Réductions des endomorphismes et des matrices carrées

Exercices classiques, méthodes usuelles

I. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

I.1. Notion de valeur propre et vecteur propre

1) Cas des endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit f un endomorphisme de E.

L'élément λ est valeur propre de f

$\Leftrightarrow$ Il existe $u \neq 0_E$ tel que $f(u) = \lambda \cdot u$

$\Leftrightarrow$ Il existe $u \neq 0_E$ tel que $(f - \lambda \operatorname{id}_E)(u) = 0_E$

$\Leftrightarrow$ Il existe $u \neq 0_E$ tel que $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E)$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \left\{0_E\right\}$

$\Leftrightarrow$ L'endomorphisme $f - \lambda \operatorname{id}_E$ n'est pas injectif

$\Leftrightarrow$ L'endomorphisme $f - \lambda \operatorname{id}_E$ n'est pas bijectif *(sous l'hypothèse que l'espace vectoriel E est de dimension finie)*

De manière générale, rappelons que si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, l'équivalence injectivité / surjectivité / bijectivité est vérifiée si :

- × les espaces vectoriels E et F sont de dimensions finies.
- × $\dim(E) = \dim(F)$.

2) Cas des matrices carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } A \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I_n) \times U = 0\right\} \neq \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\} \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{La matrice } A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}
\end{aligned}$$

3) Lien entre endomorphisme et matrice représentative

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Notons $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

λ est valeur propre de f $\Leftrightarrow$ λ est valeur propre de A donc $\operatorname{Sp}(f) = \operatorname{Sp}(A)$

Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ $\Leftrightarrow$ Le vecteur colonne U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

En particulier, dans le cas de la valeur propre 0, on peut écrire :

Le réel 0 est une valeur propre de f

$\Leftrightarrow$ $\text{Ker}(f) \neq \left\{0_E\right\}$

$\Leftrightarrow$ L'endomorphisme f n'est pas injectif

$\Leftrightarrow$ L'endomorphisme f n'est pas bijectif *(sous l'hypothèse que l'espace vectoriel E est de dimension finie)*

I.2. Sous-espaces propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que λ **est une valeur propre** de f (respectivement de A).

1) Cas des endomorphismes

On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E_\lambda(f) & = & \left\{u \in E \mid f(u) = \lambda \cdot u\right\} \\ & = & \left\{u \in E \mid (f - \lambda\text{id})(u) = 0_E\right\} \ = \ \text{Ker}(f - \lambda\text{id}) \end{array}}$$

$\boxed{E_\lambda(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$ de dimension $\boxed{\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1}$.

2) Cas des matrices carrées

On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E_\lambda(A) & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AU = \lambda \cdot U\} \\ & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \end{array}}$$

$\boxed{E_\lambda(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ de dimension $\boxed{\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1}$.

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\boxed{u \in E_\lambda(f) \ \Leftrightarrow \ f(u) = \lambda \cdot u \ \Leftrightarrow \ AU = \lambda \cdot U \ \Leftrightarrow \ U \in E_\lambda(A)}$$

Attention à la confusion : $E_\lambda(f) \ \neq \ \left\{\begin{array}{l}\text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda\end{array}\right\}$

La bonne définition est : $\boxed{E_\lambda(f) \ = \ \left\{\begin{array}{l}\text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda\end{array}\right\} \ \cup \ \{0_E\}}$

II. Détermination pratique des éléments propres

II.1. Détermination des valeurs propres : calcul du polynôme caractéristique

II.1.a) Définition et propriétés du polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f, le polynôme défini par :

$$\chi_f(X) \;=\; \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) \;=\; (-1)^n \det\big(f - X\,\mathrm{id}_E\big)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de f sa multiplicité en tant que racine de χ_f.
- Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique χ_f. Plus précisément :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \lambda \text{ valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \det(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \chi_f(\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine de } \chi_f \end{array}}$$

et $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \;=\; \{\text{racines de } \chi_f\}}$

*(**rappel** : si Q est un polynôme annulateur de f, alors : $\mathrm{Sp}(f) \;\subset\; \{\text{racines de } Q\}$)*

- Le théorème de Cayley-Hamilton stipule que le polynôme caractéristique χ_f de f est un polynôme annulateur de f : $\boxed{\chi_f(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}}$
- Le polynôme χ_f est unitaire de degré n et $\boxed{\chi_f(X) = X^n - \mathrm{tr}(f)\; X^{n-1} + \ldots + (-1)^n\; \det(f)}$

