Suites de fonctions

Exercices classiques, méthodes usuelles

I. Les deux modes de convergence d'une suite de fonctions

I.1. Convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

- On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I vers la fonction f si pour tout $x_0 \in I$, la suite numérique $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.
- Autrement dit :

$$\begin{aligned} & \text{La suite } (f_n) \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x_0 \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

- Lorsque c'est le cas, on dit que la fonction f (unique) est la **limite simple** de la suite (f_n).

I.2. Convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Il existe un rang } n_0 \text{ tel que, pour tout } n \geqslant n_0 \text{ la fonction } f_n - f \text{ est bornée} \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \|\, f_n - f \,\|_{\infty,I} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe une suite } (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de limite nulle et un rang } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que :} \\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \ \leqslant\ a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe une suite } (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de limite nulle et un rang } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que :} \\ \forall n \geqslant n_0,\ \|f_n - f\|_{\infty,I} \ \leqslant\ a_n \end{cases}$$

I.3. Exercices d'illustration

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\big(n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}\big)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ si $0 < a < 1$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \left(3x^2 - 2x^3\right)^n$ et $g_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\, x & si\ |x| \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & sinon \end{cases}$.

1. ***a)*** Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.

b) Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle du type $[0, a]$ où $0 < a < 1$.

c) Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$?

2. ***a)*** Démontrer que la suite (g_n) converge simplement sur $I = \mathbb{R}$ vers une fonction g à déterminer.

b) La suite (g_n) converge-t-elle uniformément vers g sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto n^2\, x^n\ (1 - x)$.

1. ***a)*** Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0, 1]$ vers une fonction à déterminer.

b) Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle du type $[0, a]$ où $0 < a < 1$.

c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

2. **Généralisation**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n : x \mapsto n^\alpha\, x^n\ (1 - x)$ où $\alpha \geqslant 0$.

a) Démontrer que la suite (g_n) converge simplement sur $I = [0, 1]$ vers une fonction à déterminer.

b) Déterminer précisément $\|g_n - g\|_{\infty, I}$.

c) En déduire : (g_n) converge uniformément sur I vers $g \iff \alpha < 1$.

Exercice 4

On pose, pour $n \geqslant 1$ et $x \in\,]0, 1]$, $f_n(x) = n\, x^n\ \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

On note ensuite $g = f - f_n$.

2. Étudier les variations de g.

3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

4. Soit $a \in [0, 1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \geqslant a$ pour tout $n \geqslant n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

Exercice 5 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(n\, x)}{1 + n^2\, x^2}$.

a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\,\mathrm{e}^{-n\,x^2}\cos\left(\sqrt{n}\,x\right)$.

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

c) Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

II. Théorème d'interversion de symboles

II.1. Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to x_0}$ (la continuité est transmise par convergence uniforme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f\in\mathbb{K}^I$ une fonction.

- La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur (tout segment de) I vers f
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I

$\Rightarrow$ La fonction f est continue sur (tout segment de) I

Remarque

Ce théorème est un résultat d'interversion de symboles. Plus précisément, pour tout $x_0\in I$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) &= \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right) && \textit{(car (f_n) converge simplement sur I vers f)}\\
&= f(x_0) && \textit{(car f est continue en $x_0\in I$ - c'est le résultat du théorème !)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x_0)\right) && \textit{(car (f_n) converge simplement sur I vers f)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) && \textit{(car f_n est continue en $x_0\in I$)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x_0\in I,\ \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)}$$

Exercice 7 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.

Démontrer que f est continue en x_0.

2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1], g_n(x)=x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

`MÉTHODO` **Démontrer la non convergence uniforme**

- D'après le théorème précédent, une suite de fonctions continues sur I ne peut converger uniformément sur (tout segment de) I que vers une fonction f qui est elle-même continue. Ainsi, si la fonction f, limite simple de la suite de fonctions (f_n) n'est pas continue sur I alors on est assuré qu'il n'y a pas convergence uniforme (on peut raisonner par l'absurde pour le démontrer formellement).
- De manière générale, on peut démontrer qu'une suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée par f.

II.2. Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to\alpha}$ (théorème de la double limite)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

On note $I = |\,\alpha, \beta\,|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposons :

× il existe une suite $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x) = \ell_n$.

