CH XIII (2/2) : Endomorphismes d'un espace euclidiens - Endomorphismes autoadjoints

I. Endomorphismes auto-adjoints

I.1. Notion d'endomorphisme auto-adjoint

I.1.a) Définition

Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que f est **auto-adjoint** (ou **symétrique**) si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle \ = \ \langle x, f(y)\rangle$$

- On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.

Remarque

- Dans un espace euclidien, on peut démontrer que pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle \ = \ \langle x, g(y)\rangle$$

Dans ce cas, on dit que f et g sont adjoints l'un de l'autre ou tout simplement que g est l'adjoint de f. On note généralement f^* l'adjoint d'un endomorphisme f.

- On comprend dès lors beaucoup mieux le terme d'endomorphisme « auto-adjoint ». Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est auto-adjoint s'il est son propre adjoint.

Exemple

Considérons $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

- L'endomorphisme $0_{\mathscr{L}(E)}$ est auto-adjoint. Cela démontre déjà que le caractère auto-adjoint n'implique pas la propriété d'isométrie ($\mathscr{S}(E) \not\subset \mathrm{O}(E)$).
- L'endomorphisme id_E est auto-adjoint.
- De manière générale, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $\lambda \cdot \mathrm{id}_E$ est auto-adjoint (si $\lambda \neq \pm 1$, on démontre de nouveau : $\mathscr{S}(E) \not\subset \mathrm{O}(E)$).
- Les puissances d'un endomorphisme auto-adjoint sont auto-adjointes.

Exercice

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $(f,g) \in \Big(\mathscr{S}(E)\Big)^2$.

Démontrer : $f \circ g \in \mathscr{S}(E) \ \Leftrightarrow\ f\circ g = g \circ f$.

I.2. Lien entre endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Théorème 1.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

On note $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. $\boxed{\textit{L'endomorphisme } f \textit{ est auto-adjoint} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{La matrice } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \textit{ est symétrique}}$

(f est auto-adjoint si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormée est symétrique réelle)

2. a) *L'application Φ suivante :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. Elle induit de plus un ismorphisme de $\mathscr{S}(E)$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n.

b) $\boxed{\dim\big(\mathscr{S}(E)\big) = \dfrac{n\,(n+1)}{2}}$

Démonstration.

1. ($\Rightarrow$) Supposons : $f \in \mathscr{S}(E)$.

- Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors pour tout $u \in E$:

$$u \ = \ \langle u, e_1 \rangle \ \cdot \ e_1 \ + \ \ldots \ + \ \langle u, e_n \rangle \ \cdot \ e_n$$

En particulier, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\boxed{f\left(e_j\right) \ = \ \langle f\left(e_j\right), e_1 \rangle \ \cdot \ e_1 \ + \ \ldots \ + \ \langle f\left(e_j\right), e_n \rangle \ \cdot \ e_n}$$

- Rappelons par ailleurs : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1)\big) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_n)\big)\Big)$.
Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & \left(\left\langle f\left(e_j\right), e_i \right\rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \\ & = & \left(\left\langle e_j, f\left(e_i\right) \right\rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \textit{(car } f \in \mathscr{S}(E)\textit{)} \\ & = & \left(\left\langle f\left(e_i\right), e_j \right\rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \textit{(par symétrie du produit scalaire)} \\ & = & \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \right)^t & \end{array}$$

□

Remarque

1. Pour toute matrice symétrique $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S est auto-adjoint (relativement au produit scalaire canonique).
2. On retrouve que les homothéties et les projections/symétries orthogonales sont des endomorphismes auto-adjoints.

I.3. Exemple d'endomorphismes auto-adjoints : les projecteurs et symétries orthogonales

I.3.a) Rappel sur les projecteurs et les symétries

Théorème 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que F et G sont des sev supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$.

