Séries de fonctions

Exercices classiques, méthodes usuelles

I. Les trois modes de convergence d'une série de fonctions

I.1. Convergence simple d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I si la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
- La fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est alors appelée somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

  On la note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

La série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I

$\Leftrightarrow$ La suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction S

$\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x_0)$

$\Leftrightarrow$ Pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente (de somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x_0)$)

Remarque

- Lorsque l'on définit la notion de convergence simple d'une suite de fonctions (f_n), on introduit la notation f pour désigner la limite simple de la suite (f_n). Dans le cas d'une série de fonctions, c'est légèrement différent. Déjà, on ne parle pas (que cela soit pour une série numérique ou une série de fonctions) de la limite d'une série mais de sa somme. Ensuite, si une série converge simplement, sa somme s'écrit sous la forme : $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.

  Cette fonction est généralement appelée S. On remarque que S est entièrement définie à l'aide des fonctions de la suite (f_n). Il n'y a donc pas lieu d'introduire d'autre nom de fonctions.
- Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I alors, pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente. On en déduit, par condition nécessaire de convergence, que la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

I.2. Convergence uniforme d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- En appliquant la définition de convergence uniforme à la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)$, on obtient :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

$\Leftrightarrow$ La suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

$\Leftrightarrow$
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I
- Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction $S_n - S$ est bornée
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \| S - S_n \|_{\infty,I} = 0$

$\Leftrightarrow$
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I
- Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction R_n est bornée
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \| R_n \|_{\infty,I} = 0$

(où l'on a noté, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$)

$\Leftrightarrow$ La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle

Remarque

- Rappelons que le reste d'ordre n d'une série convergente, généralement noté R_n, est défini par : $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = S - S_n$. Dans l'énoncé précédent, on pourrait donc remplacer le deuxième point par :

$$\lim_{n\to+\infty} \| R_n \|_{\infty,I} = 0$$

- Pour démontrer que la quantité $\| R_n \|_{\infty,I}$ a une limite nulle, on exhibe généralement une suite (δ_n) de limite nulle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \delta_n$$

  Cela démontre : $\forall n \in \mathbb{N}, \| R_n \|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$, ce qui permet de conclure.
  Il reste à trouver une telle suite (δ_n) :
  × de manière générale, il n'est pas simple de trouver une telle suite (δ_n).
  × dans le cas particulier des séries de fonctions alternées, il est relativement aisé d'exhiber une telle suite. On y reviendra dans les conseils de rédaction.
- La convergence uniforme d'une série de fonctions est une notion difficile à manipuler. C'est pourquoi on préfère souvent utiliser la notion de convergence normale d'une série de fonctions.
- Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors on peut démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

I.3. Convergence normale d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

La série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement sur** I	$\Leftrightarrow$	La série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente

Intérêt de la notion

La série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement sur** I	$\Rightarrow$	La série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I

Exercice 1 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

I.4. Les bons réflexes pour une étude de série de fonctions

`MÉTHODO` **Plan d'étude d'une série de fonctions**

Pour étudier une série de fonctions $\sum f_n$ sur I, on procèdera (sauf mention contraire de l'énoncé) dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple
Pour démontrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur I :

- *(i)* on commence toujours par fixer un élement x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».
- *(ii)* on démontre ensuite la convergence de la série numérique $\sum f_n(x_0)$ selon les valeurs de x_0.

La convergence simple est généralement utilisée pour trouver le domaine de définition de la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$. Plus précisément, on cherche pour quelles valeurs de x_0 la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est bien définie.

2) Convergence normale
Pour démontrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur I :

- *(i)* on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».
- *(ii)* pour tout $x \in I$, on cherche on cherche δ_n tel que :
  - × $\left|f_n(x)\right| \leqslant u_n$,
  - × u_n **ne fait pas apparaître** x,
  - × $\sum u_n$ est convergente.

  Les deux premiers points permettent de conclure : $\|f_n\|_{\infty,I} \leqslant u_n$.

  Le dernier point permet alors de conclure que la série $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente (par théorème de comparaison des séries à termes positifs).

  La quantité u_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\left\{\left|f_n(x)\right| \mid x \in I\right\}$.

Quand on peut s'en passer (c'est-à-dire lorsque la recherche de majorant ne nécessite pas d'étude précise), on ne cherche pas le plus petit des majorants.
Si les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas, on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x\in I}\left(|f_n(x)|\right)$ (en étudiant les variations de la fonction f_n).