× la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f.

Alors la suite numérique $\left(\ell_n\right)$ est convergente et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to\alpha} f_n(x)\right) = \lim_{x\to\alpha}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)}$$

Remarque

- Le résultat a été présenté en α mais il est évidemment aussi vérifié en β.
- On aurait pu ne faire qu'un seul théorème avec les deux résultats précédents. Il est possible d'intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et limite en un point de l'intervalle, **les bords éventuellement infinis étant ajoutés**, dès lors qu'il y a convergence uniforme de la suite (f_n) et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en le point considéré :
  × dans le premier théorème, l'existence de cette limite finie est assuré par continuité de f_n.
  × dans le deuxième résultat, l'existence de cette limite finie est supposée. On peut utiliser ce résultat pour déterminer des limites lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (on ne peut évoquer d'argument de continuité pour assurer une limite finie de f_n en l'infini).

II.3. Interversion des symboles limite et intégrale

II.3.a) Cadre de la convergence uniforme

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction.

Supposons que :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,

× la suite (f_n) converge uniformément sur le `SEGMENT` $[a, b]$ vers f.

Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt}$$

Remarque

- Il existe deux théorèmes permettant d'intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_a^b$:
  - × le théorème ci-dessus dans le cadre d'une suite (f_n) qui converge uniformément sur le `SEGMENT` $[a, b]$ vers f.
  - × le théorème de convergence dominée qui s'affranchit de l'hypothèse concernant l'intervalle d'intégration, exige seulement la convergence simple mais ajoute une hypothèse de domination.
- Il est alors légitime de se poser la question du théorème à utiliser en pratique :
  - × dans le cas d'une intégrale généralisée, on raisonnera exclusivement à l'aide du théorème de convergence dominée car c'est le seul qui s'applique.
  - × dans le cas d'une intégrale sur un segment, le contexte de l'exercice peut amener à utiliser l'un ou l'autre des énoncés.
- Pour compléter le dernier point, il faut aussi remarquer que le théorème de convergence dominée présente des hypothèses très faibles. On peut démontrer que si le théorème d'interversion par convergence uniforme s'applique, alors le théorème de convergence dominée s'applique. Évidemment, dans le cas d'un exercice pour lequel on a démontré qu'il n'y a pas convergence uniforme, on a d'autre choix que de tenter d'utiliser le théorème de convergence dominée.

II.3.b) Théorème de convergence dominée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \displaystyle\int_I h_n(t)\ dt$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.

Soit $h : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- ▸ La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur I vers h ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = h(t)$).
- ▸ La fonction h est continue par morceaux sur I.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- ▸ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction h_n est continue par morceaux sur I.
- ▸ Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ |\,h_n(t)\,| \leqslant \varphi(t)$.

Alors :

- × la fonction h est intégrable sur I.
- × la suite $\left(\displaystyle\int_I h_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie en $+\infty$ définie par :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_I h_n(t)\ dt \ = \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} h_n(t)\right)\ dt \ = \int_I h(t)\ dt}$$

Exercice 8 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2\,x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

2. Soit $a \in \,]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\,x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2\,x + 2n & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\ dt$.

3. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\ dt = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 10 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto (x^2+1)\ \dfrac{n\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\ dt$.

Exercice 11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x\ \left(1 - \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)$ si $0 \leqslant x \leqslant n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

1. Déterminer la limite simple de (f_n). Y a-t-il convergence uniforme ?

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$.

Exercice 12

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{n}\right)}{x\left(\mathrm{ch}(x)\right)^2}\ dx$.

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Déterminer la limite de (I_n), puis de (nI_n) quand n tend vers l'infini.

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n \ :\ \begin{array}{ccc} t & \mapsto & \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1}\ \ln(t) & \textit{si } t \in]0, n] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)\ dt$.

3. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = -\gamma$.

Indications : procéder au changement de variable $x = 1 - \dfrac{t}{n}$, puis faire une IPP.

II.4. Interversion des symboles de limite et de dérivations successives

II.4.a) Interversion des symboles limite et dérivation

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction. Soit $h \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

Supposons :

(i) Caractère $\mathscr{C}^1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

(ii) Convergences successives

(0) La suite (f_n) converge simplement sur I vers f,

(1) La suite (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers h.

