bien des variables aléatoires discrètes. □

Remarque *(Structure de l'ensemble des variables aléatoires discrètes)*
On peut démontrer que l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel (*cf* chapitre correspondant).
L'ensemble des variables aléatoires discrètes :

× est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$,

× est stable par la loi + et la loi · (c'est l'objet du théorème précédent).

Cela permet de démontrer que l'ensemble des variables aléatoires discrète est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

I.6. Transformée d'une variable aléatoire discrète

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Soit $g : X(\Omega) \to E$ une application.

On note $g(X)$ l'application composée $g \circ X$:

$$\begin{array}{rcccc} g(X) & : & \Omega & \to & E \\ & & \omega & \mapsto & g(X(\omega)) \end{array}$$

Théorème 3.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Notons $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ ($I \subseteq \mathbb{N}$).

Soit $g : X(\Omega) \to E$ une application.

L'application $g(X)$ est une **variable aléatoire discrète** *dont la loi est donnée par :*

1) $g(X)(\Omega) = \{g(x_i) \mid i \in I\}$.

2) $\boxed{\forall y \in g(X)(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{g(X) = y\}) = \sum\limits_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}(\{X = x_i\})}$

Il est à noter que si deux v.a. X et Y ont même loi, alors leurs transformées par la même fonction g sont aussi de même loi.

$$X \sim Y \;\Rightarrow\; g(X) \sim g(Y)$$

Démonstration.

Il faut tout d'abord démontrer que $g(X)$ est une v.a.

Or, par définition : $g(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ (c'est le point ***(i)***).

Il reste à démontrer le point ***(ii)*** qui stipule que $g(X)$ est une machine à créer des événements.

1) Par définition de $g(X)$, on a : $g(X)(\Omega) = g(X(\Omega)) = \{g(x_i) \mid i \in I\}$.
Ainsi, l'ensemble image de $g(X)$ est indéxé par $I \subseteq \mathbb{N}$, ensemble au plus dénombrable. On récupère donc au passage que $g(X)$ est une v.a. discrète.

2) Soit $y \in g(X)(\Omega)$. Alors :

$$\begin{aligned} \{g(X) = y\} &= \{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) = y\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \{x_i \mid i \in I \text{ et } g(x_i) = y\}\} \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ g(x_i) = y}} \{X = x_i\} \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\{g(X) = y\}$ comme union dénombrable d'événements deux à deux incompatibles. En effet :

× $\{i \in I \mid g(x_i) = y\} \subseteq I$ est au plus dénombrable,

× $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \varnothing$ pour $i \neq j$.

On a alors :

$$\mathbb{P}(\{g(X) = y\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{i \in I \\ g(x_i) = y}} \{X = x_i\}\right) = \sum_{\substack{i \in I \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}(\{X = x_i\})$$

□

Remarque

- Il faut essentiellement retenir de ce théorème que la transformée $g(X)$ d'une variable aléatoire discrète est une variable aléatoire discrète.
- La formule théorique donnant la loi de $g(X)$ n'est pas à retenir. En revanche, il faut savoir déterminer la loi de $g(X)$ en pratique.

Étude de la loi de $Y = g(X)$ sur quelques exemples

Soit X une v.a.r. discrète.
On considère la v.a.r. discrète $Y = g(X)$ pour les applications g suivantes.

1) Si $g : x \mapsto ax + b$ où $a \neq 0$.

- $Y(\Omega) = g(X)(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \{ax + b \mid x \in X(\Omega)\}$.
- Soit $y \in Y(\Omega)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{Y = y\}) & = & \mathbb{P}(\{aX + b = y\}) \\ & = & \mathbb{P}(\{aX = y - b\}) \\ & = & \mathbb{P}\left(\left\{X = \frac{y-b}{a}\right\}\right) \end{array}$$

(on note que comme $y \in Y(\Omega)$ alors $\frac{y-b}{a} \in X(\Omega)$)
En conclusion :

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(\{Y = y\}) = \mathbb{P}\left(\left\{X = \frac{y-b}{a}\right\}\right)}$$

2) Si $g : x \mapsto x^2$.

