# Séries entières

Exercices classiques, méthodes usuelles

## I. Notion de série entière

### I.1. Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite à coefficients réels ou complexes.

- Une **série entière** de la variable complexe est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & a_n\, z^n \end{array}$$
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n\, z^n}$.
On note généralement $S : z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\ z^n$ la fonction somme de cette série entière.
- Une **série entière** de la variable réelle est une série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & a_n\, x^n \end{array}$$
(plus précisément, $f_n$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f_n$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$ si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)
Par abus de notation, on notera cette série entière $\boxed{\sum a_n\, x^n}$.
On note généralement $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\ x^n$ la fonction somme de cette série entière.
- Les coefficients de la suite $(a_n)$ sont appelés **coefficients** de la série.

### I.2. Rayon de convergence d'une série entière

#### I.2.a) Définition

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière.
On note $E_a$ l'ensemble défini par :
$$\begin{array}{rcl} E_a & = & \left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } \big(a_n\, r^n\big) \text{ est bornée} \right\} \\ & = & \left\{ |\,z\,| \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } \big(a_n\, z^n\big) \text{ est bornée} \right\} \end{array}$$

- On appelle rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n\, z^n$ l'élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ défini par :
  × $R = \sup\, \big(E_a\big)$ si l'ensemble $E_a$ est majoré,
  × $R = +\infty$ si l'ensemble $E_a$ n'est pas majoré.

## I.2.b) L'ensemble $E_a$ est l'intervalle $[0, R|$

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons :

- × $R$ le rayon de convergence de cette série entière.
- × $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{La suite numérique } (a_n z^n) \text{ est bornée}\}$
- × $E_a = \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } (a_n r^n) \text{ est bornée} \}$

***0.*** Si $R = +\infty$ alors :

- × pour tout $r \geqslant 0$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée.
- × pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n z^n)$ est bornée.

On suppose maintenant $R \neq +\infty$.

***1. a)*** Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}_+$ : $\boxed{r_0 < R \quad \Rightarrow \quad \text{La suite numérique } (a_n {r_0}^n) \text{ est bornée}}$

Cela démontre : $\boxed{[0, R[ \subset E_a}$

***b)*** Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ : $\boxed{|z_0| < R \quad \Rightarrow \quad \text{La suite numérique } (a_n {z_0}^n) \text{ est bornée}}$

Cela démontre : $\boxed{\mathscr{B}(0, R) \subset D_a}$

***2. a)*** Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}_+$ :

$\boxed{r_0 > R \quad \Rightarrow \quad \text{La suite numérique } (a_n {r_0}^n) \text{ N' est PAS bornée}}$

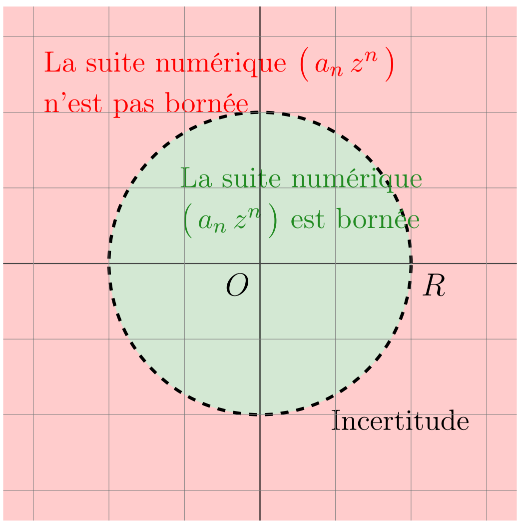
Cela démontre : $\boxed{]R, +\infty[ \subset \overline{E_a}}$ et donc $\boxed{E_a \subset [0, R]}$

***b)*** Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ :

$\boxed{|z_0| > R \quad \Rightarrow \quad \text{La suite numérique } (a_n {z_0}^n) \text{ N' est PAS bornée}}$

Cela démontre : $\boxed{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{B}(0, R)} \ \subset \ \mathbb{C} \setminus \overline{D_a}}$ et donc $\boxed{\overline{D_a} \ \subset \ \overline{\mathscr{B}(0, R)}}$

**Représentation graphique associée (cas $R \neq +\infty$) - ce qu'il faut retenir du résultat précédent**



### I.2.c) Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

| | | |
|---|---|---|
| La suite numérique $(a_n z_0{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée | $\Rightarrow$ | Pour tout $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$ la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument |

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

***0.*** Cas où $R = +\infty$

Dans ce cas, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum a_n z_0{}^n$ est convergente.