Il est à noter que la convergence normale est une propriété plus forte que la convergence simple et la convergence uniforme (en d'autres termes, la convergence normale implique la convergence simple et la convergence uniforme). En pratique, c'est généralement le mode de convergence dont on se sert dans les exercices.

Remarque
En l'absence de convergence normale sur I (par exemple si les fonctions f_n ne sont pas bornées), il est fréquent d'établir la convergence uniforme sur certaines parties de I, ce qui suffit pour les théorèmes d'interversion. La forme de ces parties dépend de l'exercice considéré (cela peut être des intervalles du type $[a,1]$, $[0,a]$ ou encore $[a,+\infty[$ ...).

3) <u>Convergence uniforme</u> (en cas d'échec de la convergence normale).

(i) on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

× $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \delta_n$

× δ_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\| R_n \|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$.

Le dernier point permet alors de conclure que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, ce qui démontre que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

- Le cas de la convergence uniforme est particulièrement adapté à l'étude des séries de fonctions $\sum f_n$ telles que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Profitons-en pour présenter une version de ce critère (légèrement) adaptée à l'étude des séries de fonctions.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.

1. Énoncé du critère spécial des séries alternées

• Pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est une série alternée *(s'écrit sous la forme* $\sum (-1)^n a_n(x_0)$ *où* $\left(a_n(x_0)\right)$ *est une suite numérique de signe constant)* • Pour tout $x_0 \in I$, $\left(|f_n(x_0)|\right)$ est décroissante, • $\forall x_0 \in I$, $|f_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.	$\Rightarrow$	La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I

2. De plus, si la série de fonctions $\sum f_n$ est une série vérifiant les critères ci-dessus, alors :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_{n+1}(x)$.

($R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série numérique $\sum f_n(x)$)

b) $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)|$.

- Le point ***2.b)*** stipule : $\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\,R_n(x)\,| \leqslant |\,f_{n+1}(x)\,|$.

  Si on démontre que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (c'est-à-dire qu'il existe une suite (δ_n) de limite nulle telle que : $\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\,f_{n+1}(x)\,| \leqslant \delta_n$) alors on peut en conclure que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (et donc que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I). C'est même une équivalence.
- Il est à noter que les propriétés ***2.a)*** et ***2.b)*** sont vérifiées pour $n = 0$, ce qui permet de conclure que pour tout $x \in I$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \text{ est du signe de } f_1(x) \qquad \text{et} \qquad \left|\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |\,f_1(x)\,|$$

$$\left(\text{ on peut aussi montrer : } \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \text{ est du signe de } f_0(x) \qquad \text{et} \qquad \left|\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |\,f_0(x)\,|\right)$$

- Enfin, soulignons que cette méthode peut être utilisée pour démontrer la convergence uniforme sur I de la série de fonctions $\sum f'_k$ (pour peu que cette série vérifie les conditions d'application), ce qui est un des critères pour démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$. Grâce au point précédent, on peut alors conclure que, pour tout $x \in I$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f'_k(x)$ est du signe de $f'_1(x)$, ce qui permet de faire l'étude des variations de la fonction S.

Exercice 2 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. ***a)*** La fonction S est-elle continue sur D ?

b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

c) Étudier la convergence convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

`MÉTHODO` **Démontrer la non convergence uniforme / normale d'une série de fonctions**

De manière générale, on peut démontrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée.

Exercice 3 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A	$\Rightarrow$	La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur A

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = n\, x^2\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? Justifier.

II. Théorèmes d'interversion de symboles dans le cas de la convergence uniforme

II.1. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to x_0}$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ la fonction } f_n \\ \quad \text{continue sur } I \\ \bullet \text{ La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge} \\ \quad \text{uniformément sur (tout segment de) } I \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } I$$

Remarque

- Ce théorème doit être compris comme une machine à intervertir les symboles $\lim\limits_{x\to x_0}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$.
  En effet, pour tout $x_0 \in I$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) &= \lim_{x\to x_0} S(x) \\ &= S(x_0) && \textit{(car } S \textit{ est continue en } x_0\in I\textit{)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) && \textit{(car } f_n \textit{ est continue en } x_0\in I\textit{)} \end{aligned}$$

  Ainsi, on peut conclure :

$$\boxed{\forall x_0\in I,\ \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) \ dt}$$

II.2. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to\alpha}$ (théorème de la double limite)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
On note $I = |\,\alpha,\beta\,|$ où $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $\beta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
Supposons :
× il existe une suite $(\ell_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x) = \ell_n$.
× la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente et :