$\hookrightarrow$ pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que :

$$u = u_F + u_G$$

- *On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application :*

$$p \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F \end{array}$$

Dans ce cas :

$\times$ $\begin{array}{rcl} F & = & \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \\ & = & \{x \in E \mid p(x) = x\} \\ & = & \mathrm{Im}(p) \end{array}$

$\times$ $\begin{array}{rcl} G & = & \mathrm{Ker}(p) \\ & = & \{x \in E \mid p(x) = 0_E\} \end{array}$

- *On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application :*

$$s \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F - u_G \end{array}$$

Dans ce cas :

$\times$ $\begin{array}{rcl} F & = & \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \\ & = & \{x \in E \mid s(x) = x\} \end{array}$

$\times$ $\begin{array}{rcl} G & = & \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \\ & = & \{x \in E \mid s(x) = -x\} \end{array}$

- *Caractérisation : pour tout $p \in \mathscr{L}(E)$ et tout $s \in \mathscr{L}(E)$:*

$$\boxed{p \textit{ est un projecteur } \Leftrightarrow \ p \circ p = p} \qquad \boxed{s \textit{ est une symétrie } \Leftrightarrow \ s \circ s = \mathrm{id}_E}$$

- *On appelle* **projecteur orthogonal sur** F *le projecteur sur* F *parallèlement à* $F^{\perp}$. *Ainsi, pour tout projecteur* $p \in \mathscr{L}(E)$ *:*

$$\begin{array}{ll} & \textit{L'application } p \textit{ est un projecteur orthogonal} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Im}(p) \textit{ et } \mathrm{Ker}(p) \textit{ sont orthogonaux} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathrm{Ker}(p), \forall y \in \mathrm{Im}(p), \langle x, y \rangle = 0 \end{array}$$

- *On appelle* **symétrie orthogonale par rapport à** F *la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* $F^{\perp}$.
  Ainsi, pour toute symétrie $s \in \mathscr{L}(E)$ *:*

$$\begin{array}{ll} & \textit{L'application } s \textit{ est une symétrie orthogonale} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}\left(s - \mathrm{id}_E\right) \textit{ et } \mathrm{Ker}\left(s + \mathrm{id}_E\right) \textit{ sont orthogonaux} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathrm{Ker}\left(s - \mathrm{id}_E\right), \forall y \in \mathrm{Ker}\left(s + \mathrm{id}_E\right), \langle x, y \rangle = 0 \end{array}$$

I.3.b) Les projecteurs / symétries auto-adjoint(e)s sont les projecteurs / symétries orthogonal(e)s

Théorème 3.
Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ *un espace euclidien.*
Notons $n = \dim(E)$. *On suppose* $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de* E.
Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ *un projecteur et soit* $s \in \mathscr{L}(E)$ *une symétrie.*

1.

$$\begin{array}{ll} & \textit{L'application } p \textit{ est un projecteur orthogonal} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)\right)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) \\ \Leftrightarrow & \textit{L'appliaction } p \textit{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ll} & \textit{L'application } s \textit{ est une symétrie orthogonale} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)\right)^2 = I_n \\ \Leftrightarrow & \textit{L'application } s \textit{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{array}$$

I.4. Structure de l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints

Théorème 4.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

- *L'ensemble $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.*

I.5. Théorème spectral

I.5.a) Éléments propres d'un endomorphisme auto-adjoint

Théorème 5.
Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint de E.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. $\boxed{\begin{array}{ccc} F \text{ est un sous-espace} & & F^{\perp} \text{ est un sous-espace} \\ \text{vectoriel de } E \text{ stable par } f & \Leftrightarrow & \text{vectoriel de } E \text{ stable par } f \end{array}}$

2. *Les valeurs propres (complexes) de f sont toutes réelles.*

En particulier, si $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, alors tout endomorphisme auto-adjoint f admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. *Les sous-espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux.*

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à S. Autrement dit :

$$\begin{array}{cccc} f & : & X & \mapsto & SX \\ & & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

1. $\boxed{\begin{array}{ccc} F \text{ est un sous-espace vectoriel de} & & F^{\perp} \text{ est un sous-espace vectoriel} \\ \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ stable par } f & \Leftrightarrow & \text{de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ stable par } f \end{array}}$

2. *Les valeurs propres (complexes) de S sont toutes réelles.*

En particulier, toute matrice symétrique réelle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. *Les sous-espaces propres réels de S sont 2 à 2 orthogonaux (pour le produit scalaire canonique).*

Démonstration.

1. $(\Rightarrow)$ Supposons que F est stable par f.
Démontrons que $F^\perp$ est stable par f. Il s'agit de démontrer :

$$\forall x \in F^\perp, f(x) \in F^\perp$$

Soit $x \in F^\perp$. Démontrons $f(x) \in F^\perp$. Il s'agit donc de démontrer : $\forall y \in F,\ \langle f(x), y\rangle = 0$.

