CH XIII : Endomorphismes d'un espace euclidiens

Rappels

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ si :
  - $\times$ E un espace vectoriel `RÉEL`.
  - $\times$ E est de dimension finie.
  - $\times$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

  (un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie)
- Un espace euclidien $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ est toujours muni d'une norme (dite euclidienne) issue du produit scalaire. Plus précisément :

$$\begin{array}{rccl} \| \cdot \| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

  En particulier : $\boxed{\forall x \in E, \ \| x \|^2 \ = \ \langle x, x \rangle}$
- Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. Pour ce faire, il suffit de choisir une base $\mathscr{B}$ de E et de munir E du produit scalaire :

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}} & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \end{array}$$

  On remarque au passage que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.
- Inversement, tout espace euclidien $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ admet une base orthonormée. Pour obtenir une telle base, il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à n'importe quelle base $\mathscr{B}$ de E. Rappelons de plus que si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale : $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.
- Les bases orthonormées sont des bases adaptées aux calculs. Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orhtonormale alors :

$$\forall x \in E, \ x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$$

- Rappelons enfin que si :
  - $\times$ $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ est un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).
  - $\times$ F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

  alors :

$$\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$$

  En particulier, dans un espace euclidien, F et $F^{\perp}$ sont toujours des espaces supplémentaires dans E.

I. Isométries vectorielles

I.1. Définitions

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que l'endomorphisme f est une **isométrie** de E (ou **un endomorphisme orthogonal de** E), s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E, \ \|f(x)\| = \|x\|$$

  Autrement dit, un endomorphisme de E est une isométrie vectoriel s'il conserve la norme.
- On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Remarque

- On peut s'intéresser à l'étymologie du terme isométrie. Il est formé :
  - × du préfixe **iso** (qui provient du grec ancien *isos*) qui signifie égal.

    Ce préfixe se retrouve dans les termes : isocèle (du grec ancien *isoskelês* - « aux jambes égales »), isomorphe (*isos* et *morphé* - « forme »), isobares (lignes de même pression atmosphérique), ...
  - × du suffixe **métrie** (qui provient du grec ancien *métron*) qui signifie mesure.

    Ce suffixe se retrouve notamment dans le terme goniomètre (du grec ancien *gônia* - « angle ») ou dans le terme trigonométrie (*trigonos* - « triangulaire »).
- On peut citer des premiers exemples d'isométries vectorielles :
  - × l'application id_E est évidemment une isométrie vectorielle.
  - × les projecteurs p qui ne coïncident pas avec id_E (c'est-à-dire les applications $p \in \mathscr{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$ et $\mathrm{Im}(p) \neq E$), ne sont `JAMAIS` des isométries vectorielles. Tout simplement car pour tout élément $x \in \mathrm{Ker}(p)$ tel que $x \in \mathrm{Ker}(p)$:

    $$\|p(x)\| = \|0_E\| \ = \ 0 \ \neq \ \|x\|$$
  - × les symétries s (applications $s \in \mathscr{L}(E)$ telles que $s \circ s = \mathrm{id}_E$) ne sont pas forcément des isométries vectorielles. Plus précisément, seules les symétries orthogonales sont des isométries.
- La discussion sur les projecteurs permet de mettre en avant une propriété important des isométries vectorielles : ce sont forcément des endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ injectifs. En effet, si ce n'est pas le cas (c'est-à-dire si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$) alors il existe $x \neq 0_E$ tel que $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi :

  $$\|f(x)\| = \|0_E\| \ = \ 0 \ \neq \ \|x\|$$

  L'espace vectoriel E étant de dimension finie, on en conclut que les isométries vectorielles sont des automorphismes.

I.2. Caractérisation des isométries vectorielles

Théorème 1.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

L'endomorphisme f est une iométrie vectorielle	$\Leftrightarrow$	*L'endomorphisme f conserve la norme*
	$\Leftrightarrow$	*L'endomorphisme f conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :* $\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle\, f(x), f(y)\,\rangle = \langle x, y\rangle$
	$\Leftrightarrow$	*L'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée*

Démonstration.

1) C'est la définition.

2) $(\Rightarrow)$ Supposons que f conserve la norme.
Rappelons les identités de polarisation :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle & = & \dfrac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big) \\ & = & \dfrac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) \end{array}}$$

Soit $(x,y) \in E \times E$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \langle\, f(x), f(y)\,\rangle & = & \dfrac{1}{2}\Big(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\Big) \\ & = & \dfrac{1}{2}\Big(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\Big) \\ & = & \dfrac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big) \ = \ \langle x, y\rangle \end{array}$$

($\Leftarrow$) Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors :

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &= \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|\end{aligned}$$

3) ($\Rightarrow$) Supposons que f conserve la norme (et donc le produit scalaire d'après le point précédent).
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée.
Démontrons que $\mathscr{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base orthonormée.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\langle\, f(e_i), f(e_j)\,\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est une base orthonormée)}$$

($\Leftarrow$) Supposons que l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Alors $\mathscr{B}_1 = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est aussi une base orthonormée de E.
Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Alors : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ et :

× $\|x\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_0$ est une BON.