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to\alpha} f_n(x)\right)}$$

Remarque

- On est ici dans un cadre différent du théorème précédent : on ne démontre pas la continuité de la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en un point x_0 de l'intervalle I mais l'existence d'une limite finie en une borne non incluse dans I (éventuellement en $-\infty$ ou en $+\infty$ si ces valeurs sont des bornes de I).
- Cela n'a pas de sens de démontrer de la convegence sur tout segment de l'intervalle I si l'on souhaite obtenir un résultat à proximité d'une borne. Typiquement, si $\alpha = -\infty$, la convergence uniforme sur le segment $[0, 1]$ ne fournit évidemment pas d'information sur le comportement de S en $-\infty$.

Exercice 4 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^4\, x^4}$.

1. a) Prouver que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

c) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

II.3. Interversion des symboles $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_a^b$

II.3.a) Dans le cas où la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur un `SEGMENT`

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,

× la série $\sum f_n$ converge uniformément sur le `SEGMENT` $[a, b]$.

Alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt \right)\ dt}$$

Exercice 5 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\ dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\ dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\, 2^n}$.

II.3.b) Cas où la série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\, f_n(t) \,|\ dt$ converge : le théorème d'intégration terme à terme

Remarque

- Dans le résultat précédent, les intégrales considérées sont des intégrales de fonctions continues sur un `SEGMENT`. Ce résultat ne peut en aucun cas être utilisé lors de l'étude d'intégrales impropres en (au moins) l'une des bornes.
- Dans le chapitre sur les intégrales à paramètre, on a vu un autre résultat permettant d'intervertir les symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int$. Il s'agit du théorème d'intégration terme à terme :

> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
>
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
>
> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$.
>
> *(i)* Existence d'une limite finie - étude « en n »
>
> ▸ La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
> ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$)
>
> ▸ La fonction S est continue par morceaux sur I.
>
> *(ii)* Intégrabilité - étude « en t »
>
> • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.
>
> *(iii)* Hypothèse spécifique
>
> • La série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\, f_n(t) \,|\ dt$ converge.
>
> Alors :
>
> × la fonction S est intégrable sur I.
>
> × la suite $\left(\displaystyle\int_I S_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.
>
> De plus :
>
> $$\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty}\ \left(\int_I f_n(t)\ dt\right)}$$
>
> ou encore :
>
> $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt \ = \ \int_I \ \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right)\ dt \ = \ \int_I S(t)\ dt \ = \ \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt}$$

- La question est alors de savoir quel résultat privilégier pour une telle interversion de symboles :
  - × dans le cas d'une intégrale généralisée, il n'y aucune question à se poser car seul le théorème d'intégration terme à terme peut s'appliquer.
  - × dans le cas d'une intégrale sur un segment, les deux résultats peuvent être envisagés. Tout dépend alors du contexte.
    - ▸ si les questions précédentes ont permis de démontrer de la convergence uniforme, on s'oriente évidemment vers le théorème d'interversion via convergence uniforme.
    - ▸ si on a démontré qu'il n'y a pas convergence uniforme, on s'oriente évidemment vers le théorème d'intégration terme à terme.

Exercice 6 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n\ t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

1. a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\ dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right|\ dt$.

b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\ t^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t}\right)\ dt\ =\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 7 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \mapsto t^n\ \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\ \ln(t)\ dt$.

2. Prouver que $f : t \mapsto \mathrm{e}^t\ \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\ \ln(t)\ dt\ =\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ n!}$.

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Exercice 8

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\ dt\ =\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 - t^2}\ dt\ =\ -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

II.3.c) Dernier recours : le théorème de convergence dominée appliqué à (S_n)

Remarque

- Dans le cas où la série numérique $\sum \int_I |f_n(t)| \, dt$ diverge, on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on devra alors s'orienter vers le théorème de convergence dominée appliqué à la suite (S_n) des sommes partielles associée à la série de fonctions $\sum f_n$.
Rappelons ce résultat.

Théorème de convergence dominée appliqué à (S_n)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- ▶ La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ($\forall t \in I, \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$).
- ▶ La fonction S est continue par morceaux sur I.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- ▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.
- ▶ Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |S_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

× la fonction S est intégrable sur I.

