CH XIII : Endomorphismes d'un espace euclidiens

Rappels

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle \cdot,\cdot \rangle\big)$ si :
  - × E un espace vectoriel `RÉEL`.
  - × E est de dimension finie.
  - × $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire.

  (un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie)
- Un espace euclidien $\big(E, \langle \cdot,\cdot \rangle\big)$ est toujours muni d'une norme (dite euclidienne) issue du produit scalaire. Plus précisément :

$$\begin{array}{rcrcl} \|\cdot\| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{array}$$

  En particulier : $\boxed{\forall x \in E,\ \| x \|^2 \ = \ \langle x, x \rangle}$
- Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. Pour ce faire, il suffit de choisir une base $\mathscr{B}$ de E et de munir E du produit scalaire :

$$\begin{array}{rcrcl} \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{B}} & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \end{array}$$

  On remarque au passage que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.
- Inversement, tout espace euclidien $\big(E, \langle \cdot,\cdot \rangle\big)$ admet une base orthonormée. Pour obtenir une telle base, il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à n'importe quelle base $\mathscr{B}$ de E. Rappelons de plus que si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale : $\langle \cdot,\cdot \rangle = \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.
- Les bases orthonormées sont des bases adaptées aux calculs. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orhtonormale alors :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$$

- Rappelons enfin que si :
  - × $\big(E, \langle \cdot,\cdot \rangle\big)$ est un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).
  - × F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

  alors :

$$\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$$

  En particulier, dans un espace euclidien, F et $F^{\perp}$ sont toujours des espaces supplémentaires dans E.

I. Isométries vectorielles

I.1. Définitions

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot,\cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que l'endomorphisme f est une **isométrie** de E (ou **un endomorphisme orthogonal de** E), s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$$

  Autrement dit, un endomorphisme de E est une isométrie vectoriel s'il conserve la norme.
- On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Remarque

- On peut s'intéresser à l'étymologie du terme isométrie. Il est formé :
  - × du préfixe **iso** (qui provient du grec ancien *isos*) qui signifie égal.

    Ce préfixe se retrouve dans les termes : isocèle (du grec ancien *isoskelês* - « aux jambes égales »), isomorphe (*isos* et *morphé* - « forme »), isobares (lignes de même pression atmosphérique), ...
  - × du suffixe **métrie** (qui provient du grec ancien *métron*) qui signifie mesure.

    Ce suffixe se retrouve notamment dans le terme goniomètre (du grec ancien *gônia* - « angle ») ou dans le terme trigonométrie (*trigonos* - « triangulaire »).
- On peut citer des premiers exemples d'isométries vectorielles :
  - × l'application id_E est évidemment une isométrie vectorielle.
  - × les projecteurs p qui ne coïncident pas avec id_E (c'est-à-dire les applications $p \in \mathscr{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$ et $\mathrm{Im}(p) \neq E$), ne sont `JAMAIS` des isométries vectorielles. Tout simplement car pour tout élément $x \in \mathrm{Ker}(p)$ tel que $x \in \mathrm{Ker}(p)$:

$$\|p(x)\| = \|0_E\| \ = \ 0 \ \neq \ \|x\|$$

  - × les symétries s (applications $s \in \mathscr{L}(E)$ telles que $s \circ s = \mathrm{id}_E$) ne sont pas forcément des isométries vectorielles. Plus précisément, seules les symétries orthogonales sont des isométries.
- La discussion sur les projecteurs permet de mettre en avant une propriété important des isométries vectorielles : ce sont forcément des endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ injectifs. En effet, si ce n'est pas le cas (c'est-à-dire si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$) alors il existe $x \neq 0_E$ tel que $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi :

$$\|f(x)\| = \|0_E\| \ = \ 0 \ \neq \ \|x\|$$

  L'espace vectoriel E étant de dimension finie, on en conclut que les isométries vectorielles sont des automorphismes.

I.2. Caractérisation des isométries vectorielles

Théorème 1.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

L'endomorphisme f est une iométrie vectorielle	$\Leftrightarrow$	*L'endomorphisme f conserve la norme*
	$\Leftrightarrow$	*L'endomorphisme f conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :* $\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle\, f(x), f(y)\,\rangle = \langle x, y\rangle$
	$\Leftrightarrow$	*L'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée*

Démonstration.

1) C'est la définition.

2) $(\Rightarrow)$ Supposons que f conserve la norme.
Rappelons les identités de polarisation :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle & = & \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{array}}$$

Soit $(x,y) \in E \times E$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \langle\, f(x), f(y)\,\rangle & = & \dfrac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \ = \ \langle x, y\rangle \end{array}$$

($\Leftarrow$) Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors :

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &= \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|\end{aligned}$$

3) ($\Rightarrow$) Supposons que f conserve la norme (et donc le produit scalaire d'après le point précédent).
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée.
Démontrons que $\mathscr{B}' = \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base orthonormée.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\langle\, f(e_i), f(e_j)\,\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est une base orthonormée)}$$

($\Leftarrow$) Supposons que l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Alors $\mathscr{B}_1 = \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est aussi une base orthonormée de E.
Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Alors : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ et :

× $\|x\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_0$ est une BON.

× $\big\|f(x)\big\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_1$ est une BON. □

I.3. Structure de $\mathrm{O}(E)$

Théorème 2.
Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

1) $\boxed{\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)}$

2) *La loi $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}(E)$.*
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (f, g, h) \in \big(\mathrm{O}(E)\big)^2,\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathrm{id} \in \mathrm{O}(E), \forall f \in \mathrm{O}(E),\ f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$ *(existence d'un élément neutre)*

c. $\forall f \in \mathrm{O}(E), \exists g \in \mathrm{O}(E),\ f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ *(g inverse de f, noté $g = f^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}(E)$ un groupe.

$\boxed{\textit{L'ensemble } \mathrm{O}(E) \textit{ est alors nommé groupe orthogonal de } E}$

Remarque

- La notion de groupe n'est pas officiellement au programme de `PSI`. Le terme ne sera pas utilisé (sauf s'il venait à être rappelé) dans un écrit de concours.
- Le couple $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe car la loi $\circ$ vérifie les propriétés ***a.***, ***b.*** et ***c.*** citées ci-dessus.
- Un groupe est une structure algébrique au même sens qu'un espace vectoriel en est une. La démarche pour démontrer qu'un ensemble muni d'une loi est un groupe est similaire à celle pour permettant de démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Il y a essentiellement deux manière de procéder :
  × soit on vérifie tous les axiomes de défintion d'un groupe,
  × soit on démontre que l'ensemble considéré est un sous-groupe d'un groupe de référence. Pour démontrer que $(F, \top)$ est un sous-groupe de $(E, \top)$, on démontre que F est une partie non vide de E et que l'ensemble F est stable par la loi $\top$. Il faut alors comprendre que le sous-groupe F hérite des propriétés ***a.***, ***b.*** et ***c.*** qui sont vérifiées par le sur-goupe E.

Démonstration.

(i) $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$

(ii) $\mathrm{O}(E) \neq \varnothing$ car $\mathbb{1}_{\mathrm{GL}(E)} = \mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$

(iii) Démontrons que $\mathrm{O}(E)$ est stable par la loi $\circ$.
Soit $(f, g) \in \mathrm{O}(E)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\|(f \circ g)(x)\| &= \|f\big(g(x)\big)\| \\
&= \|g(x)\| && \textit{(car } f \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \\
&= \|x\| && \textit{(car } g \in \mathrm{O}(E)\textit{)}
\end{aligned}$$

□

I.4. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par isométrie vectorielle

Théorème 3.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit F un sous-espace de E stable par f ($\forall u \in F,\ f(u) \in F$).

