

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien

Rappels

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si :
 - × E un espace vectoriel **RÉEL**.
 - × E est de dimension finie.
 - × $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.*(un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie)*
- Un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est toujours muni d'une norme (dite euclidienne) issue du produit scalaire. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

En particulier : $\boxed{\forall x \in E, \|x\|^2 = \langle x, x \rangle}$

- Tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. Pour ce faire, il suffit de choisir une base $\mathcal{B}$ de E et de munir E du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}} &: E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) \end{aligned}$$

On remarque au passage que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$.

- Inversement, tout espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ admet une base orthonormée. Pour obtenir une telle base, il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E . Rappelons de plus que si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale : $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$.
- Les bases orthonormées sont des bases adaptées aux calculs.
Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ alors :

$$\boxed{\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \cdot e_k}$$

Cette égalité permet d'affirmer que dans **TOUTE** base orthonormée $\mathcal{B}$:

- × le vecteur x a pour coordonnées $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{R}^n$.

$$\times \quad \boxed{\forall (x, y) \in E \times E, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \times \langle y, e_k \rangle = {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \langle x, y \rangle_{\mathcal{B}}}$$

- Rappelons enfin que si :
 - × $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien **RÉEL** (de dimension finie ou non).
 - × F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

alors :

$$\boxed{E = F \oplus F^\perp}$$

En particulier, dans un espace euclidien, F et $F^\perp$ sont toujours des espaces supplémentaires dans E .

I. Isométries vectorielles

I.1. Définitions

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que l'endomorphisme f est une **isométrie** de E (ou un **endomorphisme orthogonal** de E), s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

Autrement dit, un endomorphisme de E est une isométrie vectoriel s'il conserve la norme.

- On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

I.2. Caractérisation des isométries vectorielles

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E et $n = \dim(E)$ (on suppose $n \in \mathbb{N}^*$).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

L'endomorphisme f est
une isométrie vectorielle

$\Leftrightarrow$ L'endomorphisme f conserve la norme

$\Leftrightarrow$ L'endomorphisme f conserve le produit scalaire :
 $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$\Leftrightarrow$ L'image par f d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E

$\Leftrightarrow f(\mathcal{B}_0) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E

Démonstration.

1) C'est la définition.

2) ($\Rightarrow$) Supposons que f conserve la norme.

Rappelons les identités de polarisation. Pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Soit $(x, y) \in E \times E$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|f(x + y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors :

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$$

- 3) ($\Rightarrow$) Supposons que f conserve la norme (et donc le produit scalaire d'après le point précédent).
 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée.
 Démontrons que $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée.
 Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (\text{car } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormée})$$

- ($\Leftarrow$) Supposons que l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Alors $\mathcal{B}_1 = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est aussi une base orthonormée de E .

Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Alors : $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ et :

$$\times \quad \|x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{car } \mathcal{B}_0 \text{ est une BON.}$$

$$\times \quad \|f(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(e_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{car } \mathcal{B}_1 \text{ est une BON.} \quad \square$$

I.3. L'ensemble $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1) $O(E) \subset GL(E)$

- 2) La loi $\circ$ est une loi de composition interne sur $O(E)$.

Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (f, g, h) \in (O(E))^2, f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (associativité)

b. $\exists \mathbb{1}_{O(E)} \in O(E), \forall f \in O(E), f \circ \mathbb{1}_{O(E)} = \mathbb{1}_{O(E)} \circ f = f$ (existence d'un élément identité)
 (cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{O(E)} = \text{id}_E$)

c. $\forall f \in O(E), \exists g \in O(E), f \circ g = g \circ f = \text{id}$ (g inverse de f ,
 noté $g = f^{-1}$)

Ces propriétés font de $O(E)$ un groupe.

L'ensemble $O(E)$ est alors nommé groupe orthogonal de E

Démonstration.

Démontrons que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

- (i) $O(E) \subset GL(E)$. En effet, comme vu dans la caractérisation des isométries vectorielles, l'image d'une base (orthonormée) est une base (orthonormée).

- (ii) $O(E) \neq \emptyset$ car $\mathbb{1}_{GL(E)} = \text{id}_E \in O(E)$

- (iii) Démontrons que $O(E)$ est stable par la loi $\circ$.

Soit $(f, g) \in O(E)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|(f \circ g)(x)\| &= \|f(g(x))\| \\ &= \|g(x)\| \quad (\text{car } f \in O(E)) \\ &= \|x\| \quad (\text{car } g \in O(E)) \end{aligned} \quad \square$$

I.4. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par isométrie vectorielle

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit F un sous-espace de E .

$$1) \quad \boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est une isométrie vectorielle} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle}$$

2) Supposons : $f \in \text{O}(E)$. Alors :

$$\boxed{\text{L'espace } F \text{ est stable par } f \Leftrightarrow \text{L'espace } F^\perp \text{ est stable par } f}$$

(rappelons : F est stable par $f \Leftrightarrow \forall u \in F, f(u) \in F$)

II. Matrices orthogonales

II.1. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- On dit que la matrice A est orthogonale si ${}^t A \times A = I_n$.
- On note $\text{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\text{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales.