On suppose maintenant $R \neq +\infty$.

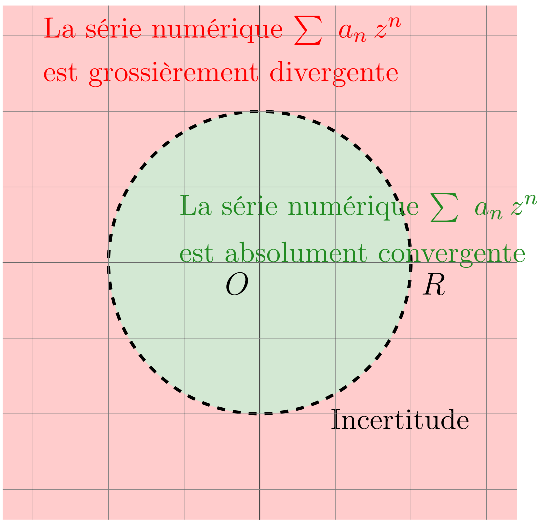
***1. a)*** Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ : $r < R \Rightarrow$ La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente

***b)*** Pour tout $z \in \mathbb{C}$ : $\lvert z \rvert < R \Rightarrow$ La série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente

***2. a)*** Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ : $r > R \Rightarrow$ La série numérique $\sum a_n r^n$ est grossièrement divergente

***b)*** Pour tout $z \in \mathbb{C}$ : $\lvert z \rvert > R \Rightarrow$ La série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente

**Représentation graphique du schéma de convergence (cas $R \neq +\infty$)**



Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Notons $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

- On appelle **disque ouvert de convergence** le disque de centre 0 et de rayon $R$ c'est-à-dire l'ensemble défini par :

$$\mathscr{B}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

- Dans le cas d'une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ de rayon $R$, appelle **intervalle ouvert de convergence** le disque de centre 0 et de rayon $R$ c'est-à-dire l'ensemble défini par :

$$\mathscr{B}(0, R) \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x < R\} \ = \, ]-R, R[$$

Le théorème précédent permet de justifier, après coup, la terminologie **rayon de convergence**. Dans le cas où $R \neq +\infty$, le rayon de conevrgence $R$ d'une série entière est l'unique réel $R \geqslant 0$ tel que :

× pour tout $|\,z\,| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

× pour tout $|\,z\,| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

## I.3. Estimation du rayon de convergence

### I.3.a) Majoration / minoration du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On note $R$ son rayon de convergence.

***1.*** Minoration du rayon de convergence

| | | |
|---|---|---|
| ***a)*** | Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z_0{}^n$ est (absolument) convergente | $\Rightarrow \ R \ \geqslant \ |z_0|$ |
| ***b)*** | Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée | $\Rightarrow \ R \ \geqslant \ |z_0|$ |
| ***c)*** | Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z_0{}^n = 0$ | $\Rightarrow \ R \ \geqslant \ |z_0|$ |

***2.*** Majoration du rayon de convergence

| | | |
|---|---|---|
| ***a)*** | Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n z_0{}^n$ est (grossièrement) divergente | $\Rightarrow \ R \ \leqslant \ |z_0|$ |
| ***b)*** | Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée | $\Rightarrow \ R \ \leqslant \ |z_0|$ |
| ***c)*** | Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $\big(a_n z_0{}^n\big)$ ne converge pas vers 0 | $\Rightarrow \ R \ \leqslant \ |z_0|$ |

### I.3.b) Détermination du rayon de convergence par comparaison des coefficients des séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note $R_a$ et $R_b$ les rayons respectifs de ces séries entières.

*1)* $\boxed{\left(\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n|\right) \Rightarrow \mathrm{R_{cv}}\left(\sum a_n z^n\right) \geqslant \mathrm{R_{cv}}\left(\sum b_n z^n\right)}$

*2)* $\boxed{a_n = \underset{n\to+\infty}{O}(b_n) \Rightarrow \mathrm{R_{cv}}\left(\sum a_n z^n\right) \geqslant \mathrm{R_{cv}}\left(\sum b_n z^n\right)}$

*3)* $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \Rightarrow \mathrm{R_{cv}}\left(\sum a_n z^n\right) = \mathrm{R_{cv}}\left(\sum b_n z^n\right)}$

**Exercice 1** *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

*1.* Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

*2.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ ? Justifier.