Alors :
- × la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
- × $f' = h$.

Ce que l'on peut retenir sous la forme : $\boxed{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'\right)}$.

$$\left(\forall x \in I,\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)\right)\right)$$

II.4.b) Interversion des symboles limite et dérivation $k^{\text{ème}}$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(h_1, \dots, h_k) \in \left(\mathbb{K}^I\right)^k$ un k-uplet de fonctions.

Supposons :

(i) Caractère $\mathscr{C}^k$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,

(ii) Convergences successives

(0) La suite $({f_n}^{(0)})$ converge simplement sur I vers f.

(1) La suite $({f_n}^{(1)})$ converge simplement sur I vers h_1.

(...) ...

(k-1) La suite $({f_n}^{(k-1)})$ converge simplement sur I vers h_{k-1}.

(k) La suite $(f_n^{(k)})$ **converge uniformément** sur (tout segment de) I vers h_k.

Alors :
- × la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- × $\forall j \in [\![1, k]\!],\ f^{(j)} = h_j$.

Ce que l'on peut retenir sous la forme : $\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!],\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)} = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} {f_n}^{(j)}\right)}$

$$\left(\forall j \in [\![1, k]\!],\ \forall x \in I,\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} {f_n}^{(j)}(x)\right)\right)$$

III. Les bons réflexes pour une étude de suite de fonctions

`MÉTHODO` **Plan d'étude d'une suite de fonctions**

Pour étudier une suite de fonctions (f_n) sur I, on procèdera dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple
Pour démontrer la convergence simple sur I de (f_n) vers f :

- ***(i)*** on commence toujours par fixer un élément x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».
- ***(ii)*** on étudie ensuite la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de x_0, ce qui fournit la fonction limite simple f.

  Cette étape amène généralement à une disjonction de cas, notamment si les fonctions de la suite (f_n) sont définies par cas.

2) Convergence uniforme
Maintenant qu'on a trouvé une fonction limite f candidate à la convergence uniforme (avec ***1)***), on pourra démontrer la convergence uniforme de (f_n) vers f avec l'une des méthodes suivantes.

- ***(i)*** On commence par fixer un entier n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».
- ***(ii)*** On cherche δ_n tel que :
  - × $\forall x \in I,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \delta_n$,
  - × δ_n **ne fait pas apparaître** x,
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

  Les deux premiers points permettent de conclure : $0 \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$.

  La quantité δ_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\Big\{\big|f_n(x) - f(x)\big| \mid x \in I\Big\}$.
  Généralement, on ne cherche pas à obtenir le plus petit des majorants.
  Dans le cas où les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas (et seulement dans ce cas), on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x\in I}\Big(\big|f_n(x) - f(x)\big|\Big)$ (en étudiant les variations de $f_n - f$ par exemple).
  On pourra conclure quant à la convergence uniforme si : $\sup\limits_{x\in I}\Big(\big|f_n(x) - f(x)\big|\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque
En l'absence de convergence uniforme sur I (par exemple si les fonctions $f_n - f$ ne sont pas bornées), il est fréquent d'établir la convergence uniforme sur certaines parties de I, ce qui suffit pour les théorèmes de régularité. La forme de ces parties dépend de l'exercice considéré (cela peut être des intervalles du type $[a, 1]$, $[0, a]$ ou encore $[a, +\infty[\ \ldots$).

`MÉTHODO` **Démontrer la non convergence uniforme**

Pour démontrer qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers une fonction f. On pourra utiliser l'une des méthodes suivantes.

a) On exhibe une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
En effet, si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors, pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

D'où $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ tend vers 0.
(on utilise dans ce cas la contraposée de l'implication démontrée)

b) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I, alors on peut étudier la régularité de f sur I.
Si f n'est pas continue sur I, alors (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f.

De manière générale, on peut démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (continuité ou interversion de symboles) n'est pas vérifiée par f.

MÉTHODO **Calcul de limites**

- Lors de la recherche de la limite simple d'une suite de fonction, on est amené à déterminer la limite d'une suite numérique. Il faut donc être capable de déterminer ce type de limites.
  Pour ce faire, il existe essentiellement deux outils :
  × calcul d'équivalents (rappel ci-dessous),
  × théorème des croissances comparées.