× $\big\|f(x)\big\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_1$ est une BON. □

I.3. Structure de $\mathrm{O}(E)$

Théorème 2.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

1) $\boxed{\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)}$

2) *La loi $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}(E)$.*
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (f, g, h) \in \big(\mathrm{O}(E)\big)^2,\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathrm{id} \in \mathrm{O}(E), \forall f \in \mathrm{O}(E),\ f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$ *(existence d'un élément neutre)*

c. $\forall f \in \mathrm{O}(E), \exists g \in \mathrm{O}(E),\ f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ *(g inverse de f, noté $g = f^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}(E)$ un groupe.

L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est alors nommé groupe orthogonal de E

Remarque

- La notion de groupe n'est pas officiellement au programme de `PSI`. Le terme ne sera pas utilisé (sauf s'il venait à être rappelé) dans un écrit de concours.
- Le couple $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe car la loi $\circ$ vérifie les propriétés ***a.***, ***b.*** et ***c.*** citées ci-dessus.
- Un groupe est une structure algébrique au même sens qu'un espace vectoriel en est une. La démarche pour démontrer qu'un ensemble muni d'une loi est un groupe est similaire à celle pour permettant de démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Il y a essentiellement deux manière de procéder :
  × soit on vérifie tous les axiomes de défintion d'un groupe,
  × soit on démontre que l'ensemble considéré est un sous-groupe d'un groupe de référence. Pour démontrer que $(F, \top)$ est un sous-groupe de $(E, \top)$, on démontre que F est une partie non vide de E et que l'ensemble F est stable par la loi $\top$. Il faut alors comprendre que le sous-groupe F hérite des propriétés ***a.***, ***b.*** et ***c.*** qui sont vérifiées par le sur-goupe E.

Démonstration.

(i) $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$

(ii) $\mathrm{O}(E) \neq \varnothing$ car $\mathbb{1}_{\mathrm{GL}(E)} = \mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$

(iii) Démontrons que $\mathrm{O}(E)$ est stable par la loi $\circ$.
Soit $(f, g) \in \mathrm{O}(E)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|(f \circ g)(x)\| &= \|f\big(g(x)\big)\| \\ &= \|g(x)\| && \textit{(car } f \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \\ &= \|x\| && \textit{(car } g \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \end{aligned}$$

□

I.4. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par isométrie vectorielle

Théorème 3.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace euclidien.*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit F *un sous-espace de* E *stable par* f ($\forall u \in F,\ f(u) \in F$).

1) *L'endomorphisme* f *est une isométrie vectorielle* $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y\rangle = \big\langle x, f^{-1}(y)\big\rangle$

2) *Supposons :* $f \in \mathrm{O}(E)$. *Alors :*

L'espace F *est stable par* f $\Leftrightarrow$ *L'espace* $F^{\perp}$ *est stable par* f

Démonstration.

□

II. Matrices orthogonales

II.1. Définition

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- On dit que la matrice A est orthogonale si ${}^tA \times A = I_n$.
- On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales.

II.2. Caractérisation des matrices orthogonales

Théorème 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

La matrice A est orthogonale	$\Leftrightarrow$	${}^tA \times A = I_n$
	$\Leftrightarrow$	$A \times {}^tA = I_n$
	$\Leftrightarrow$	*A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$*
	$\Leftrightarrow$	*Les colonnes de A constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$*
	$\Leftrightarrow$	*Les lignes de A constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$*

Démonstration.

□

II.3. Lien entre matrices orthogonales et espaces euclidiens

II.3.a) Les matrices orthogonales sont des matrices de changement de base orthonormée

Théorème 5.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace euclidien.*

Soit $\mathscr{B}_0$ *une base orthonormée de* E.

Soit $\mathscr{B}$ *une base de* E.

$$\boxed{\text{La base } \mathscr{B} \text{ est orthonormée} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La matrice } P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \text{ est orthogonale}}$$

Démonstration. □

II.3.b) Les matrices orthogonales sont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des isométries vectorielles

Théorème 6.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace euclidien.*

Soit $\mathscr{B}$ *une* **base orthonormée** *de* E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\boxed{f \in \mathrm{O}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(E)}$$

Démonstration. □

II.4. Structure de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

II.5. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Théorème 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$

2) La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (A, B, C) \in \left(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathrm{id} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A\times \mathrm{id} = \mathrm{id}\times A = A$ *(existence d'un élément neutre)*

c. $\forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times B = B \times A = \mathrm{id}$ *(B inverse de A, noté $B = A^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ un groupe.

L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est alors nommé groupe orthogonal.