*3.* Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ ?

### I.3.c) Règle de d'Alembert

Rappel de la règle pour les séries numériques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que les termes de $(u_n)$ sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (la suite numérique $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ est convergente ou diverge vers $+\infty$).

Alors *1)* $0 \leqslant \ell < 1 \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (absolument) convergente

*2)* $\ell > 1 \Rightarrow$ La série numérique $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente

Règle spécifique aux séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On suppose que les termes de $(a_n)$ sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

Supposons : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in [0, +\infty]$.

Alors $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum a_n z^n\right) = \dfrac{1}{L}$.

*(avec la convention* $\dfrac{1}{0} = +\infty$ *et* $\dfrac{1}{+\infty} = 0$*)*

### I.3.d) Quelques exemples

**Exercice 2**
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

*1.* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3n}{n+2} x^n$.

*2.* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n}\, x^{2n}$.

*3.* $\sum a_n\, x^n$ où la suite $(a_n)$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

*Démonstration.*

*1.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{\left| \frac{3(n+1)}{(n+1)+2} \right|}{\left| \frac{3n}{n+2} \right|} \\ &= \frac{3n+3}{n+3}\ \frac{n+2}{3n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n\times n}{n\times 3n} \\ &= 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

On en déduit, par la règle de d'Alembert, que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3n}{n+2} x^n$ est de rayon de convergence : $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

*2.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0) = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n}\, {x_0}^{2n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| &= \frac{\left| \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{n+1}\ {x_0}^{2\,(n+1)} \right|}{\left| \frac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n} \right|} \\ &= \frac{|\,\mathrm{ch}(n+1)\,|}{|\,\mathrm{ch}(n)\,|} \times \frac{|\,n\,|}{|\,n+1\,|} \times \frac{|\,x_0\,|^{2n+2}}{|\,x_0\,|^{2n}} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)}\ \frac{n}{n+1}\ |x_0|^2 \end{aligned}$$

Or :

- $\dfrac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{-(n+1)}}{\cancel{2}}\ \dfrac{\cancel{2}}{\mathrm{e}^{n} + \mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^{n}} = \mathrm{e}^1$
- $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1$

Finalement : $\dfrac{|\,u_{n+1}(x_0)\,|}{|\,u_n(x_0)\,|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^1 \times 1 \times |\,x_0\,|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1\ |\,x_0\,|^2$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^1\ |\,x_0\,|^2 < 1 \ &\Leftrightarrow\ |\,x_0\,|^2 < \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &\Leftrightarrow\ |\,x_0\,| < \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \quad \textit{(car la fonction racine est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \end{aligned}$$

- D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|\,x_0\,| < \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est absolument convergente.
  On en déduit : $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
- D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|\,x_0\,| > \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est grossièrement divergente.
  On en déduit : $R \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } R = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.}$$

*3.* • Tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\,a_n\,|\ \leqslant\ 4$$

On en déduit que le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum\ a_n\ x^n$ est supérieur au rayon de convergence de la série entière $\sum\ 4\ x^n$.
Ainsi : $R \geqslant 1$.

• Par ailleurs, la série $\sum\ a_n\ (1)^n$ (c'est-à-dire la série $\sum\ a_n$) est grossièrement divergente puisque la suite $(a_n)$ n'admet pas de limite (en particulier $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$).
On en déduit : $R \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } R = 1.}$$

□

**Exercice 3** *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

*1.* Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

*2.* Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries suivantes :

*a)* $\sum\ \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\ z^{2n+1}$.

*b)* $\sum\ n^{(-1)^n}\ z^n$

*c)* $\sum\ \cos(n)\ z^n$

**Exercice 4** *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|\,a_{n+1}\,|}{|\,a_n\,|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

*1.* Démontrer que les séries entières $\sum\ a_n x^n$ et $\sum\ (n+1)\,a_{n+1}\ x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note $R$.

*2.* Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R\,[$.

## I.4. Opérations sur les séries entières

### I.4.a) Multiplication par un scalaire du terme général d'une série entière

Soient $\sum\ a_n\,z^n$ et $\sum\ b_n\,z^n$ deux séries entières.

