Probabilités

Exercices classiques, méthodes usuelles

I. Espace probabilisable

I.1. Notion de tribu

a) Définition

Soit Ω un ensemble.

Une **tribu** (on parle aussi de σ**-algèbre**) sur Ω est un ensemble $\mathscr{A}$ vérifiant :

(0) $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ *($\mathscr{A}$ est constitué de parties de Ω : pour tout $A \in \mathscr{A}$, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$)*

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$

(ii) $\forall A \in \mathscr{A},\ \overline{A} \in \mathscr{A}$ *(stabilité de $\mathscr{A}$ par passage au complémentaire)*

(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$ *(stabilité de $\mathscr{A}$ par union dénombrable)*

On peut remplacer ***(iii)*** par :

(iii') $\forall I \subset \mathbb{N},\ \forall (A_i)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I,\ \bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$ *(stabilité de $\mathscr{A}$ par union au plus dénombrable)*

b) Propriété de stabilité

Soit Ω un ensemble.

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

1) $\varnothing \in \mathscr{A}$

2) Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$: $\boxed{A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}}$

3) Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$:

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i \ \text{ et } \ \bigcap_{i\in I} A_i \ \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}}$$

Résumé des propriétés de stabilité.
Une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω :

- contient $\varnothing$ et Ω,
- est stable par union finie et stable par union dénombrable,
- est stable par intersection finie et stable par intersection dénombrable,
- est stable par passage au complémentaire.

I.2. Notion d'espace probabilisable

- On appelle **espace probabilisable** la donnée d'un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ où :
  - × Ω est un ensemble appelé **univers** (ou univers des possibles).
    C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
  - × $\mathscr{A}$ est une **tribu** (on parle aussi de **σ-algèbre**) sur Ω.
- **Vocabulaire sur les éléments d'une tribu** :
  - × les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés des **événements**.
  - × l'événement $\varnothing$ (*c'est un élément de* $\mathscr{A}$) est l'**événement impossible**.
  - × l'événement Ω est l'**événement certain**.
  - × l'événement $\overline{A}$ est appelé **événement contraire** de A.

I.3. Vocabulaire des probabilités : illustration à l'aide d'expériences aléatoires

Exemple

1) Expérience : on effectue 1 lancer d'une pièce.

- Univers : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.
  Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
- Tribu : $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega) = \Big\{\varnothing, \{\text{Pile}\}, \{\text{Face}\}, \{\text{Pile}, \text{Face}\}\Big\}$.
  Tribu : l'ensemble de tous les événements considérés.

2) Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé 6.

- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

  L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

  Tribu : $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

  La tribu $\mathscr{A}$ est dans ce cas l'ensemble de tous les événements.

- Exemple d'événement A : « le résultat est pair ».

  Un événement A peut être défini par une propriété sur l'expérience.

  $A = \{2, 4, 6\} \in \mathscr{P}(\Omega)$.

  Rigoureusement, un événement A est une partie de Ω constituée de l'ensemble des tirages qui réalisent la propriété définissant A.

  Le lancer $\omega = 4$ réalise l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

  On dit qu'un tirage $\omega \in \Omega$ réalise l'événement A s'il vérifie la propriété définissant A.

II. Espace probabilisé

II.1. Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- Une probabilité est une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :
  1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$
  2) $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$
  (la probabilité de l'événement certain est 1)
  3) Pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles (c'est une famille qui vérifie la propriété : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \varnothing$) :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)}$$

  (cette propriété est appelée σ-additivité)

- Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

- La propriété de σ-additivité peut se noter de manière générale comme suit.
  Soit $I \subseteq N$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)}$$

- En particulier, lorsque I fini ($I = [\![1, m]\!]$), on récupère la propriété d'additivité.
  Si $(A_1, \dots, A_m)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)}$$

II.2. Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

2) $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3) $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
(l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

4) $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

5)
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall (A,B,C) \in \mathscr{A}^3,\ \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - & \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}}$$

(formule du crible)

6)
$$\boxed{\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)}$$

Attention : dans cette écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ *si la série* $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *est divergente*

II.3. Probabilité uniforme

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
L'univer Ω peut alors s'écrire : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

- Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires *i.e.* telle que :

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_1\}) \ = \ \dots \ = \ \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}}$$

- Cette probabilité est appelée probabilité uniforme et est définie par :

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \mathbb{P} : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues de l'expérience}} \end{array}}$$

III. Système complet d'événements

III.1. Événements incompatibles

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$.

Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

III.2. Systèmes complets et quasi-complets d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathscr{A}^I$.

- La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si :

(i) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

(ii) Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
(les événements sont deux à deux incompatibles)

- La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système quasi-complet d'événements** si :

(i') $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$

(ii) Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
(les événements sont deux à deux incompatibles)

Exercice

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A, B, C) \in \mathscr{A}^3$.

On suppose $\mathbb{P}(B) = 0$ et $\mathbb{P}(C) = 1$.

1) Démontrer : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

2) Démontrer : $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)$.

III.3. Une propriété vérifiée par les systèmes (quasi-)complets d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

De manière générale, si la famille $\left(A_i\right)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I$ (où $I \subset \mathbb{N}$) est un système (quasi-)complet d'événements, alors : $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) = 1$.