Soit $y \in F$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \langle f(x), y\rangle & = & \langle x, f(y)\rangle \quad \textit{(car } f \textit{ est un endomorphisme auto-adjoint)} \\ & = & 0 \quad \textit{(car } x \in F^\perp \textit{ et } f(y) \in F \textit{ puisque } y \in F \textit{ et } F \textit{ stable par } f\textit{)} \end{array}$$

D'où : $f(x) \in F^\perp$.

$(\Rightarrow)$ On suppose $G = F^\perp$ stable par f.
D'après le point précédent, $G^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp = F$ est stable par f.

2. L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre complexe λ (car χ_f, polynôme de degré $\dim(E)$, possède au moins une racine complexe).
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.
Notons alors $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ (et $\overline{X}$ la matrice colonne conjuguée). Alors :

× d'une part :

$$\begin{array}{rcl} \overline{X}^T S\, X & = & \overline{X}^T (\lambda X) \quad \textit{(car } SX = \lambda X \textit{ par définition de } X\textit{)} \\ & = & \lambda\, \overline{X}^T X \end{array}$$

× d'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \overline{X}^T S\, X & = & \overline{X}^T S^T X \quad \textit{(car } S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \textit{ est symétrique)} \\ & = & \left(S\,\overline{X}\right)^T X \\ & = & \left(\overline{S\,X}\right)^T X \quad \textit{(car } S = \overline{S} \textit{ puisque } S \textit{ est une matrice réelle)} \\ & = & \left(\overline{\lambda X}\right)^T X \\ & = & \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X \end{array}$$

On en conclut : $\boxed{\lambda\, \overline{X}^T X = \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X}$ ou encore : $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) \overline{X}^T X = 0$.
De plus :

$$\begin{array}{rcl} \overline{X}^T X & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, x_i \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} |\, x_i\,|^2 \\ & > & 0 \quad \textit{(comme } X \textit{ est un vecteur propre, } X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \textit{ et l'un au moins de ses coefficients est non nul)} \end{array}$$

Donc : $\overline{\lambda} - \lambda = 0$. Ainsi : $\overline{\lambda} = \lambda$ c'est-à-dire : $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et soit $y \in \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \langle x, y\rangle & = & \langle f(x), y\rangle \\ & = & \langle x, f(y)\rangle \\ & = & \mu \langle x, y\rangle \end{array}$$

Ainsi : $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$. Donc : $\langle x, y\rangle = 0$ (car $\lambda \neq \mu$).
Les sous-espaces propres de f sont donc orthogonaux. □

I.5.b) Théorème spectral

Théorème 6.
Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ *un espace euclidien.*

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ *un endomorphisme auto-adjoint.*

Soit $\mathscr{B}_0$ *une base orthonormée de* E.

Alors, f *est diagonalisable (dans* $\mathbb{R}$*) dans une base orthonormée.*
Autrement dit, il existe une BON $\mathscr{B}$ *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ *est une matrice diagonale réelle.*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) \ = \ P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_0}} \qquad \textit{avec } P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe :
$\times$ *une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,*
$\times$ *une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,*
telles que : $\boxed{S = P\, D\, P^T}$.

Remarque
Si $f \in \mathscr{S}(E)$ est un endormorphisme auto-adjoint, alors f est ortho-diagonalisable.
Cela signifie qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale réelle. Cette base est, par définition, constituée de vecteurs propres de f. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est associé à une valeur propre notée λ_i (il est à noter que ces valeurs propres ne sont pas forcément distinctes).

Démonstration.
On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: pour tout espace vectoriel E de dimension n, toute application $f \in \mathscr{S}(E)$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

▶ **Initialisation** : évident.

▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (c'est-à-dire pour tout espace vectoriel E de dimension $n+1$, tout $f \in \mathscr{S}(E)$ est diagonalisable en base orthonormée).
Soit E un espace vectoriel tel que : $\dim(E) = n+1$. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

- Comme f est auto-adjoint, alors il admet une valeur propre réelle λ.
  Soit a un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
- On sait que :
  $\times$ l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(a)$ est stable par f,
  $\times$ l'endomorphisme f est auto-adjoint.
  On en déduit que $\Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^{\perp}$ est stable par f.
  On peut ainsi définir $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^{\perp}$.
- L'endomorphisme $\tilde{f}$ est auto-adjoint pour le produit scalaire induit sur $\Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^{\perp}$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^{\perp}$ constituée de vecteurs propres de $\tilde{f}$.
- La famille $(e_1, \ldots, e_n, \frac{a}{\|a\|})$ est alors une base orthonormale de E, et est constituée de vecteurs propres de f.