II.2. Caractérisation des matrices orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{La matrice } A \text{ est orthogonale} &\Leftrightarrow {}^t A \times A = I_n \\ &\Leftrightarrow A \times {}^t A = I_n \\ &\Leftrightarrow A \text{ est inversible et } A^{-1} = {}^t A \\ &\Leftrightarrow \text{Les colonnes de } A \text{ constituent une base orthonormée de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \text{Les lignes de } A \text{ constituent une base orthonormée de } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

II.3. Lien entre matrices orthogonales et espaces euclidiens

II.3.a) Les matrices orthogonales sont des matrices de changement de base orthonormée

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée de E .

Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

La base $\mathcal{B}$ est orthonormée $\Leftrightarrow$ La matrice $P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}$ est orthogonale

II.3.b) Les matrices orthogonales sont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des isométries vectorielles

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}_n(E)$

II.4. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$

2) La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (A, B, C) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2, A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité)

b. $\exists \mathbf{1}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), A \times \mathbf{1}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \times A = A$ (existence d'un élément identité)
(cet élément identité n'est autre que $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} = I_n$)

c. $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), A \times B = B \times A = I_n$ (B inverse de A ,
noté $B = A^{-1}$)

Ces propriétés font de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ un groupe.

L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est alors nommé groupe orthogonal.

3) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow (\det(A))^2 = 1$

4) L'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 constitue aussi un groupe appelé groupe spécial orthogonal, noté $\text{SO}(n)$ ou encore $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

III. Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3

III.1. Relation d'orientation

III.1.a) Définition

Soit E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E .

- On dit que $\mathcal{B}_1$ a la **même orientation** que $\mathcal{B}_2$ si $\det(P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}) > 0$.
- Dans la suite, on note : $\mathcal{B}_1 \mathcal{R} \mathcal{B}_2$ pour signifier que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont même orientation.

III.1.b) Classes d'équivalence de la relation d'orientation

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- La relation binaire $\mathcal{R}$ est :

- × réflexive,
- × symétrique,
- × transitive.

Une telle relation définit une relation d'équivalence.

- Il n'existe que deux orientations possibles. Ces deux orientations permettent de définir deux ensembles distincts :

- × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 1 ».
Ces bases seront dites **directes**.
- × l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 2 ».
Ces bases seront dites **indirectes**.

Ces deux ensembles définissent une partition de l'ensemble des bases de E .

- L'espace E est alors dit **orienté**.

III.2. Rappel sur la notion de déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- On appelle forme n -linéaire sur E toute application $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses n variables.
- L'ensemble des formes n -linéaires (sur E) alternées (ou de manière équivalente antisymétriques) est un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc une forme linéaire non nulle f qui engendre cet ensemble (pour toute autre forme n -linéaire alternée g , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g = \lambda f$).
- On appelle alors déterminant dans la base $\mathcal{B}_0$ l'unique forme n -linéaire alternée g sur E telle que : $g(e_1, \dots, e_n) = 1$. On note alors $g = \det \mathcal{B}_0$.
(attention à cette notation : il s'agit de $\det_{\mathcal{B}_0}$ et en aucun cas de ~~$\det(\mathcal{B}_0)$~~)
- Deux formes n -linéaires alternées sont toujours colinéaires. Ainsi, si $\mathcal{B}_1$ est une base de E , il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\det \mathcal{B}_0 = \mu \cdot \det \mathcal{B}_1$$

$$\text{et : } \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) = \mu \times \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) = \mu.$$

- Rappelons enfin que, si $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ alors :

$$\det_{\mathcal{B}_0}((u_1, \dots, u_n)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \times \dots \times a_{\sigma(n),n} = \det(A)$$

où, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ et :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_1) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_n) \right)$$

- En particulier, si $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E , alors, d'après ce qui précède, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\begin{aligned} & \det_{\mathcal{B}_0}((u_1, \dots, u_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) \times \det_{\mathcal{B}_1}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det \left(\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_1) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_n) \right) \right) \times \det_{\mathcal{B}_1}((u_1, \dots, u_n)) \\ &= \det(P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1}) \times \det_{\mathcal{B}_1}((u_1, \dots, u_n)) \end{aligned}$$

Conséquence : calcul du déterminant dans un base orthonormée directe

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée directe de E .

- Le calcul du déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans une base orthonormée directe est indépendant de la base orthonormée directe choisie. En effet, si $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormée directe :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_0}(u_1, \dots, u_n) &= \det(P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1}) \times \det_{\mathcal{B}_1}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_1}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

III.3. Produit mixte

III.3.a) Définition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On considère que l'espace E est orienté.

(le choix de l'orientation directe a été fait)

Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée directe de E .

- On appelle **produit mixte** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ et on note $[u_1, \dots, u_n]$, le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}_0$ (ou dans tout autre base orthonormée directe!).

$$\begin{aligned} [u_1, \dots, u_n] &= \det_{\mathcal{B}_0}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det \left((\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_1) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_n)) \right) \end{aligned}$$

III.3.b) Considérations géométriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$

Soit $(u, v) \in E \times E$

$$[u, v] = \text{aire algébrique du parallélogramme formé par les vecteurs } u \text{ et } v$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v) libre (le cas (u, v) lié donne $[u, v] = 0$).