Si f est de classe $\mathscr{C}^{m+1}$ au voisinage de 0 alors elle admet un $\text{DL}_m(0)$ qui s'écrit :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to 0}{o}\left(x^m\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$$

On en déduit les développements limités suivants.

- $\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$ et $\boxed{\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$
- $\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\ \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{2p+2}\right)}$ et $\boxed{\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$
- $\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\ \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{2p+3}\right)}$ et $\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$
- $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m}\ x^m + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$ et $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$
- $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 + \ldots + x^m + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$ et $\boxed{\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!}\ x^m + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$

Il faut savoir exploiter ces résultats pour démontrer (par exemple) que pour tout $x_0 \neq 0$:

- $\boxed{n\ \left(\mathrm{e}^{\frac{x_0}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_0}$ $\quad$ $\boxed{n^2\ \left(\cos\left(\frac{x_0}{n}\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x_0}{2}}$
- $\boxed{n\ \sin\left(\frac{x_0}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_0}$ $\quad$ $\boxed{\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\ x_0\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}\ x_0}$

- Rappelons que le théorème des croissances comparées établit que pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$:

$$\boxed{(\ln(n))^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n}$$

En particulier, on en déduit : $\boxed{\forall a > 0, \forall x_0 \in\ ]0,1[,\ n^a\ {x_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

MÉTHODO **Majoration**

- Lorsque l'on cherche à démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f sur un intervalle I, on cherche à majorer, pour tout $x \in I$, la quantité :

$$\left| \, f_n(x) - f(x) \, \right|$$

- Pour ce faire, il faut déjà avoir en tête les règles de manipulations de l'opérateur valeur absolue / module. Rappelons tout d'abord l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{K},\ \forall v \in \mathbb{K},\ \left| u+v \right| \ \leqslant \ |\,u\,| + |\,v\,|}$$

Rappelons par ailleurs le cas d'égalité :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{K},\ \boxed{\left| u+v \right| = |\,u\,| + |\,v\,| \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{l} u = 0 \\ \texttt{OU} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ v = \alpha \cdot u \end{array}}$$

Notons enfin que la valeur absolue / le module se comporte bien vis-à-vis de l'opérateur produit et de l'opérateur quotient :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{K},\ \forall v \in \mathbb{K},\ \left| u \times v \right| \ = \ |\,u\,| \times |\,v\,|}$$

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{K},\ \forall v \in \mathbb{K},\ \left| \frac{u}{v} \right| \ = \ \frac{|\,u\,|}{|\,v\,|}}$$

- La première étape consiste **TOUJOURS** à se débarrasser, au maximum, de la valeur absolue / du module. Tenter de majorer à l'intérieur de la valeur absolue / module démontre une incompréhension totale et provoquera l'absence de lecture plus avant du correcteur (inutile de lire puisque l'inégalité produite est fausse).

$$\xcancel{\left| \frac{n\,x\ \mathrm{e}^{-x}}{1+n^2\,x} \right| \leqslant \left| \frac{n\,a\ \mathrm{e}^{-a}}{1+n^2\,a} \right|}$$

Cela ne signifie pas que la valeur absolue / le module disparaît complètement du membre de droit. En particulier, les fonctions cos et sin n'étant pas de signe constant sur $\mathbb{R}$, il est obligatoire de conserver les valeurs absolues dans les écritures $\left| \, \cos(\ldots) \right|$ et $\left| \, \sin(\ldots) \right|$ lorsqu'elles se présentent (ne surtout pas écrire : $\left| \, \cos(\ldots) \right| = \cos(\ldots)$!). On écrira par exemple :

$$\left| \frac{\cos(n\,x)\ \mathrm{e}^{-x}}{n^2+x^2} \right| \ = \ \frac{\left| \cos(n\,x)\ \mathrm{e}^{-x} \right|}{\left| n^2+x^2 \right|} \ = \ \frac{\left| \cos(n\,x) \right| \left| \mathrm{e}^{-x} \right|}{n^2+x^2} \ = \ \frac{\left| \cos(n\,x) \right| \mathrm{e}^{-x}}{n^2+x^2} \ \leqslant \ \frac{1 \times 1}{n^2+x^2} \ \leqslant \ \frac{1}{n^2}$$