3) $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \in \mathrm{O}(n) \ \Rightarrow\ \left(\det(A)\right)^2 = 1}$

4) L'ensemble des matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 constitue aussi un groupe appelé groupe spécial orthogonal, noté $\mathrm{SO}(n)$ ou encore $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Remarque

- Rappelons que, par définition, pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et toute base $\mathscr{B}$ de E :

$$\det(f) \ = \ \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) \ = \ \pm 1$$

  La dernière égalité est obtenue par le théorème précédent et le fait que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
- De la même manière que pour $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on peut mentionner que l'ensemble des isométries vectorielle de déterminant 1 forme un sous-groupe de (E) appelé groupe spécial orthogonal et noté $\mathrm{SO}(E)$. L'étude de ce groupe n'est pas au programme. C'est une approche purement matricielle qui a été préférée.

III. Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3

III.1. Relation d'orientation

III.1.a) Défintion

Définition

Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E.

- On dit que $\mathscr{B}_1$ a **la même orientation** que $\mathscr{B}_2$ si $\det(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}) > 0$.
- Dans la suite, on note : $\mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2$ pour signifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ont même orientation.

III.1.b) Classes d'équivalence de la relation d'orientation

Théorème 8.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- *La relation binaire $\mathcal{R}$ est :*
  - × *réflexive,*
  - × *symétrique,*
  - × *transitive.*

  Une telle relation définit une relation d'équivalence.
- *Il n'existe que deux orientations possibles. Ces deux orientations permettent de définir deux ensembles distincts :*
  - × *l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 1 ».*
    Ces bases seront dites **directes**.
  - × *l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 2 ».*
    Ces bases seront dites **indirectes**.

  Ces deux ensembles définissent une partition de l'ensemble des bases de E.
- *L'espace E est alors dit* **orienté**.

Remarque

Nous avons déjà rencontré d'autres relations binaires qui sont des **relations d'équivalence** :

- × $\underset{x \to x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur les fonctions définies au voisinage du point x_0.
- × $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur les propriétés mathématiques.
- × la relation de similitude (celle qui relie deux matrices semblables) est une relation d'équivalence sur les matrices.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
  - × La relation est réflexive : $\forall \mathscr{B}, \mathscr{B} \mathcal{R} \mathscr{B}$.
    Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n$ et ainsi :
    $$\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}) = 1 > 0$$
  - × La relation est symétrique : $\forall \mathscr{B}_1, \forall \mathscr{B}_2,\ \mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2 \ \Rightarrow\ \mathscr{B}_2 \mathcal{R} \mathscr{B}_1$.
    Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E.
    Supposons $\mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2$. Ainsi : $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) > 0$.
    Or $P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} = \left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)^{-1}$ et donc :
    $$\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}\right) = \det\left(\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)} > 0$$
  - × La relation est transitive : $\forall(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}3),\quad \left.\begin{array}{l} \mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2 \\ \mathscr{B}_2 \mathcal{R} \mathscr{B}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_3$.
    Soient $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ des bases de E.
    Supposons $\mathscr{B}_1 \mathcal{R} \mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_2 \mathcal{R} \mathscr{B}_3$.
    Ainsi : $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) > 0$ et $\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}\right) > 0$. Or :
    $$P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3} \ = \ P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\ P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}$$

- Soient $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.
  Notons $\mathscr{B}_1 = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors :

$$\det\left(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}\right) = \det\left(\mathrm{Diag}(-1, 1 \dots, 1)\right) = -1 < 0$$

  Ainsi, $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}_1$ ne sont pas dans la même classe d'équivalence. Démontrons alors que toute autre base $\mathscr{B}$ est soit dans la classe d'équivalence de $\mathscr{B}_0$ (c'est-à-dire $\mathscr{B}\ \mathcal{R}\ \mathscr{B}_0$) ou dans celle de $\mathscr{B}_1$ (c'est-à-dire $\mathscr{B}\ \mathcal{R}\ \mathscr{B}_1$). En effet :

$$\begin{aligned}\det\left(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}}\right) &= \det\left(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1} \times P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}\right) \\ &= -\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}\right)\end{aligned}$$

□

Remarque

- Orienter un espace, c'est choisir laquelle des deux orientations sera considérée comme directe (l'autre sera alors considérée comme indirecte).
- Dans $E = \mathbb{R}^n$, on choisit arbitrairement de fixer comme orientation directe (« orientation 1 ») l'orientation de la base canonique. On peut agir de même pour tous les espaces vectoriels de référence. Les bases directes sont alors celles qui ont la même orientation que les bases canoniques.
- Orienter une droite D c'est choisir un vecteur directeur v et fixer que la base (v) de D sera directe. Dans ce cas, toute autre base de D, c'est à dire toute famille $(\lambda\, v)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sera considérée comme :
  × directe si $\lambda > 0$,
  × indirecte si $\lambda < 0$.
- Dans un espace vectoriel orienté de dimension 3, orienter un plan P consiste à choisir un vecteur n **non inclus** dans P, puis à appeler :
  × bases directes de P les bases (u, v) de P telles que (u, v, n) soit une base directe de E.
  × bases indirectes de P les bases (u, v) de P telles que (u, v, n) soit une base directe de E.