1) $\boxed{\textit{L'endomorphisme } f \textit{ est une isométrie vectorielle} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle}$

2) *Supposons : $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors :*

$$\boxed{\textit{L'espace } F \textit{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \textit{L'espace } F^{\perp} \textit{ est stable par } f}$$

Démonstration.

□

II. Matrices orthogonales

II.1. Définition

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- On dit que la matrice A est orthogonale si ${}^tA \times A = I_n$.
- On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales.

II.2. Caractérisation des matrices orthogonales

Théorème 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{lll} \textit{La matrice } A \textit{ est orthogonale} & \Leftrightarrow & {}^tA \times A = I_n \\ & \Leftrightarrow & A \times {}^tA = I_n \\ & \Leftrightarrow & A \textit{ est inversible et } A^{-1} = {}^tA \\ & \Leftrightarrow & \textit{Les colonnes de } A \textit{ constituent une base orthonormée de } \mathbb{R}^n \\ & \Leftrightarrow & \textit{Les lignes de } A \textit{ constituent une base orthonormée de } \mathbb{R}^n \end{array}$$

Démonstration.

□

II.3. Lien entre matrices orthogonales et espaces euclidiens

II.3.a) Les matrices orthogonales sont des matrices de changement de base orthonormée

Théorème 5.

Soit $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ *un espace euclidien.*

Soit $\mathscr{B}_0$ *une base orthonormée de* E.

Soit $\mathscr{B}$ *une base de* E.

$$\boxed{\text{La base } \mathscr{B} \text{ est orthonormée} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La matrice } P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \text{ est orthogonale}}$$

Démonstration. □

II.3.b) Les matrices orthogonales sont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des isométries vectorielles

Théorème 6.

Soit $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ *un espace euclidien.*

Soit $\mathscr{B}$ *une* **base orthonormée** *de* E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\boxed{f \in \mathrm{O}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(E)}$$

Démonstration. □

II.4. Structure de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

II.5. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Théorème 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$

2) La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

- ***a.*** $\forall (A, B, C) \in \big(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ *(associativité)*
- ***b.*** $\exists\ \mathrm{id} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times \mathrm{id} = \mathrm{id} \times A = A$ *(existence d'un élément neutre)*
- ***c.*** $\forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times B = B \times A = \mathrm{id}$ *(B inverse de A, noté $B = A^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ un groupe.

$$\boxed{\textit{L'ensemble } \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \textit{ est alors nommé groupe orthogonal.}}$$

3) $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \in \mathrm{O}(n) \ \Rightarrow\ \big(\det(A)\big)^2 = 1}$

4) L'ensemble des matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 constitue aussi un groupe appelé groupe spécial orthogonal, noté $\mathrm{SO}(n)$ ou encore $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Remarque

- Rappelons que, par définition, pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et toute base $\mathscr{B}$ de E :

$$\det(f) \ = \ \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) \ = \ \pm 1$$

  La dernière égalité est obtenue par le théorème précédent et le fait que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
- De la même manière que pour $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on peut mentionner que l'ensemble des isométries vectorielle de déterminant 1 forme un sous-groupe de (E) appelé groupe spécial orthogonal et noté $\mathrm{SO}(E)$. L'étude de ce groupe n'est pas au programme. C'est une approche purement matricielle qui a été préférée.

III. Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3

III.1. Relation d'orientation

III.1.a) Défintion

Définition

Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E.

- On dit que $\mathscr{B}_1$ a **la même orientation** que $\mathscr{B}_2$ si $\det(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}) > 0$.
- Dans la suite, on note : $\mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2$ pour signifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ont même orientation.

III.1.b) Classes d'équivalence de la relation d'orientation

Théorème 8.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- *La relation binaire $\mathcal{R}$ est :*
  - × *réflexive,*
  - × *symétrique,*
  - × *transitive.*

  Une telle relation définit une relation d'équivalence.
- *Il n'existe que deux orientations possibles. Ces deux orientations permettent de définir deux ensembles distincts :*
  - × *l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 1 ».*
    Ces bases seront dites **directes**.
  - × *l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 2 ».*
    Ces bases seront dites **indirectes**.

  Ces deux ensembles définissent une partition de l'ensemble des bases de E.
- *L'espace E est alors dit* **orienté**.

Remarque

Nous avons déjà rencontré d'autres relations binaires qui sont des **relations d'équivalence** :

- × $\underset{x \to x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur les fonctions définies au voisinage du point x_0.
- × $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur les propriétés mathématiques.
- × la relation de similitude (celle qui relie deux matrices semblables) est une relation d'équivalence sur les matrices.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
  - × La relation est réflexive : $\forall \mathscr{B}, \mathscr{B} \mathcal{R} \mathscr{B}$.
    Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n$ et ainsi :
    $$\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}) = 1 > 0$$
  - × La relation est symétrique : $\forall \mathscr{B}_1, \forall \mathscr{B}_2,\ \mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2 \ \Rightarrow\ \mathscr{B}_2 \mathcal{R} \mathscr{B}_1$.
    Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E.
    Supposons $\mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2$. Ainsi : $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) > 0$.
    Or $P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} = \left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)^{-1}$ et donc :
    $$\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}\right) = \det\left(\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)} > 0$$
  - × La relation est transitive : $\forall (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}3),\quad \left.\begin{array}{l} \mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2 \\ \mathscr{B}_2 \mathcal{R} \mathscr{B}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_3$.
    Soient $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ des bases de E.
    Supposons $\mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_2 \mathcal{R} \mathscr{B}_3$.
    Ainsi : $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) > 0$ et $\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}\right) > 0$. Or :
    $$P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3} \ = \ P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\ P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}$$

- Soient $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.
  Notons $\mathscr{B}_2 = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors :
$$\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) \;=\; \det\left(\mathrm{Diag}(-1, 1 \dots, 1)\right) = -1 < 0$$
  Ainsi, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ne sont pas dans la même classe d'équivalence. Démontrons alors que toute autre base $\mathscr{B}$ est soit dans la classe d'équivalence de $\mathscr{B}_1$ (c'est-à-dire $\mathscr{B}\ \mathcal{R}\ \mathscr{B}_1$) ou dans celle de $\mathscr{B}_2$ (c'est-à-dire $\mathscr{B}\ \mathcal{R}\ \mathscr{B}_2$). En effet :
$$\begin{aligned}\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}\right) &= \det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \times P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right)\\ &= \det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right)\\ &= -\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right)\end{aligned}$$
  En particulier, si $\mathscr{B}_1$ est un base orthonormée directe et $\mathscr{B}_2$ une base orthonormée indirecte, alors, pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$:
  - × si $\mathscr{B}$ est orthonormée directe alors $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}\right) = 1$ et $\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right) = -1$.
  - × si $\mathscr{B}$ est orthonormée directe alors $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}\right) = -1$ et $\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right) = 1$. $\square$

Remarque

- Orienter un espace, c'est choisir laquelle des deux orientations sera considérée comme directe (l'autre sera alors considérée comme indirecte).
- Dans $E = \mathbb{R}^n$, on choisit arbitrairement de fixer comme orientation directe (« orientation 1 ») l'orientation de la base canonique. On peut agir de même pour tous les espaces vectoriels de référence. Les bases directes sont alors celles qui ont la même orientation que les bases canoniques.
- Orienter une droite D c'est choisir un vecteur directeur v et fixer que la base (v) de D sera directe. Dans ce cas, toute autre base de D, c'est à dire toute famille $(\lambda\, v)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sera considérée comme :
  - × directe si $\lambda > 0$,
  - × indirecte si $\lambda < 0$.
- Dans un espace vectoriel orienté de dimension 3, orienter un plan P consiste à choisir un vecteur n **non inclus** dans P, puis à appeler :
  - × bases directes de P les bases (u, v) de P telles que (u, v, n) soit une base directe de E.
  - × bases indirectes de P les bases (u, v) de P telles que (u, v, n) soit une base directe de E.