× on remarque que $(u, v) \mapsto [u, v] = \det_{\mathcal{B}_0}(u, v)$ est bilinéaire. En conséquence :

$$\begin{aligned} [u, v] &= [u, v + \alpha \cdot u] && (\text{pour n'importe quel } \alpha \text{ puisqu'on a} \\ &= [u, p_F(v)] && \text{affaire à une forme bilinéaire alternée}) \\ &= [u, h] && (\text{en notant } F = (\text{Vect}(u))^\perp) \\ &= \left[\|u\| \frac{u}{\|u\|}, \|h\| \frac{h}{\|h\|} \right] && (\text{en notant } h = p_F(v)) \\ &= \|u\| \|h\| \left[\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|} \right] \\ &= \|u\| \|h\| \det_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|} \right) \\ &= \|u\| \|h\| \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) && (\text{en notant } \mathcal{B}_1 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|} \right)) \\ &= \pm \|u\| \|h\| = \pm \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{1}{2} |[u, v]| = \text{aire du triangle formé par les vecteurs } u \text{ et } v$$

- Dans le cas $n = 3$

Soit $(u, v, w) \in E \times E \times E$

$$[u, v] = \text{volume \textbf{algébrique} du parallélépipède formé par les vecteurs } u, v \text{ et } w$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v, w) libre (le cas (u, v, w) lié donne $[u, v, w] = 0$).

× on remarque que $(u, v, w) \mapsto [u, v, w] = \det_{\mathcal{B}_0}(u, v, w)$ est 3-linéaire. En conséquence :

$$\begin{aligned}
 [u, v, w] &= [u, v + \alpha \cdot u, w] && \text{(pour n'importe quel } \alpha \text{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\
 &= [u, p_F(v), w] && \text{(en notant } F = (\text{Vect}(u))^\perp) \\
 &= [u, h, w] && \text{(en notant } h = p_F(v)) \\
 &= [u, h, w + \lambda \cdot u + \mu \cdot h] && \text{(pour n'importe quel couple } (\lambda, \mu) \text{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\
 &= [u, h, t] && \text{(en notant } t = p_G(w) \text{ où } G = (\text{Vect}(u, h))^\perp) \\
 &= \left[\|u\| \frac{u}{\|u\|}, \|h\| \frac{h}{\|h\|}, \|t\| \frac{t}{\|t\|} \right] \\
 &= \|u\| \|h\| \|t\| \left[\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}, \frac{t}{\|t\|} \right] \\
 &= \|u\| \|h\| \|t\| \det_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}, \frac{t}{\|t\|} \right) \\
 &= \|u\| \|h\| \|t\| \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) && \text{(en notant } \mathcal{B}_1 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}, \frac{t}{\|t\|} \right)) \\
 &= \pm \|u\| \|h\| \|t\| \\
 &= \pm \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|t\| \\
 &= \pm \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|w\| \times \cos(\widehat{w, t}) \\
 &= \langle u \wedge v, w \rangle && \text{(où } u \wedge v \text{ est défini plus loin)}
 \end{aligned}$$

III.4. Produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension 3

III.4.a) Définition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.

Soit $(u, v) \in E^2$.

- Comme $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, [u, v, x] = \langle a, x \rangle$$

Ce vecteur est noté $u \wedge v$ et s'appelle le produit le **produit vectoriel** de u et v .

Remarque

- De manière équivalente, pour tout $(u, v) \in E \times E$, on peut définir $u \wedge v$ par :
 - × si u et v sont colinéaires alors $u \wedge v = 0$.
 - × si u et v ne sont pas colinéaires :
 - ▶ $u \wedge v$ orthogonal à u et $u \wedge v$ orthogonal à v
 - ▶ $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe
 - ▶ $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v})$
- Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe alors :

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

III.4.b) Propriétés du produit vectoriel

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.

1. $\forall (u, v, x) \in E^3, [u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle$
2. $\forall (u, v) \in E^2, u \wedge v = -v \wedge u$
3. $\forall (u, v) \in E^2, u \wedge v = 0 \Leftrightarrow$ Les vecteurs u et v sont colinéaires
4. L'application $\begin{matrix} E & \times & E & \rightarrow & E \\ (u & , & v) & \mapsto & u \wedge v \end{matrix}$ est bilinéaire et alternée.
(ou de manière équivalente : bilinéaire et antisymétrique)
5. $\forall (u, v) \in E^2$, Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v

En particulier, si la famille (u, v) est libre : $(\text{Vect}(u, v))^\perp = \text{Vect}(u \wedge v)$.

6. $\forall (u, v) \in E^2$, La famille (u, v) est libre $\Rightarrow$ La famille $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E

En particulier, si $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$ sont orthogonaux alors $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|} \right)$ est une base orthonormée directe de E .

7. Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée directe de E . Soit $(u, v) \in E^2$. On note :

× (u_1, u_2, u_3) les coordonnées de u dans $\mathcal{B}_0$.

× (v_1, v_2, v_3) les coordonnées de v dans $\mathcal{B}_0$.