III.2. Produit mixte et produit vectoriel en dimension 2 et 3

III.2.a) Rappel sur la notion de déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- On appelle forme n-linéaire sur E toute application $f : E^n \to \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses n variables.
- L'ensemble des formes n-linéaires (sur E) alternées (ou de manière équivalente antisymétriques) est un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc une forme linéaire non nulle f qui engendre cet ensemble (pour toute autre forme n-linéaire alternée g, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g = \lambda\ f$).
- On appelle alors déterminant dans la base $\mathscr{B}_0$ l'unique forme n-linéaire alternée g sur E telle que : $g(e_1, \dots, e_n) = 1$. On note alors $g = \det_{\mathscr{B}_0}$.
- Deux formes n-linéaires alternées sont toujours colinéaires. Ainsi, si $\mathscr{B}_1$ est une base de E, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\det{}_{\mathscr{B}_0} = \mu \cdot \det{}_{\mathscr{B}_1}$$

  et : $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) = \mu \times \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) = \mu$.
- Rappelons enfin que, si $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ alors :

$$\det{}_{\mathscr{B}_0}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1),1} \times \dots \times a_{\sigma(n),n} = \det(A)$$

  où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\ e_i$ et :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1)\ \dots\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\right)$$

- En particulier, si $\mathscr{B}_1 = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, alors, d'après ce qui précède, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\boxed{\begin{aligned} & \det{}_{\mathscr{B}_0}\left((u_1, \dots, u_n)\right) \\ = \ & \det{}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \times \det{}_{\mathscr{B}_1}\left(u_1, \dots, u_n\right) \\ = \ & \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1)\ \dots\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\right) \times \det{}_{\mathscr{B}_1}\left(u_1, \dots, u_n\right) \\ = \ & \det\left(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}\right) \times \det{}_{\mathscr{B}_1}\left(u_1, \dots, u_n\right) \end{aligned}}$$

III.2.b) Produit mixte

Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On considère que l'espace E est orienté.
(le choix de l'orientation directe a été fait)

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- Le calcul du déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans une base orthonormée directe est indépendant de la base orthonormée directe choisie. En effet, si $\mathscr{B}_1$ est une base orthonormée directe :

$$\begin{aligned} \det{}_{\mathscr{B}_0}\big(\,(u_1, \dots, u_n)\,\big) &= \det\big(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}\big) \times \det{}_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ &= \det{}_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \end{aligned}$$

- On appelle **produit mixte** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ et on note $[u_1, \dots, u_n]$, le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}_0$.

$$\begin{aligned} [u_1, \dots, u_n] &= \det{}_{\mathscr{B}_0}\big(\,(u_1, \dots, u_n)\,\big) \\ &= \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1)\ \dots\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\Big) \end{aligned}$$

Remarque

1. Le produit mixte d'une base orthonormale directe vaut 1.

2. Dans le cas $n = 2$, le produit mixte $[u, v]$ est l'aire algébrique du triangle porté par u et v.

3. Dans le cas $n = 3$, le produit mixte $[u, v, w]$ est le volume algébrique du parallélépipède porté par u, v et w.

Considérations géométriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$
Soit $(u, v) \in E \times E$

$$\boxed{[u, v] \;=\; \text{aire } \textbf{algébrique} \text{ du parallélogramme formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

Pour faire la démonstration :

× on suppose (u, v) libre (le cas (u, v) lié donne $[u, v] = 0$).

× on remarque que $(u, v) \mapsto [u, v] = \det{}_{\mathscr{B}_0}(u, v)$ est bilinéaire. En conséquence :

$$\begin{aligned} [u, v] &= [u, v + \alpha \cdot u] && \textit{(pour n'importe quel } \alpha \textit{ puisqu'on a affaire à une forme bilinéaire alter} \\ &= [u, p_\perp(v)] \\ &= [u, w] && \textit{(en notant } w = p_\perp(v)\textit{)} \\ &= [\|u\|\ \frac{u}{\|u\|}, \|w\|\ \frac{w}{\|w\|}] \\ &= \|u\|\ \|w\|\ \left[\frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|}\right] \\ &= \|u\|\ \|w\|\ \det{}_{\mathscr{B}_0}\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|}\right) \\ &= \|u\|\ \|w\|\ \det{}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1)\ \det{}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) && \textit{(en notant } \mathscr{B}_1 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|}\right)\textit{)} \\ &= \pm\|u\|\ \|w\| \end{aligned}$$

En particulier :

$$\boxed{\frac{1}{2}\,|\,[u, v]\,| \;=\; \text{aire du triangle formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

III.2.c) Produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension 3

Démonstration.