On note $R_a$ et $R_b$ les rayons respectifs de ces séries entières.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum\ \lambda\,a_n\,z^n$ a pour rayon de convergence $R_a$.

De plus : $\boxed{\forall\,|z| < R_a,\ \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n\ z^n\ =\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big(\lambda\,a_n\big)\ z^n}$

### I.4.b) Somme de deux sommes de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note $R_a$ et $R_b$ les rayons respectifs de ces séries entières.

- La série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a \neq R_b$, alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

De plus : $\boxed{\forall |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{k=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(a_n + b_n\big) z^n}$

**Exercice 5** *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*
Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivante, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

***1.*** $\sum_{n \geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

***2.*** $\sum a_n x^n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

**Exercice 6** *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

***1.*** Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

***2.*** Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x) + \ln(1 - 2x)$.
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$ ? $x = \frac{1}{2}$ ? $x = -\frac{1}{2}$ ?

### I.4.c) Produit de Cauchy des sommes de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

On note $R_a$ et $R_b$ les rayons respectifs de ces séries entières.

On note $(c_n)$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

***1.*** La série $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.

***2.*** De plus : $\boxed{\forall |z| < \min(R_a, R_b),\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j\right)}$

## I.5. Convergence normale sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle.

On note $R$ le rayon de convergence de cette série entière.

La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur `TOUT SEGMENT` de $]-R, R[$

*(ce qui* `N`*'implique* `PAS` *la convergence normale sur* $]-R, R[$*)*

Autrement dit, pour tout $(a, b) \in\ ]-R, R[^2$ tel que $a < b$ :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est bornée sur le segment $[a, b]$.

× la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ est convergente.

## I.6. Régularité de la fonction somme d'une série entière

### I.6.a) Continuité de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière.

Notons $R$ son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ de la série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$

Alors la fonction $f$ est continue sur $]-R, R[$.

### I.6.b) Caractère $\mathscr{C}^1$ de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière.

Notons $R$ son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

*1.* La somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$.

*2.* Pour tout $x \in\, ]-R, R[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$.

### I.6.c) Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière.

Notons $R$ son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

*1.* La somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

*2.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\forall x \in\, ]-R, R[,\ f^{(k)}(x) \ = \ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, x^{n-k}$$

## I.7. Primitive de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière.

Notons $R$ son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

*1)* Pour `TOUT SEGMENT` $[a, b] \subset\ ]-R, R[$, on peut intervertir les symboles $\int_a^b$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$. Plus précisément :

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \right) dt \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b a_n\, t^n\, dt \right)$$

*2)* En particulier :

$$\boxed{\forall x\ ]-R, R[,\ \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \right) dt \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_0^x a_n\, t^n\, dt \right) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

**Exemple**

Ce théorème permet notamment de retrouver rapidement les développements en série entière de arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$.

- Développement de la fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$ :
  - × Rappelons tout d'abord que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

  - × Or la série entière $\sum (-x^2)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in\ ]-1, 1[$ :

$$\frac{1}{1+x^2} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2n}$$

  - × D'après la propriété précédente, pour tout $x \in\ ]-1, 1[$ :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \;=\; \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^{2n} \right) dt \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt \right)$$

  Finalement :

$$\boxed{\forall x \in\ ]-1, 1[,\ \arctan(x) - \cancel{\arctan(0)} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

- Développement de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ :
  - × Rappelons tout d'abord que la fonction $f$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

  - × Or la série entière $\sum (-x)^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in\ ]-1, 1[$ :

$$\frac{1}{1+x} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n$$

× D'après la propriété précédente, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \;=\; \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, t^n\right) dt \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^n\,dt\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \ln(1+x) - \cancel{\ln(1+0)} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

**Exercice 7** *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

*1.* Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\; 2^{4n}\; (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

*2.* Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
**Remarque** : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

*3.* En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.

*4.* En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\; 2^{4n}\; (2n+1)}$.

## I.8. Expression et unicité des coefficients d'une série entière

Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière.

Notons $R$ son rayon de convergence.

On suppose $R > 0$ et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}}$$

Soient $\sum a_n\, x^n$ et $\sum b_n\, x^n$ deux séries entières.

On note $R_a$ et $R_b$ leurs rayons de convergence respectifs.

On suppose $R_a > 0$ et $R_b > 0$.

On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]-r,r\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$$

Alors : $\forall m \in \mathbb{N}$, $a_m = b_m$.