2) Cas des matrices carrées

- On appelle **polynôme caractéristique** de A, et on note χ_A, le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) \;=\; \det\big(X\,I_n - A\big) \;=\; (-1)^n \det\big(A - X\,I_n\big)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de A sa multiplicité en tant que racine de χ_A.
- Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique χ_A. Plus précisément :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \lambda \text{ valeur propre de } A & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \chi_A(\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine de } \chi_A \end{array}}$$

et $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \;=\; \{\text{racines de } \chi_A\}}$

*(**rappel** : si Q est un polynôme annulateur de A, alors : $\mathrm{Sp}(A) \;\subset\; \{\text{racines de } Q\}$)*

- Le théorème de Cayley-Hamilton stipule que le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme annulateur de A : $\boxed{\chi_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}$
- Le polynôme χ_A est unitaire de degré n et $\boxed{\chi_A(X) = X^n - \mathrm{tr}(A)\; X^{n-1} + \ldots + (-1)^n\; \det(A)}$

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors : $\boxed{\chi_f(X) \;=\; \chi_A(X)}$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Par ailleurs : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \;=\; \{\text{racines de } \chi_f\} \;=\; \{\text{racines de } \chi_A\} \;=\; \mathrm{Sp}(A)}$

Remarque

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $\text{Sp}(f) = \{\text{racines de } \chi_f\}$, on peut en conclure :
  - × l'endomorphisme f admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité.
  - × si n est impair alors f admet au moins une valeur propre.
  - × si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors f admet au moins une valeur propre.

II.1.b) Propriétés du polynôme caractéristique pour des matrices particulières

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) **Cas des matrices triangulaires (et a fortiori des matrices diagonales)**

$$\boxed{A \text{ triangulaire} \ \Rightarrow \ \chi_A(X) \ = \ \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})}$$

Ainsi : La matrice A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) $\Rightarrow$ Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux

2) **Cas de matrices semblables**

- Rappelons que deux matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.
  Autrement dit, M et N sont semblables s'il existe $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que :

$$M = \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) \qquad \text{et} \qquad N = \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$$

  On a alors, par la formule de changement de base :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) \times P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}$$

- Le point précédent permet de retrouver la définition usuelle de matrices semblables. Les matrices M et N sont semblables s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$M = PNP^{-1}$$

- Les matrices M et N sont semblables $\Rightarrow$ Les matrices M et N ont même polynôme caractéristique ($\chi_M = \chi_N$)

  En particulier, deux matrices semblables **ont mêmes valeurs propres**, même trace, même déterminant (et même rang).

II.1.c) Calcul sur un exemple

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 3.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

On considère f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- On détermine le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned}
\det(X\,I_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-2 & 2 & -1 \\ -2 & X+3 & -2 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & X \\ -2 & X+3 & -2 \\ X-2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (X-2)\,L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & X \\ 0 & X-1 & -2+2X \\ 0 & 2X-2 & -1-(X-2)\,X \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times (-1)^{1+1}\,1 \begin{vmatrix} X-1 & 2\,(X-1) \\ 2\,(X-1) & -X^2+2\,X-1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)\;(X-1) \begin{vmatrix} 1 & 2\,(X-1) \\ 2 & -(X-1)^2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)\;(X-1)\;(X-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -(X-1) \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_1 - 2\,L_1}{=} (-1)\;(X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -X-3 \end{vmatrix} \\
&= \cancel{(-1)}\;(X-1)^2\;\big(\cancel{-}(X+3)\big)
\end{aligned}$$

II.2. Détermination d'un sous-espace propre

II.2.a) Par résolution d'un système linéaire

On reprend l'exemple précédent.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminons $E_1(A)$ $(= \operatorname{Ker}(A - I_3))$.

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A - I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -\,x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 +\ L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \; x = 2y - z \right.
\end{aligned}$$

On en déduit : $E_1(A) = \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid U \in E_1(A)\}$

$$= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 2y - z\}$$

$$= \{\begin{pmatrix} 2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \ \texttt{ET} \ z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \ \texttt{ET} \ z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

II.2.b) Par lecture de données sur les matrices considérées

On reprend l'exemple précédent.

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I_3$.
  Illustrons la méthode avec $\lambda = 1$ et la matrice :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(A)$ c'est-à-dire ceux tels que : $(A - I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3$$
$$= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit alors de trouver des valeurs x, y et z telles que la combinaison linéaire ci-dessus soit nulle.