III.2. Rappel sur la notion de déterminant

III.2.a) Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- On appelle forme n-linéaire sur E toute application $f : E^n \to \mathbb{K}$ qui est n-linéaire par rapport à chacune de ses n variables.
- L'ensemble des formes n-linéaires (sur E) alternées (ou de manière équivalente antisymétriques) est un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc une forme linéaire non nulle f qui engendre cet ensemble (pour toute autre forme n-linéaire alternée g, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g = \lambda\ f$).
- On appelle alors déterminant dans la base $\mathscr{B}_0$ l'unique forme n-linéaire alternée g sur E telle que : $g(e_1, \dots, e_n) = 1$. On note alors $g = \det_{\mathscr{B}_0}$.
- Deux formes n-linéaires alternées sont toujours colinéaires. Si $\mathscr{B}_1$ est une base de E, $\det_{\mathscr{B}_1}$ est une forme n-linéaire alternée et il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\det{}_{\mathscr{B}_0} \;=\; \mu \cdot \det{}_{\mathscr{B}_1}$$
  et : $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \;=\; \mu \times \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) \;=\; \mu$.
- Rappelons enfin que, si $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ alors :
$$\det{}_{\mathscr{B}_0}(u_1, \dots, u_n) \;=\; \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1),1} \times \ldots \times a_{\sigma(n),n} \;=\; \det(A)$$
  où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\ e_i$ et :
$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \;=\; \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1)\ \ \dots\ \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\Big)$$

- En particulier, si $\mathscr{B}_1 = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, alors, d'après ce qui précède, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\boxed{\begin{array}{rl} & \det_{\mathscr{B}_0}\big((u_1, \dots, u_n)\big) \\ = & \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ = & \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\Big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ = & \det\big(P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}\big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \end{array}}$$

III.2.b) Conséquence : calcul du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- Le calcul du déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans une base orthonormée directe est indépendant de la base orthonormée directe choisie. En effet, si $\mathscr{B}_1$ est une base orthonormée directe :

$$\begin{array}{rcl} \det_{\mathscr{B}_0}\big(u_1, \dots, u_n\big) & = & \det\big(P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}\big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ & = & \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \end{array}$$

III.3. Produit mixte

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On considère que l'espace E est orienté.
(le choix de l'orientation directe a été fait)

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- On appelle **produit mixte** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ et on note $[u_1, \dots, u_n]$, le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}_0$.

$$\begin{array}{rcl} [u_1, \dots, u_n] & = & \det_{\mathscr{B}_0}\big(\ (u_1, \dots, u_n)\ \big) \\ & = & \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\Big) \end{array}$$

Remarque

- Le produit mixte d'une base orthonormale directe vaut 1.
- Dans le cas $n = 2$, le produit mixte $[u, v]$ est l'aire algébrique du triangle porté par u et v.
- Dans le cas $n = 3$, le produit mixte $[u, v, w]$ est le volume algébrique du parallélépipède porté par u, v et w.

Considérations géométriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$
  Soit $(u, v) \in E \times E$

$$\boxed{[u, v] \ = \ \text{aire } \textbf{algébrique} \text{ du parallélogramme formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v) libre (le cas (u, v) lié donne $[u, v] = 0$).

× on remarque que $(u, v) \mapsto [u, v] = \det_{\mathscr{B}_0}(u, v)$ est bilinéaire. En conséquence :

$$\begin{aligned}
[u, v] &= [u, v + \alpha \cdot u] && \textit{(pour n'importe quel } \alpha\textit{)} \\
&= [u, p_F(v)] && \textit{(en notant } F = (\operatorname{Vect}(u))^{\perp}\textit{)} \\
&= [u, h] && \textit{(en notant } h = p_F(v)\textit{)} \\
&= [\|u\| \, \frac{u}{\|u\|}, \|h\| \, \frac{h}{\|h\|}] \\
&= \|u\| \, \|h\| \, \left[\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}\right] \\
&= \|u\| \, \|h\| \, \det_{\mathscr{B}_0}\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) \\
&= \|u\| \, \|h\| \, \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \, \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) && \textit{(en notant } \mathscr{B}_1 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}\right)\textit{)} \\
&= \pm\|u\| \, \|h\| \ = \ \pm\|u\| \, \|v\| \times \sin(\widehat{u, v})
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\boxed{\frac{1}{2} \, |\,[u, v]\,| \ = \ \text{aire du triangle formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

- Dans le cas $n = 3$
  Soit $(u, v, w) \in E \times E \times E$

$$\boxed{[u, v] \ = \ \begin{array}{l}\text{volume } \textbf{algébrique} \text{ du parallélépipède} \\ \text{formé par les vecteurs } u, \, v \text{ et } w\end{array}}$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v, w) libre (le cas (u, v, w) lié donne $[u, v, w] = 0$).

× on remarque que $(u, v, w) \mapsto [u, v, w] = \det_{\mathscr{B}_0}(u, v, w)$ est 3-linéaire. En conséquence :

$$\begin{aligned}
[u, v, w] &= [u, v + \alpha \cdot u, w] && \textit{(pour n'importe quel } \alpha \textit{ d'ap} \\
& && \textit{caractère 3-linéaire et altern} \\
&= [u, p_F(v), w] && \textit{(en notant } F = (\operatorname{Vect}(u))^{\perp} \\
&= [u, h, w] && \textit{(en notant } h = p_F(v)\textit{)} \\
&= [u, h, w + \lambda \cdot u + \mu \cdot h] && \textit{(pour n'importe quel couple} \\
& && \textit{le caractère 3-linéaire et alt} \\
&= [u, h, t] && \textit{(en notant } t = p_G(w) \\
& && \textit{où } G = (\operatorname{Vect}(u, h))^{\perp}\textit{)} \\
&= \left[\|u\| \, \frac{u}{\|u\|}, \|h\| \, \frac{h}{\|h\|}, \|t\| \, \frac{t}{\|t\|}\right] \\
&= \|u\| \, \|h\| \, \|t\| \, \left[\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}, \frac{t}{\|t\|}\right] \\
&= \|u\| \, \|h\| \, \|t\| \, \det_{\mathscr{B}_0}\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}, \frac{t}{\|t\|}\right) \\
&= \|u\| \, \|h\| \, \|t\| \, \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \, \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) && \textit{(en notant } \mathscr{B}_1 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{h}{\|h\|}, \frac{t}{\|t\|}\right)\textit{)} \\
&= \pm\|u\| \, \|h\| \, \|t\| \\
&= \pm\|u\| \, \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|t\| \\
&= \pm\|u\| \, \|v\| \times \sin(\widehat{u, v}) \times \|w\| \times \cos\left(\widehat{w, t}\right) \\
&= \langle u \wedge v, w \rangle && \textit{(où } u \wedge v \textit{ est défini plus loi}
\end{aligned}$$

III.4. Produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension 3

III.4.a) Définition

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.

Soit $(u, v) \in E^2$.