□

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.
Soit $(u, v) \in E^2$.

- Il existe un unique vecteur $w \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \ [u, v, x] \ = \ \langle w, x \rangle$$

Ce vecteur est noté $u \wedge v$ et s'appelle le produit le **produit vectoriel** de u et v.

Théorème 9. *(propriétés du produit vectoriel)*
Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** *où E est de dimension 3.*

1. $\boxed{\forall (u, v, x) \in E^3, \ [u, v, x] \ = \ \langle u \wedge v, x \rangle}$

2. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ u \wedge v \ = \ -v \wedge u}$

3. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ u \wedge v \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ \text{Les vecteus } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}}$

4. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ \text{Le vecteur } u \wedge v \text{ est orthogonal à } u \text{ et à } v}$

En particulier, si la famille (u, v) est libre : $\big(\mathrm{Vect}\,(u, v)\,\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(u \wedge w)$.

5. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ \text{La famille } (u, v) \text{ est libre} \ \Rightarrow \ \text{La famille } (u, v, u \wedge v) \text{ est une base directe de } E}$

6. *Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E. Soit $(u, v) \in E^2$.*
On note :

× (u_1, u_2, u_3) *les coordonnées de u dans $\mathscr{B}_0$.*

× (v_1, v_2, v_3) *les coordonnées de v dans $\mathscr{B}_0$.*

$u \wedge v$ est de coordonnées $\Big(u_2\, v_3 - u_3\, v_2, -\big(u_1\, v_3 - u_3\, v_1\big), u_1\, v_2 - u_2\, v_1\Big)$

Considérations géométriques
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$
  Soit $(u, v) \in E \times E$.
  - Dans le cas où u et v sont orthogonaux non nuls, on peut considérer une BON directe $\mathscr{B}_0 = \left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}, z \right)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u \wedge v) \quad = \quad \begin{pmatrix} \|u\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \|v\| \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|u\| \ \|v\| \end{pmatrix}$$

  c'est-à-dire : $u \wedge v = \|u\| \ \|v\| \cdot z$ et ainsi :

$$\|u \wedge v\| = \|u\| \ \|v\|$$

  - Dans le cas où u et v ne sont pas orthogonaux, on note $p_\perp$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,(u)$.

$$v = p_\perp(v) + v_2 \quad \text{où} \quad v_2 = v - p_\perp(v)$$

  On a alors :
  × $\|u \wedge v\| \ = \ \|u \wedge (p_\perp(v) + v_2)\| \ = \ \|\cancel{u \wedge p_\perp(v)} + u \wedge v_2\| \ = \ \|u\| \ \|v_2\|$
  × $p_\perp(v) = \left\langle v, \dfrac{u}{\|u\|} \right\rangle \cdot \dfrac{u}{\|u\|} = (\cos(\theta) \|v\|) \ \dfrac{u}{\|u\|}$
  × $\|v\|^2 = \|p_\perp(v)\|^2 + \|v_2\|^2 = (\cos(\theta) \|v\|)^2 + \|v_2\|^2$
  et donc : $\|v_2\|^2 = (1 - (\cos(\theta))^2) \ \|v\|^2 = (\sin(\theta))^2 \ \|v\|^2$.

  Finalement :

$$\|u \wedge v\| \ = \ \|u\| \ \|v_2\| \ = \ \|u\| \ \|v\| \ \sin(\theta)$$

- Dans le cas $n = 3$
  Soit $(x, y, z) \in E \times E$

$$\boxed{[x, y, z] \ = \ \text{aire **algébrique** du parallélépipède formé par les vecteurs } x,\ y \text{ et } z}$$

En effet :

$$\begin{aligned} |\,[x, y, z]\,| \ &= \ |\ \langle x \wedge y, z \rangle\ | \\ &= \ |\ \langle x \wedge y, z_1 \rangle\ | \\ &= \ \|x \wedge y\| \ \|z_1\| \\ &= \ \|x\| \ \|y\| \ \sin(\theta) \ \|z_1\| \end{aligned}$$

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

IV.1. Classification des matrices orthogonales en dimension 2

Théorème 10.

1. *Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*

$$\boxed{A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \ \Leftrightarrow\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \text{ou}\ A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note alors :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\det(R(\theta)) = 1}$ *et* $\boxed{\det(S(\theta)) = -1}$

3. ***a)*** $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta) = R(-\theta)}$

b) $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{S(\theta)^{-1} = {}^tS(\theta) = S(\theta)}$

4. ***a)*** $\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')}$

(en particulier les matrices $R(\theta)$ et $R(\theta')$ commutent)

b) $\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta) \times S(\theta') = R(\theta - \theta')}$

$\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta) \times S(\theta') = S(\theta + \theta')}$

$\forall\, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta') \times R(\theta) = S(\theta' - \theta)}$