× la suite $\left(\int_I S_n(t) \, dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie définie par :

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t) \, dt &= \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t) \right) dt \\ &= \int_I S(t) \, dt \\ &= \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt \end{aligned}}$$

ou encore : $\boxed{\int_I \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) \, dt \right)}$

Ce résultat est celui qui possède les hypothèses les plus faibles et a donc le plus de chance de fonctionner. Mais encore une fois, le contexte peut nous amener à nous orienter vers un des deux autres théorèmes.

Exercice 9
On étudie dans cet exercice deux cas où on ne peut directement appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la suite (f_n) et où il faut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n).

1. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n \; t^{n+a}$.
On souhaite démontrer :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) \, dt \; = \; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \; f_n(t) \; dt \right)$$

a) Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

b) Conclure.
(on pourra appliquer le théorème de convergence dominée convenablement)

2. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n \; t^{a\,n}$.
On souhaite démontrer :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \, dt \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \; f_n(t) \; dt \right)$$

a) Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

b) Conclure.
(on pourra appliquer le théorème de convergence dominée convenablement)

II.4. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et dérivée

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Supposons :

a) Caractère $\mathscr{C}^1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I

b) Convergences successives

(0) La série $\sum \; f_n$ converge simplement sur I

(1) La série $\sum \; f_n'$ converge uniformément sur (tout segment de) I

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}'}$$

Exercice 10 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la série de fonctions $\sum \; u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n} \right)$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,\,1]$.

2. Calculer $S'(1)$.

II.5. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et dérivée $k^{\text{ème}}$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons :

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^k}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I

(ii) $\boxed{\text{Convergences successives}}$

(0) La série $\sum f_n{}^{(0)}$ converge simplement sur I

(...) ...

(k-1) La série $\sum f_n^{(k-1)}$ converge simplement sur I

(k) La série $\sum f_n^{(k)}$ **converge uniformément** sur (tout segment de) I

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!],\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n{}^{(j)}}$$

III. Exercices en vrac

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{2\,x}{x^2+n^2}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. a) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$ où $a > 0$.

b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

3. a) Démontrer : $\forall x > 0,\ \pi \leqslant S(x) \leqslant \pi + \dfrac{2}{x}$.

b) En déduire la limite de S en $+\infty$.

c) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2 x + n}$.

1. Pour quels x la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est-elle convergente ? On note $S(x)$ sa somme en cas de convergence.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers l'infini.

4. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. *a)* Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,x\ \arctan(x) - \ln(x^2+1) \ \leqslant\ S(x)\ \leqslant\ 2\,x\ \arctan(x)$.

b) Déterminer un équivalent de S en 0.

c) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n + n^2\,x^2}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. *a)* Démontrer : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ln\left(1 + x^2\right) - 2\,\ln(x)\ \leqslant\ S(x)\ \leqslant\ \ln\left(1 + x^2\right) - 2\,\ln(x) + \dfrac{1}{1+x^2}$.

b) Déterminer un équivalent de S en 0.

c) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n}\ \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. *a)* Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, a]$ où $a > 0$.

b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer suivant les valeurs de a le domaine de définition de S.

2. Soit a tel que $|a| < 1$.

a) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

c) Déterminer un équivalent de S en 0^+.

d) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 17

Montrer que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx} + \mathrm{e}^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2\ (1+x^{2n})}$.

1. Étudier la convergence de (f_n), puis la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$.

2. Déterminer le domaine de définition de $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

3. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in \,]0,1]$.

4. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.

5. Déterminer la limite de $S(x)$ quand x tend vers l'infini.

Exercice 19

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.

1. Nature de $\sum f_n$?

2. Montrer : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nt) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2t}$.

Exercice 20

1. Montrer que si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément, alors f_n est bornée à partir d'un certain rang, et converge uniformément vers 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto (-1)^n\ \dfrac{x^2+n}{n^2}$.
Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément.

Exercice 21

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\ \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.

3. Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.

4. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

Exercice 22 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. ***a)*** La fonction S est-elle continue sur D ?

b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

c) Étudier la convergence convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.

Exercice 23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Démontrer que S est définie sur $]-1,+\infty[$.

2. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $]-1,+\infty[$.

3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

4. ***a)*** Pour tout $x > -1$, exprimer le lien entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

b) En déduire la limite et un équivalent de S en -1.

5. Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

6. Démontrer que S est strictement monotone sur $]-1,+\infty[$.

a) Démontrer : $\forall x \in \,]-1,+\infty[,\ \dfrac{-1}{x} \ \leqslant\ 2\,S(x) \ \leqslant\ \dfrac{-1}{x+1}$.

b) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 24

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt$.

2. Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 25

Justifier l'existence et montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\, dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.