- Comme $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :
$$\forall x \in E, \ [u, v, x] \ = \ \langle a, x \rangle$$
Ce vecteur est noté $u \wedge v$ et s'appelle le produit le **produit vectoriel** de u et v.

Remarque

- De manière équivalente, pour tout $(u, v) \in E \times E$, on peut définir $u \wedge v$ par :
  - × si u et v sont colinéaires alors $u \wedge v = 0$.
  - × si u et v ne sont pas colinéaires :
    - ▸ $u \wedge v$ orthogonal à u et $u \wedge v$ orthogonal à v
    - ▸ $\big(u, v, u \wedge v\big)$ est une base directe
    - ▸ $\| u \wedge v \| \ = \ \| u \| \, \| v \| \times \sin(\widehat{u, v})$
- Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe alors :
$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1 \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

III.4.b) Propriétés du produit vectoriel

Théorème 9. *(propriétés du produit vectoriel)*

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ *un espace euclidien* **orienté** *où* E *est de dimension* 3.

1. $\boxed{\forall (u, v, x) \in E^3, \ [u, v, x] \ = \ \langle u \wedge v, x \rangle}$

2. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ u \wedge v \ = \ -v \wedge u}$

3. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ u \wedge v \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ \text{Les vecteurs } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}}$

4. *L'application* $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & u \wedge v \\ (u, v) & \mapsto & E \end{array}$ *est bilinéaire et alternée.*
(ou de manière équivalente : bilinéaire et antisymétrique)

5. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ \text{Le vecteur } u \wedge v \text{ est orthogonal à } u \text{ et à } v}$

En particulier, si la famille (u, v) *est libre :* $\big(\mathrm{Vect}\,(u, v)\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(u \wedge w)$.

6. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ \text{La famille } (u, v) \text{ est libre} \ \Rightarrow \ \begin{array}{l}\text{La famille } (u, v, u \wedge v) \\ \text{est une base directe de } E\end{array}}$

En particulier, si $u \neq 0_E$ *et* $v \neq 0_E$ *sont orthogonaux alors* $\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}, \dfrac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}\right)$ *est une base orthonormée directe de* E.

7. *Soit* $\mathscr{B}_0$ *une base orthonormée directe de* E. *Soit* $(u, v) \in E^2$. *On note :*
- × (u_1, u_2, u_3) *les coordonnées de* u *dans* $\mathscr{B}_0$.
- × (v_1, v_2, v_3) *les coordonnées de* v *dans* $\mathscr{B}_0$.

$u \wedge v$ *est de coordonnées* $\big(u_2\, v_3 - u_3\, v_2, -\big(u_1\, v_3 - u_3\, v_1\big), u_1\, v_2 - u_2\, v_1\big)$ *dans la base* $\mathscr{B}_0$

Cas particulier de l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2\, v_3 - u_3\, v_2 \\ -\big(\ u_1\, v_3 - u_3\, v_1\ \big) \\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1 \end{pmatrix}}$$

8. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \| u \wedge v \| = \| u \| \ \| v \| \times \sin(\widehat{u, v})}$

9. *Identité de Lagrange :* $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \| u \wedge v \|^2 + \langle u, v \rangle^2 \ = \ \| u \|^2 \times \| v \|^2}$

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

IV.1. Classification des matrices orthogonales en dimension 2

Théorème 10.

1. *Soit* $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \ \Leftrightarrow\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \text{ou}\ A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, *on note alors :*

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\det(R(\theta)) = 1}$ *et* $\boxed{\det(S(\theta)) = -1}$

3. a) $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta) = R(-\theta)}$

b) $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{S(\theta)^{-1} = {}^tS(\theta) = S(\theta)}$

4. a) $\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')}$

(en particulier les matrices $R(\theta)$ *et* $R(\theta')$ *commutent)*

b) $\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta) \times S(\theta') = R(\theta - \theta')}$

$\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times S(\theta') = S(\theta + \theta')}$

$\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta') \times R(\theta) = S(\theta' - \theta)}$

5. *L'ensemble* $\{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ *est l'ensemble des matrices orthogonales directes. On rappelle qu'il est noté* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, *ou parfois* $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$.
Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *sont des* **rotations vectorielles** *(parmi elles* I_2 *et* $-I_2$*).*

6. *L'ensemble* $\{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ *est l'ensemble des matrices orthogonales indirectes. Il est parfois noté* $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$.
Les éléments de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ *sont des* **symétries orthogonales** *par rapport à une droite vectorielle.*

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \ &\Leftrightarrow\ M^T M = I_2 \\
&\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{rcl} a^2 + c^2 &=& 1 \\ b^2 + d^2 &=& 1 \\ ab + cd &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow\ \exists \big(\theta, \alpha\big) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l} a = \cos(\theta),\ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha),\ d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta)\ \cos(\alpha) + \sin(\theta)\ \sin(\alpha) = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow\ \exists \big(\theta, \alpha\big) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l} a = \cos(\theta),\ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha),\ d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta - \alpha) = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow\ \exists \big(\theta, \alpha\big) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l} a = \cos(\theta),\ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha),\ d = \sin(\alpha) \\ \alpha \equiv \theta \pm \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \ \text{ou}\ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\det\big(R(\theta)\big) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 \\
\det\big(S(\theta)\big) &= -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = -1
\end{aligned}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) $R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)^T$

b) Évident.

4. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned} & R(\theta) \times R(\theta') \\ = & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(\theta)\,\cos(\theta') - \sin(\theta)\,\sin(\theta') & -\big(\cos(\theta)\,\sin(\theta') + \sin(\theta)\,\cos(\theta')\big) \\ \sin(\theta)\,\cos(\theta') + \cos(\theta)\,\sin(\theta') & \cos(\theta)\,\cos(\theta') - \sin(\theta)\,\sin(\theta') \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\ = & R(\theta+\theta') \end{aligned}$$

b) toujours utilisation des formules d'addition □

Remarque

Soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

L'ensemble $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par A. En effet :

$$F = \mathrm{Ker}(A - I_2) = \{X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$$

Trois cas se présentent alors :

× si $\dim(F) = 2$, alors $F = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (inclusion et égalité des dimensions) et ainsi $A = I_2$.

× si $\dim(F) = 1$, alors l'ensemble des vecteurs invariants par A est une droite vectorielle.
Dans ce cas, A est une symétrie orthogonale par rapport à F (axe de cette symétrie).

× si $\dim(F) = 0$, alors seul $0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ est invariant par A. Dans ce cas, A est une rotation vectorielle.

Remarque

- L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array} \right.$ est donc un morphisme de groupes.
- L'ensemble $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif.
- L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & \big(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times\big) \\ \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array} \right.$ est un morphisme surjectif de noyau $2\pi\,\mathbb{Z}$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On peut déterminer la droite vectorielle laissée invariante par $S(\theta)$. Pour cela, on déterminer $\mathrm{Ker}\,\big(S(\theta) - I_2\big)$.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} & X \in \mathrm{Ker}\,\big(S(\theta) - I_2\big) \\ \Leftrightarrow\ & \big(S(\theta) - I_2\big)\, X = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \big(\cos\theta - 1\big)\, x & + & \sin\theta\, y & = & 0 \\ \sin\theta\, x & - & \big(\cos\theta + 1\big)\, y & = & 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \left(-\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) x + \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) y\right) & = & 0 \\ -2\,\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \left(-\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) x + \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) y\right) & = & 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) x - \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) y = 0 \end{aligned}$$

  Les vecteurs invariants par $S(\theta)$ sont ceux de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(u)$ où $u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

IV.2. Conséquence : classification des isométries vectorielles en dimension 2

Théorème 11.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace euclidien* **orienté** *où* E *est de dimension* 2.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Deux cas se présentent.