$u \wedge v$ est de coordonnées $(u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1)$ dans la base $\mathcal{B}_0$

Cas particulier de l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

8. $\forall (u, v) \in E^2, \|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \times \sin(\widehat{u, v})$

9. Identité de Lagrange : $\forall (u, v) \in E^2, \|u \wedge v\|^2 + \langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \times \|v\|^2$

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

IV.1. Classification des matrices orthogonales en dimension 2

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note alors :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\det(R(\theta)) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\det(S(\theta)) = -1}$

3. a) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \boxed{R(\theta)^{-1} = {}^t R(\theta) = R(-\theta)}$

b) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \boxed{S(\theta)^{-1} = {}^t S(\theta) = S(\theta)}$

4. a) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad \boxed{R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')}$

(en particulier les matrices $R(\theta)$ et $R(\theta')$ commutent)

b) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad \boxed{S(\theta) \times S(\theta') = R(\theta - \theta')}$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad \boxed{R(\theta) \times S(\theta') = S(\theta + \theta')}$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad \boxed{S(\theta') \times R(\theta) = S(\theta' - \theta)}$

5. L'ensemble $\{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales directes.

On rappelle qu'il est noté $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$.

Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont des **rotations vectorielles** (parmi elles I_2 et $-I_2$).

6. L'ensemble $\{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales indirectes.

Il est parfois noté $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$.

Les éléments de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont des **symétries orthogonales** par rapport à une droite vectorielle (si $A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, cette droite vectorielle est $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$).

Remarque

Soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

L'ensemble $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par A . En effet :

$$F = \mathrm{Ker}(A - I_2) = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$$

Trois cas se présentent alors :

- × si $\dim(F) = 2$, alors $F = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (inclusion et égalité des dimensions) et ainsi $A = I_2$.
- × si $\dim(F) = 1$, alors l'ensemble des vecteurs invariants par A est une droite vectorielle. Dans ce cas, A est une symétrie orthogonale par rapport à F (axe de cette symétrie).
- × si $\dim(F) = 0$, alors seul $0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ est invariant par A . Dans ce cas, A est une rotation vectorielle.

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow M^T M = I_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = \cos(\theta), c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\theta) \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = \cos(\theta), c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta - \alpha) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = \cos(\theta), c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha), d = \sin(\alpha) \\ \alpha \equiv \theta \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \det(R(\theta)) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 \\
 \det(S(\theta)) &= -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = -1
 \end{aligned}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) $R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)^T$

b) Évident.

4. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 &R(\theta) \times R(\theta') \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') & -(\cos(\theta) \sin(\theta') + \sin(\theta) \cos(\theta')) \\ \sin(\theta) \cos(\theta') + \cos(\theta) \sin(\theta') & \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\
 &= R(\theta + \theta')
 \end{aligned}$$

b) Toujours utilisation des formules d'addition.

□

IV.2. Conséquence : classification des isométries vectorielles en dimension 2

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 2.

Soit $f \in O(E)$.

Deux cas se présentent.

1. Si $\det(f) = -1$

- Dans ce cas, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- L'application f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
On dit que f est une **réflexion**.

2. Si $\det(f) = 1$

- Dans ce cas, dans **TOUTE** base orthonormale **directe** $\mathcal{B}$ de E :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$$

où le réel θ , unique modulo 2π , ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.

- L'application f est une **rotation vectorielle**.
- Le réel θ est appelé **mesure de l'angle** de la rotation f .

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E . La matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$ est orthogonale par Théorème II.3.b), donc de type $S(\theta)$ ou $R(\theta)$ d'après le Théorème IV.2..

1. Si $M = S(\theta)$, alors $M^2 = S(\theta)^2 = I_2$, donc f est une symétrie.

On cherche maintenant une base $\mathcal{B}'$ de E telle que :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} M P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S(0)$$

Pour cela on cherche $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ sous la forme $R(\alpha)$.

D'après le Théorème IV.2:

$$R(\alpha) S(\theta) R(\alpha)^{-1} = S(\alpha + \theta) R(-\alpha) = S(\alpha + \theta - (-\alpha)) = S(\theta + 2\alpha)$$

On choisit donc $\alpha = \frac{\theta}{2}$.

2. Si $M = R(\theta)$, alors f est une rotation.

De plus si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales directes de E , alors la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est orthogonale et de déterminant 1. Elle est donc de type $P = R(\theta')$ d'après le théorème IV.2. Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M P = R(-\theta') R(\theta) R(\theta') = R(-\theta' + \theta + \theta') = R(\theta)$$

de sorte que le réel θ ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. □

V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

V.1. Étude rapide de l'ensemble des vecteurs invariants d'une isométrie vectorielle directe

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté**.

On suppose que E est de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. $f \in O(E) \Rightarrow f$ possède au moins une valeur propre égale à 1 ou -1
2. $f \in SO(E) \Rightarrow f$ admet 1 comme valeur propre

V.2. Caractérisation des isométries vectorielles en dimension 3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien **orienté**.

On suppose que E est de dimension 3.

Soit $f \in O(E)$.

Notons $F = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.

- 1) Si $\dim(F) = 3$ alors $f = \text{id}_E$.
- 2) Si $\dim(F) = 2$ (**hors-programme**) alors f est la réflexion par rapport au plan F . Dans ce cas, f est une isométrie vectorielle indirecte.
- 3) Si $\dim(F) = 1$ alors :
 - × le plan vectoriel $P = \left(\text{Ker}(f - \text{id}_E) \right)^\perp$ est stable par f ,
 - × l'endomorphisme $f|_P$ est une rotation de P différente de id_P .
 Dans ce cas, f est une isométrie vectorielle directe, appelée rotation d'axe $D = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.
- 4) Si $\dim(F) = 0$ (**hors-programme**).