5. *L'ensemble $\{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales directes. On rappelle qu'il est noté $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$.*
Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont des **rotations vectorielles** *(parmi elles I_2 et $-I_2$).*

6. *L'ensemble $\{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales indirectes. Il est parfois noté $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$.*
Les éléments de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont des **symétries orthogonales** *par rapport à une droite vectorielle.*

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \ &\Leftrightarrow\ M^T M = I_2 \\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} \exists \theta \in \mathbb{R},\ a = \cos\theta,\ c = \sin\theta \\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ b = \cos\alpha,\ d = \sin\alpha \\ \cos(\theta - \alpha) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} \exists \theta \in \mathbb{R},\ a = \cos\theta,\ c = \sin\theta \\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ b = \cos\alpha,\ d = \sin\alpha \\ \cos(\theta)\ \cos(\alpha) + \sin(\theta)\ \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} \exists \theta \in \mathbb{R},\ a = \cos\theta,\ c = \sin\theta \\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ b = \cos\alpha,\ d = \sin\alpha \\ \alpha \equiv \theta \pm \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \text{ou}\ A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\det\big(R(\theta)\big) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 \\
\det\big(S(\theta)\big) &= -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = -1
\end{aligned}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) $R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)^T$

b) Évident.

4. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& R(\theta) \times R(\theta') \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta)\ \cos(\theta') - \sin(\theta)\ \sin(\theta') & -\big(\cos(\theta)\ \sin(\theta') + \sin(\theta)\ \cos(\theta')\big) \\ \sin(\theta)\ \cos(\theta') + \cos(\theta)\ \sin(\theta') & \cos(\theta)\ \cos(\theta') - \sin(\theta)\ \sin(\theta') \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\
= \ & R(\theta+\theta')
\end{aligned}$$

b) toujours utilisation des formules d'addition

□

Remarque

- L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array} \right.$ est donc un morphisme de groupes.
- L'ensemble $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif.
- L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & \big(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times\big) \\ \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array} \right.$ est un morphisme surjectif de noyau $2\pi\,\mathbb{Z}$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On peut déterminer la droite vectorielle laissée invariante par $S(\theta)$. Pour cela, on déterminer $\mathrm{Ker}\,\big(S(\theta) - I_2\big)$.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
& X \in \mathrm{Ker}\,\big(S(\theta) - I_2\big) \\
\Leftrightarrow \ & \big(S(\theta) - I_2\big)\, X = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\
\Leftrightarrow \ & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \big(\cos\theta - 1\big)\, x & + & \sin\theta\, y & = & 0 \\ \sin\theta\, x & - & \big(\cos\theta + 1\big)\, y & = & 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \ & \left\{ \begin{array}{rcl} 2\ \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \left(-\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\ x \ + \ \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\ y\right) & = & 0 \\ -2\ \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \left(-\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\ x \ + \ \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\ y\right) & = & 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \ & \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\ x - \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\ y = 0
\end{aligned}$$

  Les vecteurs invariants par $S(\theta)$ sont ceux de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(u)$ où $u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

IV.2. Conséquence : classification des isométries vectorielles en dimension 2

Théorème 11.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace euclidien* **orienté** *où* E *est de dimension* 2.
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Deux cas se présentent.

1. *Si* $\det(f) = -1$

- *Dans ce cas, il existe une base orthonormée* $\mathscr{B}$ *de* E *telle que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = S(0) = \mathrm{Diag}(1, -1)$$

- *L'application* f *est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. On dit que* f *est une* **réflexion**.

2. *Si* $\det(f) = 1$

- *Dans ce cas, dans toute base orthonormale* **directe** $\mathscr{B}$ *de* E *:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = R(\theta)$$

  où le réel θ*, unique modulo* 2π*, ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.*

- *L'application* f *est une* **rotation vectorielle**.
- *Le réel* θ *est appelé* **mesure de l'angle** *de la rotation* f.

Démonstration.
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. La matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathscr{B}$ est orthogonale par Théorème 6, donc de type $S(\theta)$ ou $R(\theta)$ d'après le Théorème 11.

1. Si $M = S(\theta)$, alors $M^2 = S(\theta)^2 = I_2$, donc f est une symétrie.
On cherche maintenant une base $\mathscr{B}'$ de E telle que :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\, M\, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} \;=\; \mathrm{Diag}(1, -1) \;=\; S(0)$$

Pour cela on cherche $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ sous la forme $R(\alpha)$.
D'après le Théorème 11 :

$$R(\alpha)\, S(\theta)\, R(\alpha)^{-1} \;=\; S(\alpha + \theta)\, R(-\alpha) \;=\; S\big(\alpha + \theta - (-\alpha)\big) \;=\; S(\theta + 2\alpha)$$

On choisit donc $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$.