1. *Si* $\det(f) = -1$
   - *Dans ce cas, il existe une base orthonormée* $\mathscr{B}$ *de* E *telle que :*
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   - *L'application* f *est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, c'est-à-dire par rapport à un hyperplan de* E.
   On dit alors que f *est une* **réflexion**.
2. *Si* $\det(f) = 1$
   - *Dans ce cas, dans* `TOUTE` *base orthonormale* **directe** $\mathscr{B}$ *de* E *:*
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$$
   où le réel θ, *unique modulo* 2π, *ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.*
   - *L'application* f *est une* **rotation vectorielle**.
   - *Le réel* θ *est appelé* **mesure de l'angle** *de la rotation* f.

Démonstration.
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. La matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans $\mathscr{B}$ est orthogonale par Théorème 6 , donc de type $S(\theta)$ ou $R(\theta)$ d'après le Théorème 11 .

1. Si $M = S(\theta)$, alors $M^2 = S(\theta)^2 = I_2$, donc f est une symétrie.
   On cherche maintenant une base $\mathscr{B}'$ de E telle que :
   $$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\, M\, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; S(0)$$
   Pour cela on cherche $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ sous la forme $R(\alpha)$.
   D'après le Théorème 11 :
   $$R(\alpha)\, S(\theta)\, R(\alpha)^{-1} \;=\; S(\alpha+\theta)\, R(-\alpha) \;=\; S\big(\alpha+\theta-(-\alpha)\big) \;=\; S(\theta+2\alpha)$$
   On choisit donc $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$.
2. Si $M = R(\theta)$, alors f est une rotation.
   De plus si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormales directes de E, alors la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est orthogonale et de déterminant 1. Elle est donc de type $P = R(\theta')$ d'après le théorème 11. Ainsi :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \;=\; P^{-1} M P \;=\; R(-\theta')\, R(\theta)\, R(\theta') \;=\; R(-\theta'+\theta+\theta') \;=\; R(\theta)$$
   de sorte que le réel θ ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. □

Remarque

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. L'inverse de la rotation d'angle θ est la rotation d'angle $-\theta$, et la composée des rotations d'angle θ et θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

2. La rotation d'angle 0 est id_E, de matrice $R(0) = I_2$, et la rotation d'angle π est $-\mathrm{id}_E$, de matrice $R(\pi) = -I_2$. Ce sont les deux seules (matrices de) rotations diagonalisables (sur $\mathbb{R}$), et les autres n'ont pas de valeur propre réelle.

3. Si f est une rotation vectorielle d'angle de mesure θ alors, pour tout vecteur unitaire a :

× $\cos(\theta) = \langle a, f(a) \rangle$.

× $\sin(\theta) = \det_{\mathscr{B}} \big(a, f(a)\big)$ pour toute BON directe $\mathscr{B}$.

Pour le démontrer, il suffit de compléter la famille (a) en une BOND (a, b) (b est alors défini de manière unique).

4. Soient $(u, v) \in \big(E \setminus \{0_E\}\big)^2$, où E est un espace euclidien orienté de dimension 2.
Alors il existe une unique rotation vectorielle r telle que :

$$r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$$

On définit la mesure de l'angle (u, v) comme la mesure de l'angle de cette rotation r. Cette mesure dépend du choix que l'on a fait pour l'orientation du plan E et est notée $\mathrm{mes}(u, v)$.

5. Par isomorphisme de représentation, on déduit du Théorème 10 ***4.b)*** qu'une rotation peut s'écrire comme composée de deux réflexions (la première pouvant être choisie arbitrairement).

Plus précisément :

× soit s_1 la réflexion par rapport à $D_1 = \mathrm{Vect}\,(u_1)$,

× soit s_2 la réflexion par rapport à $D_2 = \mathrm{Vect}\,(u_2)$,

alors $s_2 \circ s_1$ est la rotation d'angle $2\,\mathrm{mes}(u_1, u_2)$.
On peut en conclure que $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions (dans le cas où E est de dimension 2).

V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

V.1. Étude rapide de l'ensemble des vecteurs invariants d'une isométrie vectorielle directe

Théorème 12.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté**.

On suppose que E est de dimension 3.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. $\boxed{f \in \mathrm{O}(E) \Rightarrow \textit{f possède au moins une valeur propre égale à 1 ou } -1}$

2. $\boxed{f \in \mathrm{SO}(E) \Rightarrow f \textit{ admet } 1 \textit{ comme valeur propre}}$

Démonstration.

1. Comme χ_f est à coefficients réels et de degré 3, χ_f possède au moins une racine réelle λ.
Comme $f \in \mathrm{O}(E)$, $\lambda = \pm 1$.

2. On raisonne par l'absurde. On suppose que f ne possède pas la valeur propre 1.
Ainsi, la seule valeur propre réelle de f est -1. Comme χ_f est de degré 3, deux cas se présentent.

▸ $\chi_f(X) = \big(X - (-1)\big)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ et ainsi $\det(f) = -1$.
Impossible !

▸ $\chi_f(X) = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})\big(X - (-1)\big)$ et ainsi $\det(f) = -|\,\alpha\,|^2$.
Impossible ! □

Remarque

- Tout isométrie vectorielle directe possède 1 comme valeur propre. Ainsi, $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ est un sous-espace propre de f.
- Cet ensemble $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont invariants par f. Son étude va permettre de caractériser $\mathrm{SO}(E)$.

V.2. Caractérisation des isométries vectorielles en dimension 3

Théorème 13.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace euclidien* **orienté**.

On suppose que E *est de dimension* 3.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Notons $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

1) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 3}$ *alors* $f = \mathrm{id}_E$.

2) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 2}$ *(***hors-programme***) alors* f *est la réflexion par rapport au plan* F. *Dans ce cas,* f *est une isométrie vectorielle indirecte.*

3) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 1}$ *alors :*

- × *le plan vectoriel* $P = \Big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)\Big)^{\perp}$ *est stable par* f,
- × *l'endomorphisme* $f\|_P$ *est une rotation de* P *différente de* id_P.

Dans ce cas, f *est une isométrie vectorielle directe, appelée rotation d'axe* $D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

4) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 0}$ *(***hors-programme***).*

Étude du cas $\dim\Big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)\Big) = 1$

On note $D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. *Comme* $\dim(D) = 1$, *la droite vectorielle* D *est dirigée par un vecteur* $a \neq 0_E$.

On note $P = D^{\perp}$.

On note alors θ *la mesure de l'angle de la rotation* $f\|_P$.

Ainsi, f *est la rotation d'axe* D *et d'angle de mesure* θ.

La matrice de f *dans toute base base orthonormée directe* $\mathscr{B}$ *de la forme* $\left(\dfrac{a}{\|a\|}, e_2, e_3\right)$ *est :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \ = \ \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Remarque

- Les matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont exactement les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des rotations vectorielles.
- Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Pour démontrer que $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que A est la représentation matricielle, dans une base orthonormée d'une rotation vectorielle $f \in \mathrm{SO}(E)$), on démontre que :

  1) $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. Il s'agit de démontrer que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  On note C_1, C_2 et C_3 les 3 colonnes de A et on démontre :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!], \ \langle C_i, C_j\rangle = \delta_{i,j}$$

  2) $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Pour ce faire on peut :
  - × soit démontrer $\det(A) = 1$.
  - × soit démontrer : $C_3 = C_1 \wedge C_2$.
    En effet, comme $\langle C_3, C_1\rangle = 0$ et $\langle C_3, C_2\rangle = 0$ alors :
    $$C_3 \in (\mathrm{Vect}\,(C_1, C_2))^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(C_1 \wedge C_2)$$
    Comme $\|C_3\| = 1$ alors $C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$.
    Si on note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:
    $$1 = \det(A) = \det\big(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3\end{pmatrix}\big) \ = \ [C_1, C_2, C_3] \ = \ \langle C_1 \wedge C_2, C_3\rangle_{\mathscr{B}}$$
    Et ainsi : $C_1 \wedge C_2 = C_3$.