# II. Développement en série entière

## II.1. Cas des fonctions d'une variable réelle

### II.1.a) Définition

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur $I$.

Soit $r > 0$.

- On dit que $f$ est **développable en série entière** sur l'intervalle $]-r,r[$ s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \,]-r,r[,\ f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

- Autrement dit, une fonction $f$ est **développable en série entière** sur l'intervalle $]-r,r[$ si elle coïncide avec la somme d'une série entière sur l'intervalle $]-r,r[$.

### II.1.b) Fonctions développables en série entière

**Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $I$ (intervalle contenant 0) dans $\mathbb{R}$.

On appelle **série de Taylor** de $f$ en 0 la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$.

**Fonctions développables en série entière**

*1)* Soit $f$ une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$. Alors :

*(i)* la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$,

*(ii)* la série de Taylor de $f$ en 0 a un rayon de convergence supérieur à $r$,

*(iii)* la fonction $f$ est égale à la somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

$$\forall x \in \,]-r,r[,\ f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

En particulier, le développement en série entière de $f$ au voisinage de 0 est unique.

*2)* Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$.
Alors la fonction $f$ est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si elle est sa somme de sa série de Taylor. Autrement dit :

$$\begin{aligned} f \text{ développable en série entière sur } ]-r,r[ \ &\Leftrightarrow\ \forall x \in \,]-r,r[,\ f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \\ &\Leftrightarrow\ \forall x \in \,]-r,r[,\ \lim_{N\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!}\, f^{(N+1)}(t)\, dt = 0 \end{aligned}$$

## II.2. Détermination pratique de développements en série entière

Il s'agit ici, partant de l'expression d'une fonction $f$, de déterminer son éventuel développement en série entière au voisinage de 0.

`MÉTHODO` **Déterminer un développement en série entière**

Pour déterminer le développement en série entière d'une fonction $f$, on pourra utiliser une ou plusieurs des méthodes suivantes :

*1)* utiliser la série de Taylor de $f$ en 0.

*2)* effectuer une combinaison linéaire de sommes de séries entières.

*3)* effectuer un produit de Cauchy de séries entières.

*4)* dériver ou primitiver la fonction somme d'une série entière (*cf* exemples de la Partie **I.6.**).

*5)* utiliser une équation différentielle (*cf* section suivante).

**Exercice 8** *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose $f : x \mapsto \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$

*1.* Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

*2.* En déduire que $f$ est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité $D$ de ce développement en série entière.

*3.* *a)* Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

On pose, pour tout $x \in \,]-R,R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

Exprimer, pour tout entier $p$, en le prouvant, $a_p$ en fonction de $g^{(p)}(0)$.

*b)* En déduire le développement limité de $f$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

**Exercice 9** *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

*1.* Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

*2.* Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

*3.* *a)* Déterminer $S(x)$.

*b)* On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ \text{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démontrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

## II.3. Formulaire de développements en série entière

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

| Développement en série entière | Rayon de convergence |
|---|---|
| $\forall x \in \,]-\infty,+\infty[,\quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ | $R=+\infty$ |
| $\forall x \in \,]-\infty,+\infty[,\quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $R=+\infty$ |
| $\forall x \in \,]-\infty,+\infty[,\quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ | $R=+\infty$ |
| $\forall x \in \,]-\infty,+\infty[,\quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $R=+\infty$ |
| $\forall x \in \,]-\infty,+\infty[,\quad \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ | $R=+\infty$ |
| $\forall x \in \,]-1,1[,\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ | $R=1$ |
| $\forall x \in \,]-1,1[,\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ | $R=1$ |
| $\forall x \in \,]-1,1[,\quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$ | $R=1$ |
| $\forall x \in \,]-1,1[,\quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ | $R=1$ |
| $\forall x \in \,]-1,1[,\quad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)}\, x^{2n+1}$ | $R=1$ |

**Remarque**

- Généralement, la formule donnant le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ est utilisée pour des valeurs de $\alpha$ réelles non entières. On peut aussi remarquer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N},\ (1+x)^m \ = \ 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\, x^n \ = \ \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n$$

$$\forall x \in \,]-1,1[, \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(1-x)^m} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n \qquad \textit{(formule du binôme négatif)}$$