Étude du cas $\dim \left(\text{Ker}(f - \text{id}_E) \right) = 1$

On note $D = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$. Comme $\dim(D) = 1$, la droite vectorielle D est dirigée et orientée par un vecteur unitaire $a \neq 0_E$.

On note $P = D^\perp$.

On note alors θ la mesure de l'angle de la rotation $f|_P$.

Ainsi, f est la rotation d'axe D et d'angle de mesure θ .

La matrice de f dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de la forme (a, e_2, e_3) est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R(\theta) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

La mesure de l'angle de rotation de f est déterminée en remarquant :

- × $\text{tr}(f) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = 1 + 2 \cos(\theta)$
- × $\sin(\theta) = [a, v, f(v)]$ pour tout vecteur v unitaire et orthogonal à a .

Remarque

- Les matrices de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sont exactement les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des rotations vectorielles.
- Notons $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour démontrer que $f \in \text{SO}(E)$, on étudie la matrice A et on démontre : $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$. Plus précisément, on démontre :

- 1) $A \in \text{O}_3(\mathbb{R})$. Il s'agit de démontrer que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note C_1 , C_2 et C_3 les 3 colonnes de A et on démontre :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$$

On peut aussi, de manière équivalente, démontrer : $A \times {}^t A = I_3$.

- 2) $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$. Pour ce faire on peut :

× soit démontrer $\det(A) = 1$.

× soit démontrer : $C_3 = C_1 \wedge C_2$.

En effet, comme $\langle C_3, C_1 \rangle = 0$ et $\langle C_3, C_2 \rangle = 0$ alors :

$$C_3 \in (\text{Vect}(C_1, C_2))^\perp = \text{Vect}(C_1 \wedge C_2)$$

Comme $\|C_3\| = 1$ alors $C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$.

Si on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$1 = \det(A) = \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = [C_1, C_2, C_3] = \langle C_1 \wedge C_2, C_3 \rangle_{\mathcal{B}}$$

Et ainsi : $C_1 \wedge C_2 = C_3$.

- 3) Il reste alors à déterminer les éléments caractéristiques de f :

► l'axe de la rotation $D = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.

Cela correspond à déterminer le sous-espace propre $E_1(f)$. On met donc en place la stratégie habituelle de détermination de sous-espace propre. Ce sous-espace propre est de dimension 1 et s'écrit donc : $D = \text{Ker}(f - \text{id}_E) = \text{Vect}(u)$. On note alors $a = \frac{u}{\|u\|}$. On obtient ainsi un vecteur **unitaire** qui dirige et oriente F .

► la mesure θ de l'angle de rotation.

× le cosinus de l'angle θ est donné par :

$$\begin{aligned} \text{tr}(f) &= \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= 1 + 2 \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \cos(\theta) = \frac{1}{2} (\text{tr}(f) - 1) \text{ et donc : } \theta \equiv \pm \arccos \left(\frac{1}{2} (\text{tr}(f) - 1) \right) [2\pi].$$

× il reste enfin à déterminer le signe de θ . Pour tout vecteur v unitaire et orthogonal à a :

$$\sin(\theta) = [a, v, f(v)]$$

Exercice 1

Notons $E = \mathbb{R}^3$.

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que f est une rotation et en déterminer les caractéristiques (angle et axe).

2. Même question avec $A_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$, puis $A_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et enfin $A_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

1. (i) Démontrons tout d'abord : $A \in \text{O}_3(\mathbb{R})$

$$A \times {}^t A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = I_3$$

(ii) Démontrons maintenant : $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 21 \\ -14 \\ -42 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = C_3$$

Si on note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, cela démontre :

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = [C_1, C_2, C_3] = \langle C_1 \wedge C_2, C_3 \rangle_{\mathcal{B}_0} = \langle C_3, C_3 \rangle_{\mathcal{B}_0} = 1$$

Ainsi, $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$. Cela démontre : $f \in \text{SO}(E)$ et donc f est une rotation vectorielle.

(iii) Déterminons alors l'axe de la rotation f

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

$$\text{Notons } U = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} u \in E_1(f) & \iff (f - \text{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \iff (A - I_3) U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff 7 \cdot (A - I_3) U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff (7 \cdot A - 7 \cdot I_3) U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \begin{cases} -9x + 6y + 3z = 0 \\ 6x - 4y - 2z = 0 \\ -3x + 2y - 13z = 0 \end{cases} \\ & \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} -9x + 6y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ -42z = 0 \end{cases} \\ & \stackrel{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{42}L_3}}{\iff} \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} -3x + z = -2y \\ z = 0 \end{cases} \\ & \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -3x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_1(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x = 2y \quad \text{et} \quad z = 0\} \\
 &= \{(\frac{2}{3}y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y \cdot (\frac{2}{3}, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((\frac{2}{3}, 1, 0)) \\
 &= \text{Vect}((2, 3, 0))
 \end{aligned}$$

L'endomorphisme f est une rotation d'axe $D = \text{Vect}((2, 3, 0))$ que l'on oriente par le vecteur unitaire $a = \frac{1}{\sqrt{13}} (2, 3, 0)$.