2. Si $M = R(\theta)$, alors f est une rotation.
De plus si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormales directes de E, alors la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est orthogonale et de déterminant 1. Elle est donc de type $P = R(\theta')$ d'après le théorème 11. Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \;=\; P^{-1} M P \;=\; R(-\theta')\, R(\theta)\, R(\theta') \;=\; R(-\theta' + \theta + \theta') \;=\; R(\theta)$$

de sorte que le réel θ ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. $\square$

Remarque
Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. L'inverse de la rotation d'angle θ est la rotation d'angle $-\theta$, et la composée des rotations d'angle θ et θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

2. La rotation d'angle 0 est id_E, de matrice $R(0) = I_2$, et la rotation d'angle π est $-\mathrm{id}_E$, de matrice $R(\pi) = -I_2$. Ce sont les deux seules (matrices de) rotations diagonalisables (sur $\mathbb{R}$), et les autres n'ont pas de valeur propre réelle.

3. *Écriture complexe d'une rotation.* Si l'on identifie E à $\mathbb{C}$ (en identifiant les coordonnées (x, y) dans une base orthonormale directe fixée de E au complexe $z = x+iy$), alors la rotation d'angle θ est l'application $z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$.

4. Soient $(u, v) \in \big(E \setminus \{0_E\}\big)^2$, où E est un espace euclidien orienté de dimension 2.
Alors il existe une unique rotation vectorielle r telle que :

$$r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$$

On définit la mesure de l'angle (u, v) comme la mesure de l'angle de cette rotation r. Cette mesure dépend du choix que l'on a fait pour l'orientation du plan E et est notée $\mathrm{mes}(u, v)$.

5. Par isomorphisme de représentation, on déduit du Théorème 10 ***4.b)*** qu'une rotation peut s'écrire comme composée de deux réflexions (la première pouvant être choisie arbitrairement).

Plus précisément :

× soit s_1 la réflexion par rapport à $D_1 = \mathrm{Vect}\,(u_1)$,

× soit s_2 la réflexion par rapport à $D_2 = \mathrm{Vect}\,(u_2)$,

alors $s_2 \circ s_1$ est la rotation d'angle $2\,\mathrm{mes}(u_1, u_2)$.
On peut en conclure que $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions (dans le cas où E est de dimension 2).

V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

V.1. Description des matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

Remarque
Soit $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
On remarque que l'ensemble $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par A (il contient les points fixes de A).
On remarque que, si $\dim(F) = 3$, alors : $A = I_3$.
Il est alors naturel de vouloir caractériser A lorsque $\dim(F) < 3$.

Théorème 12.
Soit $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.
On note : $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.
Quatre cas se présentent :

1. *Si $\dim(F) = 3$, alors : $A = I_3$.*
2. *Si $\dim(F) = 2$ (hors programme) :*
   - *Dans ce cas, la matrice A est semblable à la matrice :*
   $$\mathrm{Diag}(1, 1, -1)$$
   - *La matrice A est une matrice de symétrie orthogonale par rapport à un plan. On dit que A est une* **réflexion***.*
3. *Si $\dim(F) = 1$:*
   - *Dans ce cas, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ et A est semblable à la matrice :*
   $$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
   - *La matrice A est une* **matrice de rotation***.*
4. *Si $\dim(F) = 0$ (hors programme) :*
   - *Dans ce cas, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ et la matrice A est semblable à la matrice :*
   $$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
   - *La matrice A s'appelle une* **matrice de rotation réflexion***.*
   - *La matrice A peut s'écrire comme le produit d'une matrice de rotation $R \neq I_3$ et d'une matrice de réflexion S telles que R et S commutent.*

Démonstration.

1. Évident
3. Supposons : $\dim(F) = 1$.
   On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   - L'espace vectoriel $F^\perp$ est un plan stable par f. On peut donc définir l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur ce plan.
   - L'endomorphisme $\tilde{f}$ est :
     × toujours une isométrie,
     × n'admet pas de point fixe autre que le vecteur nul.
     En effet : $F \cap F^\perp = \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

   D'après la classification des isométries vectorielles en dimension 2, on en déduit que $\tilde{f}$ est une rotation vectorielle. On note θ une mesure de l'angle de cette rotation. Ainsi, en notant $\tilde{\mathscr{B}} = (e_2, e_3)$ une base **orthonormée directe** de $F^\perp$:
   $$\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\tilde{f}) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
   - On note (e_1) une base de F et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Alors $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Enfin, comme $\dim(F) < 3$, alors : $A \neq I_3$). On en conclut : $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$.

□

Théorème 13.

Soit $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* A *est semblable à :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Conséquence du théorème précédent car :

× dans le cas $\dim(F) \in \{1, 3\}$: $\det(A) = 1$

× dans le cas $\dim(F) \in \{0, 2\}$: $\det(A) = -1$.

□

Contrairement à $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.
Par exemple, les matrices suivantes sont des matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (à démontrer rapidement) et ne commutent pas :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque
Pour toute matrice A de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, on peut démontrer : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, \mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}\}$.