## II.4. Quelques développements en série entière d'une variable complexe

| Développement en série entière | Rayon de convergence |
|---|---|
| $\forall z \in \mathbb{C},\quad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ | $R=+\infty$ |
| $\forall \lvert z\rvert < 1,\quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ | $R=1$ |

**Continuité de la somme, cas complexe**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe.

Alors la fonction $z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

**Exercice 10**
Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3n}{n+2} x^n$.

*Démonstration.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{3(n+1)}{(n+1)+2}}{\frac{3n}{n+2}}\right| = \frac{3n+3}{n+3}\,\frac{n+2}{3n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n\times n}{n\times 3n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On en déduit, par la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3n}{n+2} x^n$ est de rayon de convergence $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

- Déterminons maintenant la somme de cette série entière. Soit $x \in \,]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}\,x^n &= 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+2}\,x^n \\
&= 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)-2}{n+2}\,x^n \\
&= 3\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^n - 2\,\frac{1}{n+2}\,x^n\right) \\
&= 3\sum_{n=1}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\,x^n
\end{aligned}$$

*(par linéarité et car les séries entières $\sum x^n$ et $\sum \frac{1}{n+2}\,x^n$ sont toutes deux de rayon de convergence 1)*

- D'autre part :
  - × pour tout $x \in \,]-1,1[$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

  - × pour tout $x \in \,]-1,1[\,\setminus\{0\}$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\,x^n &= \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\,x^{n+2} \\
&= \frac{1}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}\,x^n \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,x^n - \frac{1}{1}\,x - \frac{1}{2}\,x^2\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(-\ln(1-x) - \frac{1}{1}\,x - \frac{1}{2}\,x^2\right)
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}\ x^n \ = \ \begin{cases} 3\ \dfrac{x}{1-x} + 2\ \dfrac{\ln(1-x)}{x^2} + 2\ \dfrac{1}{x} + 1 & si\ x \in\ ]-1,1[\ \setminus\{0\} \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

□

**Exercice 11**
Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n} x^{2n}$.

*Démonstration.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0) = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

$$\left|\frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)}\right| \ = \ \left|\frac{\frac{\mathrm{ch}(n+1)}{n+1}\ {x_0}^{2\,(n+1)}}{\frac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ {x_0}^{2n}}\right| \ = \ \left|\frac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)}\right| \times \left|\frac{n}{n+1}\right| \times \left|\frac{{x_0}^{2n+2}}{{x_0}^{2n}}\right| \ = \ \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)}\ \frac{n}{n+1}\ {x_0}^2$$

  Or :
  × $\dfrac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)} \ = \ \dfrac{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{-(n+1)}}{\cancel{2}}\ \dfrac{\cancel{2}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} \ \underset{n\to+\infty}{\sim} \ \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} \ = \ \mathrm{e}^1$
  × $\dfrac{n}{n+1} \ \underset{n\to+\infty}{\sim} \ \dfrac{n}{n} = 1$
  Finalement : $\left|\dfrac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)}\right| \ \underset{n\to+\infty}{\sim} \ \mathrm{e}^1 \times 1 \times {x_0}^2 \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ \mathrm{e}^1\ {x_0}^2$.

- D'après le critère de d'Alembert sur les séries numériques, la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est absolument convergente dans le cas où : $0 \leqslant \mathrm{e}^1\ {x_0}^2 < 1$ (et divergente si $\mathrm{e}^1\ {x_0}^2 > 1$).
  On en conclut que le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n} {x_0}^{2n}$ est le réel positif défini par : $\mathrm{e}^1\ R^2 \ = \ 1$. Or :

$$\mathrm{e}^1\ R^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ R^2 = \frac{1}{\mathrm{e}^1} \ \Leftrightarrow \ R = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^1}}$$

- Déterminons maintenant la somme de cette série entière. Soit $x \in \ \left]-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^1}}, \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^1}}\right[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ x^{2n} \ &= \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2n} \right)\ \left(x^2\right)^n \\
&= \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n}\ \mathrm{e}^n\ \left(x^2\right)^n + \frac{1}{2n}\ \mathrm{e}^{-n}\ \left(x^2\right)^n \right) \\
&= \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n}\ \left(\mathrm{e}^1\ x^2\right)^n + \frac{1}{2n}\ \left(\mathrm{e}^{-1}\ x^2\right)^n \right) \\
&= \ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ \left(\mathrm{e}^1\ x^2\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ \left(\mathrm{e}^{-1}\ x^2\right)^n \\
&= \ -\frac{1}{2}\ \ln\left(1 - \mathrm{e}^1\ x^2\right) - \frac{1}{2}\ \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\ x^2\right)
\end{aligned}$$