× Comme $C_1 = C_3$, en choisissant $y = 0$ et $x = -z$, la combinaison linéaire est bien annulée.
En particulier, en choisissant $x = 1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$$

× Comme $C_2 = -2\, C_1$, en choisissant $z = 0$ et $x = 2\, y$, la combinaison linéaire est bien annulée.
En particulier, en choisissant $y = 1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(A)$$

Finalement, on a démontré : $E_1(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) = \dim\big(\text{Ker}(A - I_3)\big) + \dim\big(\text{Im}(A - I_3)\big)$$
$$= \dim\big(E_1(A)\big) + \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\text{rg}\,\big(A - I_3\big)}$$

(par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

Ainsi : $\dim\big(E_1(A)\big) = 3 - 2 = 1$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

III. Théorèmes de réduction

III.1. Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

III.1.a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- Autrement dit, $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$.

2) Cas des matrices carrées

- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonalisable** si A est semblable à une matrice diagonale.
- Autrement dit, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonalisable** s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

III.1.b) Caractérisation de la diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f est diagonalisable	$\Leftrightarrow$	Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f

2) Cas des matrices carrées

La matrice carrée A est diagonalisable	$\Leftrightarrow$	Il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A

3) Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors :

L'endomorphisme f est diagonalisable	$\Leftrightarrow$	La matrice carrée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonalisable

III.2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

III.2.a) Critères de diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f.

L'endormorphisme f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ Il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale

$\Leftrightarrow$ Il existe une base $\mathscr{B}'$ de E constituée `DE` vecteurs propres de f

$\Leftrightarrow$ $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f)$

$\Leftrightarrow$ $\dim(E) = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim\big(E_{\lambda_i}(f)\big)$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \bullet\ \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \bullet\ \forall i \in [\![1, r]\!],\ \dim\big(E_{\lambda_i}(f)\big) = m_{\lambda_i}(f) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ L'endomorphisme f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples

$\Leftrightarrow$ $\prod\limits_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f

2) Cas des matrices carrées

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A.

La matrice carrée A est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ La matrice A est semblable à une matrice diagonale

$\Leftrightarrow$ Il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée `DE` vecteurs propres de A

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(A)$

$\Leftrightarrow$ $\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big)$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \bullet\ \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \bullet\ \forall i \in [\![1, r]\!],\ \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) = m_{\lambda_i}(A) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ La matrice A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples

$\Leftrightarrow$ $\prod\limits_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de A

Remarque

- Rappelons au passage la propriété suivante.

  Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ alors : $\boxed{\lambda \text{ de multiplicité } m \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant \dim\big(E_\lambda(f)\big) \leqslant m}$

  En particulier : $\boxed{\lambda \text{ racine simple de } \chi_f \quad \Rightarrow \quad \dim\big(E_\lambda(f)\big) = 1}$

- Comme $E_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}(f) \subset E$ alors on a toujours $\sum\limits_{i=1}^{m} \dim\big(E_{\lambda_i}(f)\big) \leqslant \dim(E)$.
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme / d'une matrice carrée sont toujours en somme directe.
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme f (resp. de A) sont stables par f (resp. A).
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ sont deux endomorphismes qui commutent alors les sous-espaces propres de f sont stables par g (et ceux de g sont stables par f).
- Rappelons que la stabilité par f d'un espace F influe sur la matrice représentative de F.
  Considérons un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
  Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $p = \dim(F)$.
  Il existe alors G sous-espace vectoriel de E tel que :

$$E = F \oplus G \tag{*}$$

  (si $\mathscr{B}_1 = (u_1, \ldots, u_p)$ est une base de F, c'est une famille libre de E qu'on peut compléter en une base $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n)$ de E ; il suffit alors de noter $G = \mathrm{Vect}\,(u_{p+1}, \ldots, u_n)$ pour conclure)

  × Alors, dans toute base $\mathscr{B}$ de E adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire dans toute base $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation d'une base $\mathscr{B}_F$ de F et d'une base $\mathscr{B}_G$ de G), la matrice représentative de f s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right)$$

  où :

  ▸ $A = \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$,

  ▸ $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$,

  ▸ $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

  On peut de plus préciser : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\Big(f\,\|_F\Big)$.