Et comme les événements de la famille $\left(A_i\right)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \boxed{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1}$$

- Cas d'un s(q)ce à deux événements
  Soit $A \in \mathscr{A}$ (A est un événement).
  La famille $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements.
  On en déduit notamment : $\boxed{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1}$
- Cas d'un s(q)ce à m événements
  Soit $(A_1, \dots, A_m)$ est un système complet d'événements.
  On en déduit notamment : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) = 1}$
- Cas d'un s(q)ce à une infinité d'événements
  Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.
  On en déduit notamment : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1}$
- Cas d'un s(q)ce associé à une variable discrète
  Soit X une variable discrète.
  La famille $\left(\{X = x\}\right)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
  On en déduit notamment : $\boxed{\sum\limits_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\}) = 1}$

IV. Propriété de la limite monotone

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$.

1) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ($\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \subset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $\left(\mathbb{P}(A_n)\right)$ converge,

b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ($\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \supset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $\left(\mathbb{P}(A_n)\right)$ converge,

b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Dans le cas général (la suite (A_n) n'est ni croissante ni décroissante), on peut toujours appliquer le résultat suivant (**c'est celui qu'il faut retenir !**).

> Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
>
> Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.
>
> *1)* $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$ *2)* $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$

Exercice

On considère l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers d'un dé 6 équilibré.

On suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

Notons A : « on n'obtient que des 6 lors de la partie ».

Notons B : « on obtient au moins un 6 lors de la partie ».

a. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 lors de la partie ?

L'événement A est réalisé

$\Leftrightarrow$ On n'a obtenu que des 6 au cours de la partie

$\Leftrightarrow$ On a obtenu 6 au 1^er^ lancer

ET on a obtenu 6 au 2ème lancer

ET on a obtenu 6 au 3ème lancer

$\vdots$ $\vdots$

$\Leftrightarrow$ L'événement F_1 est réalisé

ET l'événement F_2 est réalisé

ET l'événement F_3 est réalisé

$\vdots$ $\vdots$

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} F_i$ est réalisé

Ainsi : $\boxed{A = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} F_i}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \quad \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) \quad \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(car } \tfrac{1}{6} \in\,]-1,1[\textit{)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0}$$

b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors de la partie ?

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événément } B \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{On obtient (au moins) un 6 au cours de la partie} \\ \Leftrightarrow & \qquad \text{On a obtenu 6 au } 1^{\text{er}} \text{ lancer} \\ & \texttt{OU} \quad \text{on a obtenu 6 au } 2^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \texttt{OU} \quad \text{on a obtenu 6 au } 3^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ & \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \Leftrightarrow & \qquad \text{L'événement } F_1 \text{ est réalisé} \\ & \texttt{OU} \quad \text{l'événement } F_2 \text{ est réalisé} \\ & \texttt{OU} \quad \text{l'événement } F_3 \text{ est réalisé} \\ & \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} F_i \text{ est réalisé} \end{array}$$

Ainsi : $\boxed{B = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} F_i}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \qquad \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right) \qquad \textit{(loi de de Morgan)} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{F_i}\right) \qquad \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \left(\textit{car } \tfrac{5}{6} \in\,]-1, 1[\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1}$$

Remarque

- L'obtention d'une infinité de 6 dans la partie se définit à l'aide des événements suivants.
  Notons C : « on obtient une infinité successive de 6 lors de la partie ».
  Cet événement s'écrit sous la forme : $C = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j=i}^{+\infty} F_j$.

Notons D : « on obtient une infinité de 6 lors de la partie ».
Cet événement s'écrit sous la forme : $D = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{j=i}^{+\infty} F_j$.
On peut obtenir la probabilité de ces deux événements à l'aide du théorème de la limite monotone.

V. Formule des probabilités composées

V.1. Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $B \in \mathscr{A}$.

On suppose $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

On considère l'application $\mathbb{P}_B$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B & : & \mathscr{A} & \rightarrow & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \boxed{\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \end{array}$$

- $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, appelée **probabilité conditionnelle** relative à A.
- Pour tout événement A, $\mathbb{P}_B(A)$ (qu'on note aussi $\mathbb{P}(A \mid B)$) se lit : probabilité de A sachant (que l'événement) B (est réalisé).

V.2. Formule des probabilités composées

Énoncé de la formule pour deux événements A et B (c'est la définition précédente !)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$.