*(par linéarité et car les séries entières considérées sont toutes de rayon de convergence d'au moins $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$)*

□

**Exercice 12**
Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\ a_n\ x^n$ où la suite $(a_n)$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

*Démonstration.*

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$|\, a_n \,| \ \leqslant\ 4$$
On en déduit que le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum\ a_n\ x^n$ est supérieur au rayon de convergence de la série entière $\sum\ 4\ x^n$.
Ainsi : $R \geqslant 1$.
- La série $\sum\ a_n\ (1)^n$ (c'est-à-dire la série $\sum\ a_n$) est grossièrement divergente puisque la suite $(a_n)$ n'admet pas de limite (en particulier $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$).
On en déduit : $R \leqslant 1$.
$$\boxed{\text{Finalement : } R = 1.}$$
- Déterminons maintenant la somme de cette série entière. Soit $x \in\ ]-1, 1[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ x^n &= \sum_{\substack{n\,=\,1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} a_n\ x^n \ +\ \sum_{\substack{n\,=\,1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n\ x^n \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} a_{2i}\ x^{2i} \ +\ \sum_{j=0}^{+\infty} a_{2j+1}\ x^{2j+1} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} 4\ x^{2i} \ +\ \sum_{j=0}^{+\infty} 3\ x^{2j+1} \\
&= 4 \sum_{i=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^i \ +\ 3\,x \sum_{j=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^j \\
&= 4\ \frac{1}{1-x^2} \ +\ 3\,x\ \frac{1}{1-x^2} \ =\ \frac{4+3\,x}{1-x^2}
\end{aligned}$$

□

## II.5. Application aux équations différentielles

Une équation différentielle étant donnée, on peut chercher des solutions développables en série entière.

`MÉTHODO` **Déterminer les fonctions développables en série entière solutions d'une équation différentielle**

Afin de trouver les fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$ solutions d'une équation différentielle $(E)$, on suit la méthodologie suivante :

*1)* on écrit les dérivées successives de $f$ sous forme de sommes.

*2)* on travaille alors uniquement sur la quantité à gauche du symbole d'égalité. Dans celle-ci, on développe toutes les quantités en $x$ et on distribue sur les dérivées. Typiquement, si l'équation différentielle s'écrit :
$$x(x-1)\ f''(x) - f'(x) + (x-1)f(x) = 0$$
on commence à effectuer le calcul de la quantité $x(x-1)\ f''(x) - f'(x) + (x-1)f(x)$ (sans écrire l'égalité à 0) et on la fait apparaître sous la forme :
$$x^2\ f''(x) - x\ f''(x) - f'(x) + xf(x) - f(x) \qquad (*)$$

*3)* on remplace les expressions $f^{(k)}(x)$ par leurs écritures sous forme de sommes et on distribue les $x$ dans les sommes. Par exemple, $x^2\ f'(x)$ s'écrira :

$$x^2\ f'(x) \ = \ x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n+1}$$

*4)* à ce stade, la quantité $(*)$ s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de sommes. Celles-ci font apparaître des puissances différentes de $x$. On effectue alors tous les décalages d'indices permettant de faire apparaître $x^n$ dans chacune des sommes. Typiquement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n+1} \ = \ \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\, a_{n-1}\, x^n$$

**Attention à bien modifier les indices des coefficients !**

*5)* on obtient alors une combinaison linéaire de sommes, faisant toutes apparaître $x^n$ (et pas d'autres quantités en $x$). Ces sommes ne commencent pas toutes au même indice. On considère alors $m$ **le plus grand indice de début de sommation des sommes**. Les sommes qui commencent par un indice plus petit sont développées afin de ne faire apparaître que des sommes commençant en $m$. Typiquement, si $m = 2$ alors la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ (si elle est présente) sera écrite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \ = \ a_0 + a_1\, x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\, x^n$$

*6)* on obtient alors des quantités isolées qu'on regroupe selon les puissances de $x$. Cela peut avoir une forme comme :

$$(a_0 - 2\, a_1) + (a_2 - a_3)\, x$$

Les autres quantités sont toutes regroupées au sein d'une même somme qui s'écrit sous la forme (cas $m = 2$) :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n\ x^n$$

À ce stade, le calcul est fini.