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$. □

Exercice
Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $n = \dim(E)$ et on suppose $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f, présentes avec leur multiplicité.
Démontrer : $\forall x \in E,\ \lambda_1\ \|x\|^2 \ \leqslant\ \langle u(x), x \rangle \ \leqslant\ \lambda_n\ \|x\|^2$.

I.6. Endomorphisme auto-adjoint positif et défini positif

I.6.a) Définition

Définition

A) Cas des endomorphismes
Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

- On dit que f est :
  $\times$ **positif** si : $\boxed{\forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle \ \geqslant\ 0}$
  $\times$ **défini positif** si : $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle \ \geqslant\ 0 \\ \forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E \end{array} \right.}$
- On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs.
- On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs.

B) Cas des matrices carrées

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est :
  - × **positive** si : $\boxed{\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geqslant 0}$
  - × **définie positive** si :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X \geqslant 0 \\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{array}\right.}$$

- On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
- On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

C) Lien entre les deux

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

f auto-adjoint positif $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice symétrique positive

f auto-adjoint défini positif $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice symétrique définie-positive

I.6.b) Caractérisation du caractère (défini) positif par signe des valeurs propres

Théorème 7.

A) *Cas des endomorphismes*

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

1. $\boxed{\textit{L'endomorphisme } f \textit{ est positif} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\textit{L'endomorphisme } f \textit{ est défini positif} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est défini-positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

B) *Cas des matrices carrées*

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. $\boxed{\textit{La matrice } A \textit{ est positive} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\textit{La matrice } A \textit{ est définie positive} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration.

1. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- Comme f est auto-adjoint positif : $\langle x, f(x)\rangle \geqslant 0$.
- De plus : $\langle x, f(x)\rangle = \langle x, \lambda\, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$.

On en déduit : $\lambda \|x\|^2 \geqslant 0$. Or, comme $x \neq 0_E$ (c'est un vecteur propre de f), alors : $\|x\| \neq 0$.
Finalement :

$$\lambda \|x\|^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0 \quad \text{donc} \quad \lambda \geqslant 0$$

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

- Notons λ_1, ..., λ_n les valeurs propres (pas forcément distinctes) de l'endomorphisme f.
Comme $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
- Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint, alors, par théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de f. Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
- Soit $x \in E$. Alors il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.
Par linéarité de f :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \cdot e_i$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\Big\langle x, f(x) \Big\rangle &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j \cdot e_j \Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j \cdot e_j \Big\rangle && \textit{(par linéarité à gauche de } \langle \cdot, \cdot \rangle\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j \Big\langle e_i, e_j \Big\rangle \right) && \textit{(par linéarité à droite de } \langle \cdot, \cdot \rangle\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j\ \delta_{i,j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\ (\ \lambda_i\, x_i\ ) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ (\ x_i\ )^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.

2. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme auto-adjoint f est défini positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- En particulier, l'endomorphisme auto-adjoint f est positif. Comme vu dans le point ***1.*** :

$$\langle x, f(x)\rangle = \langle x, \lambda\, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geqslant 0$$

- Ici, on suppose que l'endomorphisme auto-adjoint f est défini positif. Ainsi :

$$\langle x, f(x)\rangle > 0 \qquad \textit{(puisque } x \neq 0_E\textit{)}$$

Finalement :

$$\lambda \|x\|^2 > 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0$$

On en conclut : $\lambda > 0$.