- $Y(\Omega) = g(X)(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \{x^2 \mid x \in X(\Omega)\}$.
- Soit $y \in Y(\Omega)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{Y = y\}) & = & \mathbb{P}(\{X^2 = y\}) \\ & = & \mathbb{P}(\{X = \sqrt{y}\} \cup \{X = -\sqrt{y}\}) \end{array}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $y \neq 0$, $\{X = -\sqrt{y}\}$ et $\{X = \sqrt{y}\}$ sont incompatibles.
Ainsi, pour tout $y \in Y(\Omega) \setminus \{0\}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(\{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{X^2 = y\}) = \mathbb{P}(\{X = \sqrt{y}\}) + \mathbb{P}(\{X = -\sqrt{y}\})}$$

× si $y = 0$, on obtient $\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \mathbb{P}(\{X = 0\})$.

3) Si $g : x \mapsto |x|$.

- $Y(\Omega) = g(X)(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \{|x| \mid x \in X(\Omega)\}$.
- Soit $y \in Y(\Omega)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{Y = y\}) & = & \mathbb{P}(\{|X| = y\}) \\ & = & \mathbb{P}(\{X = y\} \cup \{X = -y\}) \end{array}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $y \neq 0$, $\{X = -y\}$ et $\{X = y\}$ sont incompatibles.
Ainsi, pour tout $y \in Y(\Omega) \setminus \{0\}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(\{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{|X| = y\}) = \mathbb{P}(\{X = y\}) + \mathbb{P}(\{X = -y\})}$$

× si $y = 0$, on obtient $\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \mathbb{P}(\{X = 0\})$.

4) Si $g : x \mapsto e^x$.

- $Y(\Omega) = g(X)(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \{e^x \mid x \in X(\Omega)\}$.
- Soit $y \in Y(\Omega)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{Y = y\}) & = & \mathbb{P}(\{e^X = y\}) \\ & = & \mathbb{P}(\{X = \ln(y)\}) \end{array}$$

(il faut noter que $\ln(y)$ est bien défini puisque $y \in Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$)
En conclusion :

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(\{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{e^X = y\}) = \mathbb{P}(\{X = \ln(y)\})}$$

II. Lois discrètes finies

II.1. Loi certaine

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **une loi certaine** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \{m\}}$

  b) $\boxed{\mathbb{P}(\{X = m\}) = 1}$
- On dira aussi que la v.a.r. X est **certaine**, égale à m.
- Si X est une v.a.r. discrète finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$:
  on dit que X suit une **loi quasi-certaine** s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathbb{P}(\{X = x_i\}) = 1$ (dans ce cas, $\mathbb{P}(\{X = x_j\}) = 0$ pour tout $j \neq i$).

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée

- On considère une expérience qui possède une ou plusieurs issues différentes dont une issue se produit avec probabilité 1.

Alors la v.a.r. X égale à m (pour un m choisi) si l'issue particulière se produit suit une loi quasi-certaine.

Exemple

1) On considère un dé truqué dont le résultat est toujours 6.
L'expérience aléatoire consiste en un lancer de ce dé.
On note X la v.a.r. donnant le résultat du dé.
X suit une loi quasi-certaine ($X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et $\mathbb{P}(\{X = 6\}) = 1$).

2) On considère une urne contenant n boules de couleurs différentes qui sont toutes numérotées par le même chiffre 7.
L'expérience consiste à effectuer un tirage dans cette urne.
On note X la v.a.r. donnant le numéro de la boule sortie.
Alors X suit la loi certaine d'ensemble image $X(\Omega) = \{7\}$.

II.2. Loi uniforme

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!]}$ ***b)*** $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{n}}$
- Plus généralement, si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, on dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![a, b]\!]}$ ***b)*** $\forall k \in [\![a, b]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{b - a + 1}}$
- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée

- On considère une expérience qui possède n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.

Alors la v.a.r. X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience, suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Exemple

1) On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
L'expérience consiste à tirer une boule.
On note X la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée.
Alors : $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$

2) On considère une pièce équilibrée.
L'expérience consiste en 1 lancer de cette pièce.
On note X la v.a.r. égale à 1 si on obtient Pile et 0 si on obtient Face.
Alors : $X \sim \mathcal{U}([\![0, 1]\!])$

II.3. Loi de Bernoulli

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi de Bernoulli** de paramètre $p \in \,]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \{0,1\}}$

  b) $\boxed{\mathbb{P}(\{X=1\}) = p}$ et $\boxed{\mathbb{P}(\{X=0\}) = 1-p} = q$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{B}(p)$ pour signifier que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée

- On considère une expérience aléatoire possédant deux issues (qui ne sont pas forcément équiprobables). L'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité p ; l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1-p$.