*7)* on rappelle alors que $f$ est solution de l'équation différentielle, ce qui démontre :

$$\forall x \in \,]-r, r[,\ (a_0 - 2\, a_1) + (a_2 - a_3)\, x \ + \ \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\ x^n \ = \ 0$$

*(on prend garde de bien écrire dans l'ordre croissant des puissances de $x$ et on n'oublie pas de quantifier !)*

*8)* on conclut alors, **par unicité du développement en série entière** que tous les coefficients sont nuls. Dans ce qui précède, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 - 2\, a_1 \ = \ 0 \\ a_2 - a_3 \ = \ 0 \\ \forall n \geqslant 2,\ b_n = 0 \\ \textit{(on n'oublie pas de quantifier !)} \end{array} \right.$$

Cette méthodologie peut apparaître longue. Elle l'est uniquement car elle détaille des étapes qui coulent de source. **Il est attendu que cette méthodologie soit appliquée de manière stricte, sans oubli des arguments, ce qui permettra de conclure.**

**Exercice 13**

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' - y = 0 \tag{E}$$

***1.*** On suppose qu'il existe une fonction $f$ solution de $(E)$ et développable en série entière. Autrement dit, il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, telle que :

× $f$ est solution de $E$,

× $\forall x \in \,]-R, R[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

***a)*** Déterminer alors une relation entre $a_{n+1}$ et $a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***b)*** En déduire l'expression des termes de la suite $(a_n)$ en fonction de $a_0$.

***2.*** Réciproquement, on note $g : x \mapsto \alpha \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

***a)*** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

***b)*** Démontrer que $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

*Démonstration.*

***1. a)*** • Comme $f$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Elle est donc en particulier deux fois dérivable sur cet intervalle.
De plus, comme $f$ est solution de $(E)$, pour tout $x \in \,]-R, R[$ :

$$4x\, f''(x) + 2\, f'(x) - f(x) \ = \ 0$$

• Soit $x \in \,]-R, R[$. Calculons :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& 4x\, f''(x) + 2\, f'(x) - f(x) \\
= \ & 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \ & \sum_{n=2}^{+\infty} \big(4\, n\,(n-1)\, a_n\big)\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(2\, n\, a_n\big)\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \ & \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\, n\, a_{n+1}\big)\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \big(2\,(n+1)\, a_{n+1}\big)\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \ & 2\, a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\, n\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n\big)\, x^n
\end{aligned}$$

• Comme $f$ est solution de $(E)$ :

$$\forall x \in \,]-R, R[,\ 2\, a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4\,(n+1)\, n\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n\big)\, x^n \ = \ 0$$

On en déduit, par unicité du développement en série entière :

$$\begin{cases} 2\, a_1 - a_0 \ = \ 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4\,(n+1)\, n\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n = 0 \end{cases}$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{array}{lrcl} & 4\,(n+1)\,n\,a_{n+1} + 2\,(n+1)\,a_{n+1} - a_n & = & 0 \\ \text{donc} & 2\,(n+1)\,(2\,n+1)\,a_{n+1} & = & a_n \\ \text{d'où} & a_{n+1} & = & \dfrac{1}{(2n+2)\,(2n+1)}\,a_n \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+2)\,(2n+1)}\,a_n}$$

***b)*** On démontre par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{a_0}{(2n)!}$.
Ainsi, pour tout $x \in\ ]-R, R[$ :

$$f(x) \ = \ a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

***2. a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left| \frac{\frac{1}{\big(2(n+1)\big)!}}{\frac{1}{(2n)!}} \right| \ = \ \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \ = \ \frac{1}{(2n+2)\,(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ est $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

***b)*** La fonction $g$ est bien solution de l'équation $(E)$.
*(à vérifier par calcul)*

On peut alors conclure que l'ensemble des solutions de $(E)$ développables en série entière est $\mathrm{Vect}\,(h)$, où :

$$h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

□

**Exercice 14** *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*
Soit l'équation différentielle : $x\,(x-1)\ y'' + 3\,x\ y' + y = 0$.

***1.*** Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

***2.*** Est-ce que toutes les solutions de $x\,(x-1)\ y'' + 3\,x\ y' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$ ?