  3) Il reste alors à déterminer les éléments caractéristiques de f : l'axe de la rotation $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et son angle θ.
  - × le cosinus de l'angle θ est donné par :
    $$\begin{aligned} \mathrm{tr}(f) &= \mathrm{tr}\,(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)) \\ &= 1 + 2\,\cos(\theta) \end{aligned}$$
    Ainsi : $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}\,(\,\mathrm{tr}(f) - 1\,)$.
  - × il reste enfin à détermine le signe de θ. Pour tout $u \in (\mathrm{Vect}\,(a))^{\perp}$:
    $$\det\big(\,a, u, f(u)\,\big) \ = \ \langle a \wedge u, f(u)\rangle \text{ est du signe de } \sin(\theta)$$

VI. Endomorphismes auto-adjoints

VI.1. Notion d'endomorphisme auto-adjoint

VI.1.a) Définition

Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que f est **auto-adjoint** (ou **symétrique**) si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle \ = \ \langle x, f(y)\rangle$$

- On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.

Remarque

- Dans un espace euclidien, on peut démontrer que pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle \ = \ \langle x, g(y)\rangle$$

  Dans ce cas, on dit que f et g sont adjoints l'un de l'autre ou tout simplement que g est l'adjoint de f. On note généralement f^* l'adjoint d'un endomorphisme f.
- On comprend dès lors beaucoup mieux le terme d'endomorphisme « auto-adjoint ». Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est auto-adjoint s'il est son propre adjoint.

Exemple

Considérons $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

- L'endomorphisme $0_{\mathscr{L}(E)}$ est auto-adjoint. Cela démontre déjà que le caractère auto-adjoint n'implique pas la propriété d'isométrie ($\mathscr{S}(E) \not\subset \mathrm{O}(E)$).
- L'endomorphisme id_E est auto-adjoint.
- De manière générale, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $\lambda \cdot \mathrm{id}_E$ est auto-adjoint (si $\lambda \neq \pm 1$, on démontre de nouveau : $\mathscr{S}(E) \not\subset \mathrm{O}(E)$).
- Les puissances d'un endomorphisme auto-adjoint sont auto-adjointes.

Exercice

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $(f,g) \in \Big(\mathscr{S}(E)\Big)^2$.

Démontrer : $f \circ g \in \mathscr{S}(E) \ \Leftrightarrow \ f \circ g = g \circ f$.

VI.2. Exemple d'endomorphismes auto-adjoints : les projecteurs et symétries orthogonales

VI.2.a) Rappel sur les projecteurs et les symétries

Théorème 14.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que F et G sont des sev supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$.

$\hookrightarrow$ pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que :

$$u = u_F + u_G$$

- *On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application :*

$$p : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F \end{array}$$

  Dans ce cas :

  $\times$ $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \mathrm{Im}(p)$

  $\times$ $G = \mathrm{Ker}(p) = \{x \in E \mid p(x) = 0_E\}$

- *On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application :*

$$s : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F - u_G \end{array}$$

  Dans ce cas :

  $\times$ $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$

  $\times$ $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$

- *Caractérisation : pour tout $p \in \mathscr{L}(E)$ et tout $s \in \mathscr{L}(E)$:*

$$\boxed{p \text{ est un projecteur} \ \Leftrightarrow \ p \circ p = p} \qquad \boxed{s \text{ est une symétrie} \ \Leftrightarrow \ s \circ s = \mathrm{id}_E}$$

VI.2.b) Projecteurs et symétries orthogonales

Théorème 15.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien.*

- *On appelle* **projecteur orthogonal sur** F *le projecteur sur* F *parallèlement à* $F^\perp$. *Ainsi, pour tout projecteur* $p \in \mathscr{L}(E)$ *:*

$$\boxed{\begin{array}{cl} & \textit{L'application } p \textit{ est un projecteur orthogonal} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Im}(p) \textit{ et } \mathrm{Ker}(p) \textit{ sont orthogonaux} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathrm{Ker}(p), \forall y \in \mathrm{Im}(p), \langle x, y \rangle = 0 \end{array}}$$

- *On appelle* **symétrie orthogonale par rapport à** F *la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* $F^\perp$.
  Ainsi, pour toute symétrie $s \in \mathscr{L}(E)$ *:*

$$\boxed{\begin{array}{cl} & \textit{L'application } s \textit{ est une symétrie orthogonale} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}\big(s - \mathrm{id}_E\big) \textit{ et } \mathrm{Ker}\big(s + \mathrm{id}_E\big) \textit{ sont orthogonaux} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathrm{Ker}\big(s - \mathrm{id}_E\big), \forall y \in \mathrm{Ker}\big(s + \mathrm{id}_E\big), \langle x, y \rangle = 0 \end{array}}$$

VI.2.c) Les projecteurs / symétries auto-adjoint(e)s sont les projecteurs / symétries orthogonal(e)s

Théorème 16.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien.*
Notons $n = \dim(E)$. *On suppose* $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de* E.
Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ *un projecteur et soit* $s \in \mathscr{L}(E)$ *une symétrie.*

1.
$$\boxed{\begin{array}{cl} & \textit{L'application } p \textit{ est un projecteur orthogonal} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) \\ \Leftrightarrow & \textit{L'appliaction } p \textit{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{array}}$$

2.
$$\boxed{\begin{array}{cl} & \textit{L'application } s \textit{ est une symétrie orthogonale} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)\big)^2 = I_n \\ \Leftrightarrow & \textit{L'application } s \textit{ est un endomorphisme auto-adjoint} \end{array}}$$

Exercice

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
On note $n = \dim(E)$ et on suppose $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f, présentes avec leur multiplicité.

Démontrer : $\forall x \in E,\ \lambda_1 \, \|x\|^2 \ \leqslant\ \langle u(x), x \rangle \ \leqslant\ \lambda_n \, \|x\|^2$.

Exercice

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
On note $n = \dim(E)$ et on suppose $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.
On note : $\rho(f) = \max \{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeurs propre de } f\}$

Démontrer : $\forall x \in E,\ \lambda_1 \, \|x\|^2 \ \leqslant\ \langle u(x), x \rangle \ \leqslant\ \lambda_n \, \|x\|^2$.

VI.2.d) Structure de l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints

Théorème 17.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ *un espace euclidien.*

- *L'ensemble* $\mathscr{S}(E)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{L}(E)$.

VI.2.e) Lien entre endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Théorème 18.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ *un espace euclidien.*
On note $\mathscr{B}$ *une base orthonormale de* E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. $\boxed{f \text{ est auto-adjoint} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est symétrique}}$

(f est auto-adjoint si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormée est symétrique réelle)

2. a) *L'application* Φ *suivante :*

$$\Phi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. Elle induit de plus un ismorphisme de $\mathscr{S}(E)$ *sur* $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, *ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre* n.

b) $\boxed{\dim\big(\mathscr{S}(E)\big) = \dfrac{n\,(n+1)}{2}}$

Démonstration.