  × Si on ajoute l'hypothèse que l'espace vectoriel G est lui aussi stable par f, alors, dans toute base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $(*)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & (0) \\ \hline (0) & C \end{array}\right)$$

- Cette décomposition permet de démontrer que $\chi_{f\|_F}$ divise χ_f dès que F est un sous-espace vectoriel stable par f. En effet :

$$\begin{array}{rcl} \chi_f(X) & = & \det(X\ I_n - M) \\ & = & \left|\begin{array}{c|c} X\,I_p - A & -B \\ \hline (0) & X\,I_{n-p} - C \end{array}\right| \\ & = & \det(X\ I_p - A) \times \det(X\ I_{n-p} - C) \\ & = & \chi_A(X) \times \det(X\ I_{n-p} - C) \end{array}$$

III.2.b) Conditions suffisantes de diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{f \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est diagonalisable}}$$

$$\boxed{\chi_f \text{ est scindé à racines simples} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est diagonalisable}}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{A \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes} \quad \Rightarrow \quad A \text{ est diagonalisable}}$$

$$\boxed{\chi_A \text{ est scindé à racines simples} \quad \Rightarrow \quad A \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque

En réalité, ces deux résultats sont les mêmes. En effet :

$$\boxed{f \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_f \text{ est scindé à racines simples}}$$

III.2.c) Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est diagonalisable} \\ f \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad f = \lambda \, \mathrm{id}_E}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \text{ est diagonalisable} \\ A \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad A = \lambda \, I_n}$$

III.3. Caractère diagonalisable des matrices symétriques

III.3.a) Éléments propres d'un endomorphisme auto-adjoint

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée de E.

Alors, f est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) dans une base orthonormée.
Autrement dit, il existe une BON $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice diagonale réelle.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) \ = \ P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_0}} \qquad \text{avec } P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

1. Si F est une sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par l'endomorphisme canoniquement associé à S, alors $F^{\perp}$ (pour le produit scalaire canonique) est stable par cet endomorphisme.

2. Les valeurs propres (complexes) de S sont toutes réelles.

3. Les sous-espaces propres réels de S sont 2 à 2 orthogonaux (pour le produit scalaire canonique).

III.3.b) Théorème spectral

Théorème spectral

Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

Alors, f est diagonalisable dans une base orthonormée.

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe :

× une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,

× une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

telles que : $M = P\,D\,P^T$.

IV. Trigonalisation des endomorphismes et des matrices carrées

IV.1. Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est triangulaire.
- Autrement dit, $f \in \mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une matrice triangulaire $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = T$.

2) Cas des matrices carrées

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **trigonalisable** s'il existe une matrice P inversible et une matrice T triangulaire telles que :

$$A = PTP^{-1}$$

3) Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors :

$$\boxed{f \text{ est trigonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est trigonalisable}}$$

IV.2. Caractérisation de la trigonalisabilité

IV.2.a) Trigonalisabilité des matrices complexes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{f \text{ est trigonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K}}$$

Comme tout polynôme (notamment χ_f) est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\text{Tout endomorphisme d'un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel est trigonalisable sur } \mathbb{C}}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{A \text{ est trigonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K}}$$

Comme tout polynôme (notamment χ_A) est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{C}}$$

IV.2.b) Expression du déterminant / de la trace en fonction des valeurs propres complexes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f est trigonalisable	$\Rightarrow$	La somme des valeurs propres de f, comptées avec leurs multiplicités, vaut $\mathrm{tr}(f)$

L'endomorphisme f est trigonalisable	$\Rightarrow$	Le produit des valeurs propres de f, comptées avec leurs multiplicités, vaut $\det(f)$

En particulier, comme tout endomorphisme de E est trigonalisable sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\mathrm{tr}(f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} m_\lambda(f) \times \lambda} \quad \text{et} \quad \boxed{\det(f) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda^{m_\lambda(f)}}$$

2) Cas des matrices carrées

La matrice A est trigonalisable	$\Rightarrow$	La somme des valeurs propres de A, comptées avec leurs multiplicités, vaut $\mathrm{tr}(A)$

La matrice A est trigonalisable	$\Rightarrow$	Le produit des valeurs propres de A, comptées avec leurs multiplicités, vaut $\det(A)$

En particulier, comme toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} m_\lambda(A) \times \lambda} \quad \text{et} \quad \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda^{m_\lambda(A)}}$$

Exercice
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\mathrm{tr}(M^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ où les λ_k sont les valeurs propres de M, répétées avec leur multiplicité.

Démonstration.

- Le polynôme χ_M est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il est donc scindé. On en déduit que la matrice M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Ainsi, il exsite :
  × $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,
  × $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire et dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres **complexes** de M,

  tels que : $M = P\,T\,P^{-1}$.
- On en déduit : $M^2 = \left(P\,T\,P^{-1}\right)^2 = \left(P\,T\,P^{-1}\right) \times \left(P\,T\,P^{-1}\right) = P\,T^2\,P^{-1}$.
  Finalement : $\mathrm{tr}\left(M^2\right) = \mathrm{tr}\left(P\,T^2\,P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(T^2\right) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} \lambda^2$. □