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.
On reprend les notations du point ***1*** :

- $\times$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (pas forcément distinctes) de f,
- $\times$ $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée constituée de vecteurs propres de f et telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

- Comme : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$ alors d'après ***1.***, on sait déjà que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.
- Démontrons qu'il est défini-positif. Soit $x \in E$.
  Supposons : $\langle x, f(x)\rangle = 0$. Démontrons : $x = 0_E$.
  - $\times$ Comme $x \in E$, alors il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.
    Alors, comme en ***1.*** : $\langle x, f(x)\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x_i\right)^2$.
  - $\times$ Or, par hypothèse : $\langle x, f(x)\rangle = 0$. Donc : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x_i\right)^2 = 0$.
    Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \left(x_i\right)^2 \geqslant 0$, on en déduit :
    $$\begin{array}{lll} & \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \left(x_i\right)^2 = 0 & \\ \text{donc} & \forall i \in [\![1, n]\!],\ \left(x_i\right)^2 = 0 & \textit{(car } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i > 0 \textit{ puisque } \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{donc} & \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0 & \end{array}$$
    Finalement : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i = 0_E$.

  L'endomorphisme auto-adjoint f est donc défini positif. □

Exemple

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T A$ et $A A^T$ sont symétriques positives.
- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T A$ et $A A^T$ sont symétriques définies positives.

`À RETENIR` (aspect théorique)

- Cet exercice est une excellente illustration de beaucoup d'exercices sur les endomorphismes auto-adjoints. Plus précisément :
  - $\times$ pour le sens direct, on doit démontrer une propriété sur le spectre de f c'est-à-dire sur chacune des valeurs propres λ de f. Pour ce faire, on introduit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ et on travaille sur ce vecteur propre.
  - $\times$ pour le sens réciproque, on doit démontrer une propriété vérifiée pour tout $x \in E$. Pour ce faire, comme f est auto-adjoint, on se sert du fait que f est ortho-diagonalisable afin de pouvoir travailler dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f.
    On rédigera ce point comme suit :

> - Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (pas forcément distinctes) de l'endomorphisme f.
> - Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint, alors, par théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de f.
>   Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

Il faut retenir ces deux idées fondamentales dans les exercices sur les endomorphismes auto-adjoints.

À RETENIR (aspect calculatoire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E.
On introduit les notations $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (valeurs propres pas forcément distinctes de f) et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée constituée de vecteurs propres de f.

- Dans les exercices, il est classique d'avoir à calculer la quantité $\langle x, f(x)\rangle$ (où $x \in E$). Avec les notations précédentes et en notant $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{rcll}
\Big\langle x, f(x) \Big\rangle & = & \Big\langle \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \cdot e_j \Big\rangle & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Big\langle e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \cdot e_j \Big\rangle & \textit{(par linéarité à gauche de } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \, \Big\langle e_i, e_j \Big\rangle \right) & \textit{(par linéarité à droite de } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \, \delta_{i,j} \right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ (\ \lambda_i \, x_i \ ) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \ (\ x_i \ )^2 \ \geqslant \ 0 &
\end{array}$$

On retiendra cette expression : $\boxed{\forall x \in E, \ \langle x, f(x) \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \ \big(x_i\big)^2}$

- On peut aussi effectuer ce calcul comme suit :

$$\begin{array}{rcll}
\langle x, f(x) \rangle & = & \langle x, f(x) \rangle_{\mathscr{B}} & \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est une BON)} \\
& = & (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x))^T \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(x)\big) & \\
& = & (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x))^T \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) & \\
& = & \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \textit{(par définition de } \mathscr{B}\textit{, base de diagonalisation de l'endomorphisme } f\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \ \big(x_i\big)^2 &
\end{array}$$

- Ce dernier calcul met en avant un calcul souvent réalisé lorsque l'exercice demande l'étude d'une matrice symétrique réelle S (plutôt qu'un endomorphisme auto-adjoint).
Lorsque c'est le cas, il est classique d'effectuer le calcul $X^T \, S \, X$ (pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

  Comme S est une matrice symétrique réelle, S est ortho-diagonalisable. Autrement dit, il existe :
  - × $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,
  - × $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

  telles que $S = PDP^T$. Alors :

$$\begin{array}{rcll}
X^T \, S \, X & = & X^T \Big(PDP^T\Big) X & \\
& = & \Big(P^T X\Big)^T \ D \ P^T X & \\
& = & \Big(Y\Big)^T \ D \ Y & \textit{(en notant } Y \textit{ le vecteur tel que } X = PY\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \ \big(y_i\big)^2 & \textit{(en notant } (y_1, \ldots, y_n) \textit{ les coefficients de } Y\textit{)}
\end{array}$$