1. ($\Rightarrow$) Supposons : $f \in \mathscr{S}(E)$.

- Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors pour tout $u \in E$:

$$u \; = \; \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \ldots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n$$

En particulier, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\boxed{f(e_j) \; = \; \langle f(e_j), e_1 \rangle \cdot e_1 + \ldots + \langle f(e_j), e_n \rangle \cdot e_n}$$

- Rappelons par ailleurs : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1)\big) \; \ldots \; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_n)\big)\Big)$.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & \Big(\Big\langle f(e_j), e_i \Big\rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \\ & = & \Big(\Big\langle e_j, f(e_i) \Big\rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \textit{(car } f \in \mathscr{S}(E)\textit{)} \\ & = & \Big(\Big\langle f(e_i), e_j \Big\rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} & \textit{(par symétrie du produit scalaire)} \\ & = & \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)^t & \end{array}$$

□

Remarque

1. Pour toute matrice symétrique $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S est auto-adjoint (relativement au produit scalaire canonique).

2. On retrouve que les homothéties et les projections/symétries orthogonales sont des endomorphismes auto-adjoints.

VI.3. Théorème spectral

VI.3.a) Éléments propres d'un endomorphisme auto-adjoint

Théorème 19.
Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint de E.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. $\boxed{\begin{array}{c}F \text{ est un sous-espace} \\ \text{vectoriel de } E \text{ stable par } f\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c}F^\perp \text{ est un sous-espace} \\ \text{vectoriel de } E \text{ stable par } f\end{array}}$

2. *Les valeurs propres (complexes) de f sont toutes réelles.*

En particulier, si $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, alors tout endomorphisme auto-adjoint f admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. *Les sous-espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux.*

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à S. Autrement dit :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} X & \mapsto & SX \\ \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

1. $\boxed{\begin{array}{c}F \text{ est un sous-espace vectoriel de} \\ \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ stable par } f\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c}F^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel} \\ \text{de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ stable par } f\end{array}}$

2. *Les valeurs propres (complexes) de S sont toutes réelles.*

En particulier, toute matrice symétrique réelle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

3. *Les sous-espaces propres réels de S sont 2 à 2 orthogonaux (pour le produit scalaire canonique).*

Démonstration.

1. ($\Rightarrow$) Supposons que F est stable par f.
Démontrons que $F^\perp$ est stable par f. Il s'agit de démontrer :

$$\forall x \in F^\perp, f(x) \in F^\perp$$

Soit $x \in F^\perp$. Démontrons $f(x) \in F^\perp$. Il s'agit donc de démontrer : $\forall y \in F$, $\langle f(x), y\rangle = 0$.

Soit $y \in F$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} \langle f(x), y\rangle & = & \langle x, f(y)\rangle & \textit{(car } f \textit{ est un endomorphisme auto-adjoint)} \\ & = & 0 & \textit{(car } x \in F^\perp \textit{ et } f(y) \in F \textit{ puisque } y \in F \textit{ et } F \textit{ stable par } f\textit{)} \end{array}$$

D'où : $f(x) \in F^\perp$.

($\Rightarrow$) On suppose $G = F^\perp$ stable par f.
D'après le point précédent, $G^\perp = \big(F^\perp\big)^\perp = F$ est stable par f.

2. L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre complexe λ (car χ_f, polynôme de degré $\dim(E)$, possède au moins une racine complexe).
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.
Notons alors $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ (et $\overline{X}$ la matrice colonne conjuguée). Alors :

× d'une part :

$$\begin{array}{rcll} \overline{X}^T S\, X & = & \overline{X}^T (\lambda\, X) & \textit{(car } SX = \lambda\, X \textit{ par définition de } X\textit{)} \\ & = & \lambda\, \overline{X}^T X & \end{array}$$

× d'autre part :

$$\begin{array}{rcll} \overline{X}^T S\, X & = & \overline{X}^T S^T X & \textit{(car } S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \textit{ est symétrique)} \\ & = & \Big(S\,\overline{X}\Big)^T X & \\ & = & \Big(\overline{S\,X}\Big)^T X & \textit{(car } S = \overline{S} \textit{ puisque } S \textit{ est une matrice réelle)} \\ & = & \Big(\overline{\lambda\, X}\Big)^T X & \\ & = & \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X & \end{array}$$

On en conclut : $\boxed{\lambda\, \overline{X}^T X = \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X}$ ou encore : $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\, \overline{X}^T X = 0$.
De plus :

$$\begin{array}{rcll} \overline{X}^T X & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, x_i & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} |\, x_i\,|^2 & \\ & > & 0 & \textit{(comme } X \textit{ est un vecteur propre, } X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \\ & & & \textit{et l'un au moins de ses coefficients est non nul)} \end{array}$$

Donc : $\overline{\lambda} - \lambda = 0$. Ainsi : $\overline{\lambda} = \lambda$ c'est-à-dire : $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et soit $y \in \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \lambda\, \langle x, y\rangle & = & \langle f(x), y\rangle \\ & = & \langle x, f(y)\rangle \\ & = & \mu\, \langle x, y\rangle \end{array}$$

Ainsi : $(\lambda - \mu)\, \langle x, y\rangle = 0$. Donc : $\langle x, y\rangle = 0$ (car $\lambda \neq \mu$).
Les sous-espaces propres de f sont donc orthogonaux. □

VI.3.b) Théorème spectral

Théorème 20.
Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée de E.

Alors, f est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) dans une base orthonormée.
Autrement dit, il existe une BON $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice diagonale réelle.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) \;=\; P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_0}} \qquad \textit{avec } P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe :

- *une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,*
- *une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,*

telles que : $\boxed{S = P\, D\, P^T}$.

Remarque
Si $f \in \mathscr{S}(E)$ est un endormorphisme auto-adjoint, alors f est ortho-diagonalisable. Cela signifie qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale réelle. Cette base est, par définition, constituée de vecteurs propres de f. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est associé à une valeur propre notée λ_i (il est à noter que ces valeurs propres ne sont pas forcément distinctes).

Démonstration.
On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: pour tout espace vectoriel E de dimension n, toute application $f \in \mathscr{S}(E)$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

- **Initialisation** : évident.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (c'est-à-dire pour tout espace vectoriel E de dimension $n+1$, tout $f \in \mathscr{S}(E)$ est diagonalisable en base orthonormée).
  Soit E un espace vectoriel tel que : $\dim(E) = n+1$. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.
  - Comme f est auto-adjoint, alors il admet une valeur propre réelle λ.
    Soit a un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
  - On sait que :
    - l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(a)$ est stable par f,
    - l'endomorphisme f est auto-adjoint.

    On en déduit que $\Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^{\perp}$ est stable par f.
    On peut ainsi définir $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\Big(\mathrm{Vect}\,(a)\Big)^{\perp}$.

- L'endomorphisme $\tilde{f}$ est auto-adjoint pour le produit scalaire induit sur $\Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^{\perp}$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de $\Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^{\perp}$ constituée de vecteurs propres de $\tilde{f}$.
- La famille $(e_1, \dots, e_n, \frac{a}{\|a\|})$ est alors une base orthonormale de E, et est constituée de vecteurs propres de f.

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$. □

VI.4. Endomorphisme auto-adjoint positif et défini positif

VI.4.a) Définition

Définition

A) Cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

- On dit que f est :
  - × **positif** si : $\boxed{\forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle \geqslant 0}$
  - × **défini positif** si : $\boxed{\begin{cases} \forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle \geqslant 0 \\ \forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{cases}}$
- On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs.
- On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs.