Alors la v.a.r. X égale à 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec (*i.e.* calculant le nombre de succès) suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemple

1) On considère une pièce de monnaie donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$.
L'expérience consiste en 1 lancer de cette pièce de monnaie.
Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.
On note X la v.a.r. égale à 1 si on obtient Pile et à 0 si on obtient Face.

- $X(\Omega) = \{0,1\}$.
- $\mathbb{P}(\{X=1\}) = p$ et $\mathbb{P}(\{X=0\}) = 1-p$.

Ainsi $X \sim \mathcal{B}(p)$.

2) On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
L'expérience consiste à tirer une boule.
Ainsi : $\Omega = \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_{r+v}\}$ *(on numérote chacune des boules).*
On note X la v.a.r. égale à 1 si on tire une boule rouge et 0 si on tire une boule verte.
Alors : $X \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$.

Remarque

- Généralement, les cas $p = 0$ et $p = 1$ sont écartés : ils correspondent à une loi quasi-certaine.
- Si $p = \dfrac{1}{2}$, la loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ coïncide avec la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 0,1 \rrbracket)$.
- Si X suit une loi de Bernoulli, alors $X(\Omega) = \{0,1\}$. On en déduit que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $X^r = X$ (c'est notamment vrai pour le cas $r = 2$).
- Considérons la v.a.r. X dont la loi est définie par :

  a) $X(\Omega) = \{-1,1\}$.

  b) $\mathbb{P}(\{X=1\}) = p$ et $\mathbb{P}(\{X=-1\}) = 1-p$.

  Alors X **ne suit pas** une loi de Bernoulli. Déjà, $X(\Omega) \neq \{0,1\}$.
  La v.a.r. X peut-être interprétée de la manière suivante. Si on obtient Pile (succès), la banque verse 1, si on obtient Face, on verse 1 à la banque.
  Autrement dit, X est le gain dans un jeu de Pile ou Face.

  Par contre, la v.a.r. $U = \dfrac{X+1}{2}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

II.4. Loi binomiale

Définition

- On dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi binomiale** de paramètre (n,p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![0,n]\!]}$

  b) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(\{X=k\}) = \binom{n}{k} \, p^k (1-p)^{n-k}}$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ pour signifier que X suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée

- On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession de n épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1-p$.
- Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer n épreuves de Bernoulli indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres) et de même paramètre de succès p.

Alors la v.a.r. donnant le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

Exemple

1) On considère une pièce de monnaie donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$.
L'expérience consiste en n lancers consécutifs de cette pièce de monnaie.
Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^n$.
On note X la v.a.r. égale au nombre de Pile obtenus lors de l'expérience.
Démontrons que X suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

a) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

- Déterminons le nombre de n-tirages réalisant $\{X=k\}$.
  Un n-tirage réalisant $\{X=k\}$ est un n-uplet contenant k Pile. Il est entièrement déterminé par :
  - × la position des k Pile : $\binom{n}{k}$ possibilités.

  Il y a donc $\binom{n}{k}$ tels tirages.
- Déterminons maintenant la probabilité d'apparition d'un tel n-tirage :
  - × à chaque lancer, Pile est obtenu avec probabilité p et Face est obtenu avec probabilité $1-p=q$.
  - × or un tel n-tirage contient exactement k Pile et $n-k$ Face.

  La probabilité d'apparition d'un tel n-tirage est donc : $p^k \, (1-p)^{n-k}$.

On en déduit que : $\mathbb{P}(\{X=k\}) = \binom{n}{k} \, p^k \, (1-p)^{n-k}$.

2) On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
L'expérience consiste à tirer **successivement** n boules **avec remise**.
On note X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges tirées.
Alors : $X \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{r}{r+v}\right)$

Cet exemple permet de retrouver la formule du binôme de Newton.
Comme $(\{X=k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est le sce associé à X :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\}) = 1 \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{r}{r+v}\right)^k \left(\frac{v}{r+v}\right)^{n-k} = 1.$$

On en conclut : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, r^k \, v^{n-k} = (r+v)^n}$

II.5. Loi hypergéométrique (BONUS)

Définition

- Soit $(N, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $1 \leqslant n \leqslant N$ et soit $p \in \,]0,1[$ $(q = 1-p)$.
- On dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi hypergéométrique** de paramètre (N, n, p) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![\max(0, n-Nq), \min(n, Np)]\!]}$

  b) $\forall k \in [\![\max(0, n-Nq), \min(n, Np)]\!]$,

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{\binom{Np}{k}\ \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$ pour signifier que X suit la loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p).