1) Supposons $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) \ = \ \mathbb{P}(B \mid A) \times \mathbb{P}(A)} \ = \ \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

2) Supposons $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \times \mathbb{P}(B)} \ = \ \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$

3) Ainsi, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$: $\boxed{\mathbb{P}(B \mid A) \times \mathbb{P}(A) \ = \ \mathbb{P}(A \mid B) \times \mathbb{P}(B)}$

Énoncé dans le cas général

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Soit $(A_1, \ldots, A_m) \in \mathscr{A}^m$.
On suppose : $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) \neq 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_m\big) \ = \ \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\ \mathbb{P}(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\ \ldots\ \mathbb{P}(A_m \mid A_{m-1} \cap \ldots \cap A_1)}$$

`À RETENIR`

Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

`Si l'événement` A `est réalisé, c'est que ...`
`Dans ce cas, l'événement` B `est réalisé si et seulement si ...`

VI. Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) Cas général

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I$ un système (quasi-)complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i\in I} \mathbb{P}\big(B\cap A_i\big) \ = \ \sum_{i\in I} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i)}$$

(avec la convention $\mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i) = 0$ si $\mathbb{P}(A_i) = 0$)

2) Cas d'un s(q)ce à deux événements

Soit $A \in \mathscr{A}$. Alors $\big(A, \overline{A}\big)$ est un système complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \mathbb{P}\big(B \cap A\big) + \mathbb{P}\big(B \cap \overline{A}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(B \,|\, A\big) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\big(B \,|\, \overline{A}\big) \times \mathbb{P}(\overline{A})}$$

3) Cas d'un s(q)ce à n événements

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système (quasi-)complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i)}$$

4) Cas d'un s(q)ce à une infinité d'événements

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système (quasi-)complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \ = \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i)}$$

5) Cas d'un s(q)ce associé à une variable discrète

Soit X une variable discrète. La famille $(\{X = x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(B \cap \{X = x\})}$$

Considérons une autre variable discrète Y.

Alors pour tout $y \in Y(\Omega)$: $\boxed{\mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \ = \ \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}\Big(\{Y = y\} \cap \{X = x\}\Big)}$

`À RETENIR`

Dans la formule des probabilités totales, la somme s'écrit à l'aide de `TOUS` les d'événements qui constituent le S(Q)CE. Ainsi, il y a autant de termes dans la somme que d'événements dans le S(Q)CE :

× si l'on considère un S(Q)CE noté $(A_i)_{i\in I}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i\in I} \dots$

× si l'on considère un S(Q)CE noté $(A_i)_{i\in[\![1,10]\!]}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i=1}^{10} \dots$

× si l'on considère un S(Q)CE noté $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dots$

VII. Indépendance en probabilité

VII.1. Indépendance de deux événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Deux événements A et B sont dits **indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$)** si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

- On peut exprimer cette propriété à l'aide de probabilités conditionnelles.

1) Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)}$

2) Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)}$

VII.2. Indépendance (mutuelle) d'une famille d'événements

a) Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathscr{A}^I$.

- On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **(mutuellement) indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$)** si :

$$\boxed{\forall J \subset N, \quad \left.\begin{array}{c} J \textbf{ fini} \\ J \subset I \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_i\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)}$$

- **Cas particulier d'une famille à trois événements**

Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si :

a) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$

b) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3)$

c) $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$

d) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$

b) Indépendance et passage à l'événement contraire

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A_1, \ldots, A_m) \in \mathscr{A}^m$.
Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons $B_i \in \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$ (autrement dit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$).

Les événements de la famille $(A_1, \ldots, A_m)$ sont (mutuellement) indépendants	$\Rightarrow$	Les événements de la famille $(B_1, \ldots, B_m)$ sont (mutuellement) indépendants

MÉTHODO **Calcul de probabilités** *(rappel / bilan des chapitres précédents)*

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans ce schéma. En effet, si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement B s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B \;=\; \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B \;=\; \bigcup_{i\in I} \big(A_i \cap B\big)$$

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
  On raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

  ~~$\mathbb{P}(A) = 0$ car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

  (cf démarche de l'exrcice sur la limite monotone)

- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

  ~~L'événement A signifie que ...~~

  L'événement A est réalisé si et seulement si ... ✓

- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

  Si l'événement A est réalisé, c'est que ...

  Dans ce cas, l'événement B est réalisé si et seulement si ...

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.

  1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
  On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega \;=\; \{P, F\}^3$.
  Autrement dit, Ω est l'ensemble des triplets à coefficitents dans l'ensemble $\{P, F\}$.
  Ces triplets pouront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).
  Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1^{er} lancer fournit $Face$, le $2^{\text{ème}}$ fournit $Face$, le $3^{\text{ème}}$ fournit $Pile$.

  2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement P_1 : « obtenir $Pile$ au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut P.

  $$P_1 \;=\; \{\; (P, F, F),\; (P, F, P),\; (P, P, F),\; (P, P, P)\; \}$$

  Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que ω **réalise** l'événement P_1.

  3) Au troisième niveau, on trouve les v.a. . Ce sont des **applications** particulières :

  – elles prennent comme argument **un résultat possible de l'expérience** et renvoient **une valeur réelle**. Consisdérons la v.a. X qui donne le nombre de Pile obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer ω précédent, on obtient : $X(\omega) = X\Big((P, F, F)\Big) = 1$.
  Cela démontre que la v.a. X peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer ω tel que $X(\omega) = 1$).

  – elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $\{X = 2\}$ est un événement.
  Il regroupe **tous** les 3-lancers ω tels que : $X(\omega) = 2$.
  Autrement dit : $\{X = 2\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{\; (P, P, F),\; (P, F, P),\; (F, F, P)\; \}$.

  Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.