(iv) Déterminons enfin la mesure θ de l'angle de la rotation f

- D'après le cours, dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B} = (a, e_2, e_3)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On en conclut : $\text{tr}(f) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = 1 + 2 \cos(\theta)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta) &= \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\text{tr}(A) - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{7} (-2 + 3 - 6)
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \theta \equiv \pm \arccos\left(\frac{-5}{7}\right) [2\pi].$$

(il reste alors à déterminer le sens de rotation c'est-à-dire de savoir si la mesure de l'angle de rotation est $\theta \equiv \arccos\left(\frac{-5}{7}\right) [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\arccos\left(\frac{-5}{7}\right) [2\pi]$)

- Afin de conclure, il reste à déterminer le signe de la mesure de l'angle de f .
Le vecteur $v = (0, 0, 1)$ est orthogonal à a et unitaire. Alors :

$$\sin(\theta) = [a, v, f(v)] = \det_{\mathcal{B}_0}(a, v, f(v)) = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{-2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-6}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{7\sqrt{13}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient :

$$\sin(\theta) = -\frac{1}{7\sqrt{13}} (2 \times (-2) - 3 \times 3) = \frac{13}{7\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{7} > 0$$

Finalement, l'endomorphisme f est la rotation vectorielle d'axe D et d'angle de mesure $\arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$.

□

VI. Endomorphismes auto-adjoints

VI.1. Notion d'endomorphisme auto-adjoint

VI.1.a) Définition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que f est **auto-adjoint** (ou parfois **symétrique**) si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

- On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E .

VI.1.b) Lien entre endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- L'endomorphisme f est auto-adjoint $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique

- a) L'application Φ suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Elle induit de plus un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n .

$$b) \quad \dim(\mathcal{S}(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$ Supposons : $f \in \mathcal{S}(E)$.

- Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E , alors pour tout $u \in E$:

$$u = \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n$$

En particulier, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(e_j) = \langle f(e_j), e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle f(e_j), e_n \rangle \cdot e_n$$

- Rappelons par ailleurs : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1)) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_n)) \right)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \left(\langle f(e_j), e_i \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \left(\langle e_j, f(e_i) \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (\text{car } f \in \mathcal{S}(E)) \\ &= \left(\langle f(e_i), e_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (\text{par symétrie du produit scalaire}) \\ &= \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right)^t \end{aligned}$$

□

VI.2. Exemple d'endomorphismes auto-adjoints : les projecteurs et symétries orthogonales

VI.2.a) Rappel sur les projecteurs et les symétries

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = F \oplus G$).

(pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que : $u = u_F + u_G$)

- On appelle **projecteur sur F parallèlement à G** l'application :
- On appelle **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application :

$$\begin{aligned} p &: E \rightarrow E \\ u &\mapsto u_F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &: E \rightarrow E \\ u &\mapsto u_F - u_G \end{aligned}$$

Dans ce cas : $F = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ ($= \text{Im}(p)$)
et $G = \text{Ker}(p)$.

Dans ce cas : $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$
et $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

- Caractérisation : pour tout $p \in \mathcal{L}(E)$ et tout $s \in \mathcal{L}(E)$:

$$p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p$$

$$s \text{ est une symétrie} \Leftrightarrow s \circ s = \text{id}_E$$

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- On appelle **projecteur orthogonal sur F** le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
Ainsi, pour tout projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$:

$$\begin{aligned} p \text{ est un projecteur orthogonal} &\Leftrightarrow \text{Im}(p) \text{ et } \text{Ker}(p) \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \text{Ker}(p), \forall y \in \text{Im}(p), \langle x, y \rangle = 0 \end{aligned}$$

- On appelle **symétrie orthogonale par rapport à F** la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. Ainsi, pour toute symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$:

$$\begin{aligned} s \text{ est une symétrie orthogonale} &\Leftrightarrow \text{Ker}(s - \text{id}_E) \text{ et } \text{Ker}(s + \text{id}_E) \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \text{Ker}(s - \text{id}_E), \forall y \in \text{Ker}(s + \text{id}_E), \langle x, y \rangle = 0 \end{aligned}$$

VI.2.b) Les projecteurs / symétries auto-adjoint(e)s sont les projecteurs / symétries orthogonal(e)s

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Notons $n = \dim(E)$. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

1.

$$\begin{aligned} p \text{ est un projecteur orthogonal} &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p))^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \\ &\Leftrightarrow p \text{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} s \text{ est une symétrie orthogonale} &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s))^2 = I_n \\ &\Leftrightarrow s \text{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{aligned}$$

VI.3. Structure de l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

VI.4. Théorème spectral

VI.4.a) Éléments propres d'un endomorphisme auto-adjoint

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint de E .

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

1.
$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ stable par } f \iff F^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ stable par } f$$

2. Les valeurs propres (complexes) de f sont toutes réelles.

En particulier, si $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, alors tout endomorphisme auto-adjoint f admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. Les sous-espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux.