B) Cas des matrices carrées

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est :
  - × **positive** si : $\boxed{\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geqslant 0}$
  - × **définie positive** si :

$$\boxed{\begin{cases} \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), & X^T A X \geqslant 0 \\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), & X^T A X = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{cases}}$$

- On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
- On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

C) Lien entre les deux

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

f auto-adjoint positif	$\Leftrightarrow$	$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice symétrique positive

f auto-adjoint défini positif	$\Leftrightarrow$	$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice symétrique définie-positive

VI.4.b) Caractérisation du caractère (défini) positif par signe des valeurs propres

Théorème 21.

A) *Cas des endomorphismes*

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

1. $\boxed{\textit{L'endomorphisme } f \textit{ est positif} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\textit{L'endomorphisme } f \textit{ est défini positif} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est défini-positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

B) *Cas des matrices carrées*

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. $\boxed{\textit{La matrice } A \textit{ est positive} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\textit{La matrice } A \textit{ est définie positive} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration.

1. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- Comme f est auto-adjoint positif : $\langle x, f(x) \rangle \geqslant 0$.
- De plus : $\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda\, x \rangle = \lambda \, \langle x, x \rangle = \lambda \, \|x\|^2$.

On en déduit : $\lambda \, \|x\|^2 \geqslant 0$. Or, comme $x \neq 0_E$ (c'est un vecteur propre de f), alors : $\|x\| \neq 0$.
Finalement :

$$\lambda \, \|x\|^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0 \quad \text{donc} \quad \lambda \geqslant 0$$

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

- Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (pas forcément distinctes) de l'endomorphisme f.
  Comme $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
- Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint, alors, par théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de f. Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
- Soit $x \in E$. Alors il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.
  Par linéarité de f :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i \cdot e_i$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\left\langle x, f(x) \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \cdot e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \cdot e_j \right\rangle && \textit{(par linéarité à gauche de } \langle \cdot, \cdot \rangle\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle \right) && \textit{(par linéarité à droite de } \langle \cdot, \cdot \rangle\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \, \delta_{i,j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \ (\ \lambda_i \, x_i \ ) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ (\ x_i \ )^2 \ \geqslant \ 0
\end{aligned}$$

Donc l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.

2. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme auto-adjoint f est défini positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- En particulier, l'endomorphisme auto-adjoint f est positif. Comme vu dans le point ***1.*** :

$$\langle x, f(x) \rangle \ = \langle x, \lambda \, x \rangle = \lambda \, \langle x, x \rangle \ = \ \lambda \, \|x\|^2 \ \geqslant \ 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geqslant 0$$

- Ici, on suppose que l'endomorphisme auto-adjoint f est défini positif. Ainsi :

$$\langle x, f(x) \rangle \ > \ 0 \qquad \textit{(puisque } x \neq 0_E\textit{)}$$

Finalement :

$$\lambda \, \|x\|^2 \ > \ 0 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0$$

On en conclut : $\lambda > 0$.

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.
On reprend les notations du point ***1*** :

× λ_1, …, λ_n les valeurs propres (pas forcément distinctes) de f,

× $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée constituée de vecteurs propres de f et telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

- Comme : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$ alors d'après ***1.***, on sait déjà que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.
- Démontrons qu'il est défini-positif. Soit $x \in E$.
Supposons : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Démontrons : $x = 0_E$.

  × Comme $x \in E$, alors il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.

  Alors, comme en ***1.*** : $\langle x, f(x) \rangle \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, \big(x_i\big)^2$.

  × Or, par hypothèse : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Donc : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, \big(x_i\big)^2 = 0$.

  Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \, \big(x_i\big)^2 \geqslant 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
& \forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i \, \big(x_i\big)^2 = 0 \\
\text{donc} \quad & \forall i \in [\![1, n]\!], \ \big(x_i\big)^2 = 0 && \textit{(car } \forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i > 0 \ \textit{puisque } \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
\text{donc} \quad & \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0
\end{aligned}$$

  Finalement : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i = 0_E$.

L'endomorphisme auto-adjoint f est donc défini positif. □

Exemple

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T A$ et $A \, A^T$ sont symétriques positives.
- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T A$ et $A \, A^T$ sont symétriques définies positives.

`À RETENIR` (aspect théorique)

- Cet exercice est une excellente illustration de beaucoup d'exercices sur les endomorphismes auto-adjoints. Plus précisément :
  × pour le sens direct, on doit démontrer une propriété sur le spectre de f c'est-à-dire sur chacune des valeurs propres λ de f. Pour ce faire, on introduit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ et on travaille sur ce vecteur propre.
  × pour le sens réciproque, on doit démontrer une propriété vérifiée pour tout $x \in E$. Pour ce faire, comme f est auto-adjoint, on se sert du fait que f est ortho-diagonalisable afin de pouvoir travailler dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f.
  On rédigera ce point comme suit :

  > - Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (pas forcément distinctes) de l'endomorphisme f.
  > - Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint, alors, par théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de f.
  >   Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

  Il faut retenir ces deux idées fondamentales dans les exercices sur les endomorphismes auto-adjoints.

`À RETENIR` (aspect calculatoire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E.
On introduit les notations $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (valeurs propres pas forcément distinctes de f) et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée constituée de vecteurs propres de f.

- Dans les exercices, il est classique d'avoir à calculer la quantité $\langle x, f(x)\rangle$ (où $x \in E$). Avec les notations précédentes et en notant $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{aligned}
\Big\langle x, f(x)\Big\rangle &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j \cdot e_j \Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j \cdot e_j \Big\rangle && \textit{(par linéarité à gauche de } \langle\cdot,\cdot\rangle\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j \Big\langle e_i, e_j \Big\rangle \right) && \textit{(par linéarité à droite de } \langle\cdot,\cdot\rangle\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j\, \delta_{i,j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \ (\ \lambda_i\, x_i\ ) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ (\ x_i\ )^2 \ \geqslant\ 0
\end{aligned}$$

On retiendra cette expression : $\boxed{\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ \left(x_i\right)^2}$

- On peut aussi effectuer ce calcul comme suit :

$$\begin{array}{rcll} \langle x, f(x)\rangle & = & \langle x, f(x)\rangle_{\mathscr{B}} & \textit{(car $\mathscr{B}$ est une BON)} \\ & = & (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x))^T \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(x)\big) & \\ & = & (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x))^T \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(x\big) & \\ & = & \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \textit{(par définition de $\mathscr{B}$,} \\ \textit{base de diagonalisation} \\ \textit{de l'endomorphisme f)} \end{array} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, \big(x_i\big)^2 & \end{array}$$

- Ce dernier calcul met en avant un calcul souvent réalisé lorsque l'exercice demande l'étude d'une matrice symétrique réelle S (plutôt qu'un endomorphisme auto-adjoint).
  Lorsque c'est le cas, il est classique d'effectuer le calcul $X^T S X$ (pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

  Comme S est une matrice symétrique réelle, S est ortho-diagonalisable. Autrement dit, il existe :

  × $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

  × $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

  telles que $S = PDP^T$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} X^T S X & = & X^T \left(PDP^T\right) X & \\ & = & \left(P^T X\right)^T D \; P^T X & \\ & = & \left(Y\right)^T D \; Y & \begin{array}{l} \textit{(en notant Y le vecteur} \\ \textit{tel que $X = PY$)} \end{array} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, \big(y_i\big)^2 & \begin{array}{l} \textit{(en notant $(y_1, \dots, y_n)$ les} \\ \textit{coefficients de Y)} \end{array} \end{array}$$