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée

- On considère une urne qui contient a boules blanches et b boules noires. L'expérience consiste à tirer **simultanément** n boules dans l'urne (on suppose $n \leqslant a+b$).
  On note X la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues.
  Alors : $X \sim \mathcal{H}\left(a+b, n, \dfrac{a}{a+b}\right)$.

  Autrement dit, on a :

$$\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{\binom{a}{k}\ \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

  (ici, $N = a+b$ et $p = \dfrac{a}{a+b}$ d'où $Np = a$ et $Nq = b$)

- On considère une urne qui contient a boules blanches et b boules noires. L'expérience consiste à tirer **successivement** et **sans remise** n boules dans l'urne (on suppose $n \leqslant a+b$).
  On note X la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues.
  Alors : $X \sim \mathcal{H}\left(a+b, n, \dfrac{a}{a+b}\right)$

  Autrement dit, pour ces deux expériences a priori différentes, la v.a.r. donnant le nombre de boules blanches suit la même loi hypergéométrique.

Remarque

- On retrouve la formule de Vandermonde.
  Considérons l'une ou l'autre des expériences précédentes.
  On suppose de plus que $a \geqslant n$ et $b \geqslant n$ de sorte que :
  $[\![\max(0, n-Nq), \min(n, Np)]\!] = [\![0, n]\!]$.

  Comme $(\{X = k\})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est le système complet d'événements associé à X :
  $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\}) = 1$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\binom{a}{k}\ \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} = 1$.

  On en conclut : $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}}$

Démonstration.

1) X admet une variance (et donc une espérance) car c'est une v.a.r. finie.

2) Pour plus de simplicité, on se place dans le cas où $n \leqslant Np$ et $n \leqslant Np$.
On a ainsi $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
(c'est le cas lorsque le nombre n de boules tirées est inférieur au nombre a de boules blanches et au nombre b de boules noires)

- $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\ \mathbb{P}(\{X = x\}) = \sum\limits_{k=0}^{n} k \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum\limits_{k=1}^{n} k \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Or, pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a : $k\dbinom{Np}{k} = Np\dbinom{Np-1}{k-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{Np-1}{k-1}\binom{Nq}{n-k} \\
&= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{Np-1}{k}\binom{Nq}{(n-1)-k} \\
&= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \binom{Np-1+Nq}{n-1} = \frac{Np}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1}
\end{aligned}$$

car : $Np - 1 + Nq = N(p+q) - 1 = N - 1$.
Enfin, comme : $n\dbinom{N}{n} = N\dbinom{N-1}{n-1}$, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = p\,\frac{N\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = p\,\frac{n\cancel{\binom{N}{n}}}{\cancel{\binom{N}{n}}} = n\,p$$

- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. On commence donc par calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
  Pour ce faire, on remarque que : $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$.
  Afin de déterminer $\mathbb{E}(X^2)$, on commence par le calcul de $\mathbb{E}(X(X-1))$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x(x-1)\,\mathbb{P}(\{X = x\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}
\end{aligned}$$

Or, pour $k \in [\![2,n]\!]$:

$$k\,(k-1)\binom{Np}{k} = Np(k-1)\binom{Np-1}{k-1} = Np\,(Np-1)\binom{Np-2}{k-2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \frac{Np\,(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{n} \binom{Np-2}{k-2}\binom{Nq}{n-k} \\
&= \frac{Np\,(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{Np-2}{k}\binom{Nq}{(n-2)-k} \\
&= \frac{Np\,(Np-1)}{\binom{N}{n}} \binom{Np-2+Nq}{n-2} \\
&= \frac{Np\,(Np-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2}
\end{aligned}$$