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Notons $f : X \mapsto SX$ l'endomorphisme canoniquement associé à S .
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1.
$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ stable par } f \iff F^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ stable par } f$$

2. Les valeurs propres (complexes) de S sont toutes réelles.

En particulier, toute matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. Les sous-espaces propres réels de S sont 2 à 2 orthogonaux (pour le produit scalaire canonique).

Démonstration.

1. ($\Rightarrow$) Supposons que F est stable par f .

Démontrons que $F^\perp$ est stable par f . Il s'agit de démontrer :

$$\forall x \in F^\perp, f(x) \in F^\perp$$

Soit $x \in F^\perp$. Démontrons $f(x) \in F^\perp$. Il s'agit donc de démontrer : $\forall y \in F, \langle f(x), y \rangle = 0$.

Soit $y \in F$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \langle x, f(y) \rangle && (\text{car } f \text{ est un endomorphisme auto-adjoint}) \\ &= 0 && (\text{car } x \in F^\perp \text{ et } f(y) \in F \text{ puisque } y \in F \text{ et } F \text{ stable par } f) \end{aligned}$$

D'où : $f(x) \in F^\perp$.

($\Rightarrow$) On suppose $G = F^\perp$ stable par f .

D'après le point précédent, $G^\perp = (F^\perp)^\perp = F$ est stable par f .

2. L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre complexe λ (car χ_f , polynôme de degré $\dim(E)$, possède au moins une racine complexe).

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

Notons alors $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ (et $\bar{X}$ la matrice colonne conjuguée). Alors :

× d'une part :

$$\begin{aligned}\bar{X}^T S X &= \bar{X}^T (\lambda X) && (\text{car } SX = \lambda X \text{ par définition de } X) \\ &= \lambda \bar{X}^T X\end{aligned}$$

× d'autre part :

$$\begin{aligned}\bar{X}^T S X &= \bar{X}^T S^T X && (\text{car } S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est symétrique}) \\ &= (S \bar{X})^T X \\ &= (\bar{S} X)^T X && (\text{car } S = \bar{S} \text{ puisque } S \\ &&& \text{est une matrice réelle}) \\ &= (\bar{\lambda} X)^T X \\ &= \bar{\lambda} \bar{X}^T X\end{aligned}$$

On en conclut : $\boxed{\lambda \bar{X}^T X = \bar{\lambda} \bar{X}^T X}$ ou encore : $(\lambda - \bar{\lambda}) \bar{X}^T X = 0$. De plus :

$$\begin{aligned}\bar{X}^T X &= \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \\ &> 0 && (\text{comme } X \text{ est un vecteur propre, } X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \\ &&& \text{et l'un au moins de ses coefficients est non nul})\end{aligned}$$

Donc : $\bar{\lambda} - \lambda = 0$. Ainsi : $\bar{\lambda} = \lambda$ c'est-à-dire : $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f .

Soit $x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ et soit $y \in \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E)$. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda \langle x, y \rangle &= \langle f(x), y \rangle \\ &= \langle x, f(y) \rangle \\ &= \mu \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

Ainsi : $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$.

Donc : $\langle x, y \rangle = 0$ (car $\lambda \neq \mu$). Les sous-espaces propres de f sont donc orthogonaux. $\square$

VI.4.b) Théorème spectral

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée de E .

Alors, f est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) dans une base orthonormée.

Autrement dit, il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice diagonale réelle.

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_0}} \quad \text{avec } P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} \in \text{O}_n(\mathbb{R})$$

Remarque

Si $f \in \mathcal{S}(E)$ est un endomorphisme auto-adjoint, alors f est ortho-diagonalisable.

Cela signifie qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale réelle. Cette base est, par définition, constituée de vecteurs propres de f . Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur e_i est associé à une valeur propre notée λ_i (il est à noter que ces valeurs propres ne sont pas forcément distinctes).

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe :

× une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,

× une matrice $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$,

telles que : $S = P D P^T$.

VI.5. Endomorphisme auto-adjoint positif et défini positif**VI.5.a) Définition****A) Cas des endomorphismes**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Autrement dit, f est un endomorphisme auto-adjoint.

- On dit que f est :

× **positif** si : $\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0$

× **défini positif** si : $\begin{cases} \forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0 \\ \forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{cases}$

- On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs.
- On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs.

B) Cas des matrices carrées

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est :

× **positive** si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$

× **définie positive** si : $\begin{cases} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0 \\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{cases}$

- On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
- On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

C) Lien entre les deux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Autrement dit, f est un endomorphisme auto-adjoint.

L'endomorphisme auto-adjoint f est positif	$\Leftrightarrow$	$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice symétrique positive
---	-------------------	--

L'endomorphisme auto-adjoint f est défini-positif	$\Leftrightarrow$	$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice symétrique définie-positive
--	-------------------	--

VI.5.b) Caractérisation du caractère (défini) positif par signe des valeurs propres**A) Cas des endomorphismes**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Autrement dit, f est un endomorphisme auto-adjoint.

1. L'endomorphisme auto-adjoint f est positif $\Leftrightarrow \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. L'endomorphisme auto-adjoint f est défini positif $\Leftrightarrow \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est défini-positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

B) Cas des matrices carrées

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice symétrique A est positive $\Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. La matrice symétrique A est définie-positive $\Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

Autrement dit, la matrice symétrique A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration.

1. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

- Comme f est auto-adjoint positif : $\langle x, f(x) \rangle \geq 0$.

- De plus : $\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$.

On en déduit : $\lambda \|x\|^2 \geq 0$. Or, comme $x \neq 0_E$ (c'est un vecteur propre de f), alors : $\|x\| \neq 0$.

Finalement :

$$\lambda \|x\|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0 \quad \text{donc} \quad \lambda \geq 0$$

($\Leftarrow$) Supposons : $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

- Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (pas forcément distinctes) de l'endomorphisme f .
Comme $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, alors : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$.
- Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint, alors, par théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de f . Plus précisément, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i .
- Soit $x \in E$. Alors il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$. Par linéarité de f :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \cdot e_i$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle x, f(x) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \cdot e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \cdot e_j \right\rangle && (\text{par linéarité à gauche de } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \langle e_i, e_j \rangle \right) && (\text{par linéarité à droite de } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \delta_{i,j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (\lambda_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.

2. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme auto-adjoint f est défini positif.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

- En particulier, l'endomorphisme auto-adjoint f est positif. Comme vu dans le point 1. :

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geq 0$$

- Ici, on suppose que l'endomorphisme auto-adjoint f est défini positif. Ainsi :

$$\langle x, f(x) \rangle > 0 \quad (\text{puisque } x \neq 0_E)$$

Finalement :

$$\lambda \|x\|^2 > 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0$$

On en conclut : $\lambda > 0$.

Ainsi : $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

On reprend les notations du point 1 :

- × $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (pas forcément distinctes) de f ,
- × $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée constituée de vecteurs propres de f et telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i .

- Comme : $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$ alors d'après 1., on sait déjà que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.
- Démontrons qu'il est défini-positif. Soit $x \in E$.
Supposons : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Démontrons : $x = 0_E$.

× Comme $x \in E$, alors il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$.

$$\text{Alors, comme en 1. : } \langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2.$$

× Or, par hypothèse : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Donc : $\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2 = 0$.

Comme, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i (x_i)^2 \geq 0$, on en déduit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i (x_i)^2 = 0$$

$$\text{donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x_i)^2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0 \\ \text{puisque } \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \end{array} \right)$$

$$\text{donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0$$

$$\text{Finalement : } x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot e_i = 0_E.$$

L'endomorphisme auto-adjoint f est donc défini positif. □

À RETENIR

 (aspect théorique)

- Cet exercice est une excellente illustration de beaucoup d'exercices sur les endomorphismes auto-adjoints. Plus précisément :
 - × pour le sens direct, on doit démontrer une propriété sur le spectre de f c'est-à-dire sur chacune des valeurs propres λ de f . Pour ce faire, on introduit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ et on travaille sur ce vecteur propre.
 - × pour le sens réciproque, on doit démontrer une propriété vérifiée pour tout $x \in E$. Pour ce faire, comme f est auto-adjoint, on se sert du fait que f est ortho-diagonalisable afin de pouvoir travailler dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f .
 On rédigera ce point comme suit :

- Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (pas forcément distinctes) de l'endomorphisme f .
- Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint, alors, par théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de f .
Plus précisément, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i .

Il faut retenir ces deux idées fondamentales dans les exercices sur les endomorphismes auto-adjoints.

À RETENIR

 (aspect calculatoire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E .

On introduit les notations $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (valeurs propres pas forcément distinctes de f) et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée constituée de vecteurs propres de f .

- Dans les exercices, il est classique d'avoir à calculer la quantité $\langle x, f(x) \rangle$ (où $x \in E$). Avec les notations précédentes et en notant $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
 \langle x, f(x) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \cdot e_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \cdot e_j \right\rangle && (\text{par linéarité à gauche de } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \langle e_i, e_j \rangle \right) && (\text{par linéarité à droite de } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \delta_{i,j} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i (\lambda_i x_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

On retiendra cette expression : $\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2$

- On peut aussi effectuer ce calcul comme suit :

$$\begin{aligned}
 \langle x, f(x) \rangle &= \langle x, f(x) \rangle_{\mathcal{B}} && (\text{car } \mathcal{B} \text{ est une BON}) \\
 &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x))^T \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x)) \\
 &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x))^T \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \\
 &= (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} && (\text{par définition de } \mathcal{B}, \\
 &&& \text{base de diagonalisation de } f) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i)^2
 \end{aligned}$$

- Ce dernier calcul met en avant un calcul souvent réalisé lorsque l'exercice demande l'étude d'une matrice symétrique réelle S (plutôt qu'un endomorphisme auto-adjoint). Lorsque c'est le cas, il est classique d'effectuer le calcul $X^T S X$ (pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Comme S est une matrice symétrique réelle, S est ortho-diagonalisable. Autrement dit, il existe :

× $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$,

× $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

telles que $S = P D P^T$. Alors :

$$\begin{aligned}
 X^T S X &= X^T (P D P^T) X \\
 &= (P^T X)^T D P^T X \\
 &= (Y)^T D Y && (\text{en notant } Y \text{ le vecteur} \\
 &&& \text{tel que } X = P Y) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i)^2 && (\text{en notant } (y_1, \dots, y_n) \text{ les} \\
 &&& \text{coefficients de } Y)
 \end{aligned}$$