- Pour ce faire, il faut avoir en tête des inégalités ususelles comme celles issues d'inégalités de convexité. On peut notamment penser à :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1+x$	$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1-x$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \left| \sin(x) \right| \ \leqslant \ |\,x\,|$	$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \leqslant 1$
$\forall x \in [0,+\infty[,\ \sin(x) \leqslant x$	$\forall x \in [0,+\infty[,\ \tan(x) \geqslant x$
$\forall x \in [-1,+\infty[,\ \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}\ x$	$\forall x \in \ ]-1,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+x} \geqslant 1-x$
$\forall x \in \ ]0,+\infty[,\ \ln(x) \leqslant -1+x$	$\forall x \in \ ]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$

- De ces inégalités usuelles, il est possible d'en déduire de nouvelles. Reprenons la dernière inégalité :

$$\forall u \in]-1,+\infty[, \ \ln(1+u) \leqslant u$$

On peut en déduire qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \ \ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \leqslant -\frac{x^2}{n}$$

Plus précisément, on obtient cette inégalité en appliquant l'inégalité précédente à $u = -\dfrac{x^2}{n}$.
Cette manière de procéder est valide dès que $u = -\dfrac{x^2}{n} > -1$. Or :

$$-\frac{x^2}{n} \ > \ -1 \ \Leftrightarrow \ \frac{x^2}{n} \ < \ 1 \ \Leftrightarrow \ x^2 \ < \ n$$

Lorsqu'on cherche à déterminer la limite simple de la suite (f_n), la variable x est fixée (généralement on commence par écrire « Soit $x_0 \in I$ ») et on fait tendre n vers $+\infty$. La variable n devient alors forcément plus grande que n'importe quelle quantité qui ne dépend que de x. Cela valide alors l'inégalité $x^2 < n$ et donc la propriété : $-\dfrac{x^2}{n} \ > \ -1$.

- Lorsqu'on doit démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions, il est classique d'effectuer cette étude non pas sur l'intervalle d'étude I mais plutôt sur tout segment $[a,b] \subset I$ (ou sur tout segment adapté à l'étude). Cette propriété est suffisante pour transmettre la propriété de continuité sur I tout en entier.
Cela permet d'effectuer le type de raisonnement suivant. Pour tout $x \in [a,b]$ (avec $0 < a < b$) :

Comme	$a \ \leqslant \ x \ \leqslant \ b$	
alors	$a^2 \ \leqslant \ x^2 \ \leqslant \ b^2$	*(car la fonction élévéation au carré est croissante sur* $[0,+\infty[$*)*
donc	$-a^2 \ \geqslant \ -x^2 \ \geqslant \ -b^2$	
donc	$-\dfrac{a^2}{n} \ \geqslant \ -\dfrac{x^2}{n} \ \geqslant \ -\dfrac{b^2}{n}$	
donc	$1-\dfrac{a^2}{n} \ \geqslant \ 1-\dfrac{x^2}{n} \ \geqslant \ 1-\dfrac{b^2}{n}$	
donc	$\ln\left(1-\dfrac{a^2}{n}\right) \ \geqslant \ \ln\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right) \ \geqslant \ \ln\left(1-\dfrac{b^2}{n}\right)$	*(par croissance de la fonction* ln *sur* $]0,+\infty[$*)*

Cela permet alors de démontrer : $\forall x \in [a,b], \ -\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right) \ \leqslant \ -\ln\left(1-\dfrac{a^2}{n}\right)$ et donc :

$$\|g_n - g\| \ \leqslant \ -\ln\left(1-\frac{a^2}{n}\right)$$

où $g : x \mapsto 0$ et $g_n : x \mapsto -\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)$.

- On gardera en tête que considérer $x \in [a,b]$ permet naturellement de supprimer la dépendance en x. Pour le faire rigoureusement, on part de l'inégalité $a \leqslant x \leqslant b$ et on majore/minore par « reconstruction par étape » la différence $g_n(x) - g(x)$ (comme dans l'exemple ci-dessus).