D'autre part, comme :

$$n\,(n-1)\binom{N}{n} = N\,(n-1)\binom{N-1}{n-1} = N\,(N-1)\binom{N-2}{n-2}$$

on obtient :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{\cancel{N}p\,(Np-1)}{\cancel{\binom{N}{n}}}\ \frac{n(n-1)\cancel{\binom{N}{n}}}{\cancel{N}\,(N-1)}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \frac{np}{N-1}\,(Np-1)\,(n-1) + np - n^2\,p^2 \\
&= \frac{np}{N-1}\,((Np-1)\,(n-1) + (N-1) - np\,(N-1)) \\
&= \frac{np}{N-1}\,(\cancel{Np}n - Np - n + \cancel{1} + N - \cancel{1} - \cancel{np}N + np) \\
&= \frac{np}{N-1}\,((N-n) - p\,(N-n)) \\
&= \frac{np\,(N-n)}{N-1}\,(1-p) \\
&= n\;p\;q\;\frac{N-n}{N-1}
\end{aligned}$$

□

III. Lois discrètes infinies

III.1. Loi géométrique

III.1.a) Définition

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi géométrique** de paramètre $p \in \,]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

  b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{P}(\{X = k\}) = p\;(1-p)^{k-1}}$ avec $q = 1-p$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{G}(p)$ pour signifier que X suit la loi géométrique de paramètre p.

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée

- On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1-p$.
- Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres) et de même paramètre de succès p.

Alors la v.a.r. donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p.

Exemple

1) On considère une pièce de monnaie déséquilibrée donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$.
L'expérience consiste en n lancers consécutifs de cette pièce de monnaie.
Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^{\mathbb{N}^*}$.
On note X la v.a.r. égale au rang d'apparition du premier Pile obtenu au cours de l'expérience. Alors : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Dans la suite, on considère les événements :

× P_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer »,

× F_i : « obtenir Face au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

Démontrons que X suit la loi géométrique de paramètre p.

a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\{X = k\} \ = \ F_1 \ \cap \ F_2 \ \cap \ \ldots \ \cap \ F_{k-1} \ \cap \ P_k$$

Les lancers étant indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = k\}) &= \mathbb{P}(F_1 \ \cap \ F_2 \ \cap \ \ldots \ \cap \ F_{k-1} \ \cap \ P_k) \\ &= \mathbb{P}(F_1) \ \times \ \mathbb{P}(F_2) \ \times \ \ldots \ \times \ \mathbb{P}(F_{k-1}) \ \times \ \mathbb{P}(P_k) \\ &= p \ (1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

2) On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
L'expérience consiste au tirage infini d'une boule avec remise.
On note X la v.a.r. donnant le rang d'apparition de la première boule rouge. Alors : $X \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$

III.1.b) Caractérisation de la loi géométrique

Théorème 4.

Soit X une v.a.r. discrète infinie telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$ ($p \in \,]0,1[$).

1) $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(\{X > k\}) \ = \ (1-p)^k}$

2) $\boxed{\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \ \mathbb{P}(\{X > k+\ell\}) \ = \ \mathbb{P}(\{X > k\}) \times \mathbb{P}(\{X > \ell\})}$

Démonstration.
Soit $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.

1) • On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}(\{X > k\}) \ = \ 1 - \mathbb{P}(\overline{\{X > k\}}) \ = \ 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant k\})$$

• Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $\{X \leqslant k\} \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{X = i\}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X \leqslant k\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{X = i\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{X = i\}) \qquad \textit{(par incompatibilité)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} p \ q^{i-1} \ = \ p \sum_{i=0}^{k-1} q^i \\ &= p \ \frac{1-q^k}{1-q} \ = \ 1 - q^k \end{aligned}$$

Enfin : $\mathbb{P}(\{X > k\}) \ = \ 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant k\}) \ = \ 1 - (1-q^k) \ = \ q^k$.

2) D'après le point précédent :

$$\mathbb{P}(\{X > k+\ell\}) \ = \ q^{k+\ell} \ = \ q^k \times q^\ell \ = \ \mathbb{P}(\{X > k\}) \times \mathbb{P}(\{X > \ell\}) \ \square$$

Remarque
Comme $\{X > k+\ell\} \subseteq \{X > k\}$, on a :

$$\mathbb{P}_{\{X>k\}}(\{X > k+\ell\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X > k+\ell\})}{\mathbb{P}(\{X > k\})} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbb{P}(\{X > \ell\})$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $X > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est **sans mémoire**.

Remarque

- Dans un contexte où X est un variable aléatoire mesurant une durée de vie (durée de vie d'une cellule, durée de fonctionnement d'un composant électronique, nombre de cycle de charge/décharge autorisé par une batterie), on introduit souvent la fonction :

$$S : t \mapsto \mathbb{P}(\{X > t\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant t\}) = 1 - F_X(t)$$

  Dans ce cas, $S(t) = \mathbb{P}(\{X > t\})$ représente la probabilité que l'objet (ou l'individu) considéré soit encore en vie après une durée t.

  Dans le cas d'un phénomène à durée de vie continue (durée de vie d'une cellule), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X à densité.
  Dans le cas d'un phénomène à durée de vie discrète (nombre de cycles d'une batterie), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X discrète.

- Considérons la propriété d'absence de mémoire dans ce contexte.

$$\mathbb{P}_{\{X>k\}}(\{X > k + \ell\}) = \mathbb{P}(\{X > \ell\})$$

  Considérons que X compte la durée de fonctionnement d'un composant avant une panne. Alors cette propriété signifie que la durée de vie restante d'un objet est indépendante de la durée de vie écoulée de l'objet (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés. C'est pourquoi la durée de vie d'un composant est souvent modélisée par une v.a.r. qui suit loi exponentielle qui est, elle aussi, sans mémoire (c'est même une propriété qui caractérise la loi exponentielle).

Théorème 5. *(caractérisation de la loi géométrique)*

Soit X une v.a.r. discrète.

Soit $p \in \,]0, 1[$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \times\ X \text{ est une v.a.r. à valeurs entières} \\ \times\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) = (1-p)^k \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad X \sim \mathcal{G}(p)}$$

Remarque

- Le sens réciproque n'est autre que le résultat du théorème 4, résulat qu'il est important de connaître.
- Le sens direct n'est pas présent dans le programme PSI. Cela signifie qu'il ne peut être utilisé directement dans un sujet mais il peut donner lieu à des questions permettant sa démonstration.

III.2. Loi de Poisson

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$

  b) $\forall k \in \mathbb{N},\ \boxed{\mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}}$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ pour signifier que X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Exemple

Il est possible d'introduire la loi de Poisson comme loi limite.
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$. On a alors, pour tout $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_n = k\}) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \, \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \, \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous aux termes de ce produit.

- $\dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{n^k} = 1$
  En effet, le numérateur apparaît comme produit de k éléments qui sont tous équivalents, lorsque n tend vers $+\infty$, à n.
- Notons $u_n = \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)\right)$.

  Or : $\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n} \dfrac{-\lambda}{\cancel{n}} = -\lambda$.

  (c'est une instance de la propriété : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$*)*

  D'où : $\ln(u_n) \to -\lambda$ et $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}$.
- Enfin, comme $1 - \dfrac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \dfrac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$

On en déduit : $\boxed{\mathbb{P}(\{X_n = k\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(\{X = k\})}$
où X est une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque

- Si X une v.a.r. tel ques $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et que les contraintes précédentes sur n et p sont vérifiées, on utilise alors l'approximation :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \mathbb{P}(\{X = k\}) \simeq e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$$

- La loi de Poisson est généralement utilisée comme loi de v.a.r. consistant à calculer le nombre d'événements d'un certain type se produisant sur un laps de temps donné. Cette modélisation est valide si :
  1) les événements se produisant sont indépendants,
  2) la probabilité d'apparition du phénomène dans un laps de temps donné T ne dépend que de cette durée T.

  Le résultat précédent démontre que l'on peut approcher la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Cette dernière loi est utilisée pour compter le nombre de succès (c'est le rôle de la v.a.r. X_n) au cours d'une expérience consistant à la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $p = \frac{\lambda}{n}$. L'approximation est d'autant meilleure que n est grand (et donc p petit). C'est pourquoi on qualifie parfois la loi de Poisson de « loi des événements rares ».
- Illustrons enfin ce résultat sur un exemple.
  Notons X une v.a.r. telle que : $X \sim \mathcal{B}(100, 0.05)$.
  - Par définition de la loi binomiale :

  $$\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \binom{100}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^{98} \simeq 0.0812$$

  - Comme $n \geqslant 30$ et $p = 0.05 \leqslant 0.1$, on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$. On obtient alors :

  $$\mathbb{P}(\{X = 2\}) \simeq \frac{5^2}{2!} e^{-5} \simeq 0.0842$$

  - Dans la pratique, on considère qu'on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$ lorsque $n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0,1$.