V.2. Rotations vectorielles en dimension 3

V.2.a) Définition

Théorème 14.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ *un espace euclidien orienté où* E *est de dimension* 3.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Supposons : $\det(f) = 1$.

1) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ *et une base orthonormée directe* $\mathscr{B} = (u, v, w)$ *de* E *telle que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2) L'application f *est alors appelée une* **rotation vectorielle**.

3) Le réel θ *est une* **mesure** *de l'angle de la rotation* f.

4) Si de plus $f \neq \mathrm{id}_E$, *alors :*

× *l'espace vectoriel* $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\,(u)$ *est appelé* **axe** *de la rotation* f.

× *la restriction de* f *au plan* $\mathrm{Vect}\,(u)^\perp$ *orienté par* u *est la rotation d'angle* θ.

Exercice 1

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démontrer que f est une rotation et en déterminer les caractéristiques (angle et axe).

Remarque

1. Changer le vecteur unitaire u en $-u$ change l'angle θ en $-\theta$. En particulier, le signe de l'angle d'une rotation en dimension 3 dépend du choix du vecteur dirigeant l'axe de rotation.

2. La seule rotation d'angle 0 est id_E, de matrice $\mathrm{Diag}(1, R(0)) = I_3$ dans toute base.

3. La rotation d'angle $\pm\pi$ autour d'une droite D est la symétrie orthogonale par rapport à D. On parle alors de **demi-tour** d'axe D.

4. L'isométrie $-\mathrm{id}_E$ n'est pas une rotation.

V.2.b) Détermination pratique de l'angle de rotation d'une rotation vectorielle

Théorème 15.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espace euclidient orienté de dimension* 3.

Soit $\mathscr{B}$ *une base orthonormée directe de* E.

Soit f *une rotation de* E *distincte de* id_E *d'angle* θ *et d'axe* $\mathrm{Vect}\,(u)$, *où :* $\|u\| = 1$.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1. $\boxed{\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M) = 1 + 2\,\cos(\theta)}$

Cette égalité permet de déterminer l'angle θ *au signe près.*

2. *Pour tout* $x \in E$ *non colinéaire à* u, *le déterminant* $\det_{\mathscr{B}}\big(u, x, f(x)\big)$ *est du signe strict de* $\sin(\theta)$, *donc de* θ *si* $\theta \in \,]-\pi, \pi]$.

Démonstration.

- On commence par compléter la famille (u) en une base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ orthonormale directe de E.
- D'après la description des rotations vectorielles, on en déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$B \;=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(notons que, comme $f \neq \mathrm{id}_E$, alors : $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$)

- On obtient alors directement :

$$\mathrm{tr}(f) \;=\; \mathrm{tr}(B) \;=\; 1 + 2\,\cos\theta$$

- Soit $x \in E$ un vecteur non colinéaire à u.
On note M la matrice des coordonnées des vecteurs de la famille $\big(u, x, f(x)\big)$ dans la base $\mathscr{B}$, et M' la matrice des coordonnées des vecteurs de la famille $\big(u, x, f(x)\big)$ dans la base $\mathscr{B}'$. En notant $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, on a en particulier la relation :

$$M \;=\; P\,M'$$

La matrice P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales directes. On en déduit que :
  - × $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ (car les deux bases sont orthonormales)
  - × $\det(P) > 0$ (car les deux bases sont directes et ont donc la même orientation)

On obtient alors : $\det(P) = 1$. D'où :

$$\det{}_{\mathscr{B}}\big(u, x, f(x)\big) \;=\; \det(P) \times \det{}_{\mathscr{B}'}\big(u, x, f(x)\big) \;=\; \det{}_{\mathscr{B}'}\big(u, x, f(x)\big)$$

- Notons : $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f(x)\big) \;=\; B\,X \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b\,\cos\theta - c\,\sin\theta \\ b\,\sin\theta + c\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\det{}_{\mathscr{B}'}\big(u, x, f(x)\big) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b\,\cos\theta - c\,\sin\theta \\ 0 & c & b\,\sin\theta + c\,\cos\theta \end{vmatrix} \;=\; (b^2 + c^2)\,\sin\theta$$

- Enfin, comme x n'est pas colinéaire à u alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Donc : $b^2 + c^2 > 0$. On en déduit que $\det_{\mathscr{B}}\big(u, x, f(x)\big) = \det_{\mathscr{B}'}\big(u, x, f(x)\big)$ est du signe de $\sin\theta$. □

Exercice 2

Expliciter l'endomorphisme f canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

VI. Endomorphismes auto-adjoints

VI.1. Notion d'endomorphisme auto-adjoint

VI.1.a) Définition

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que f est **auto-adjoint** (ou **symétrique**) si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \langle f(x), y \rangle \ = \ \langle x, f(y) \rangle$$

- On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.

Exemple
Considérons $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

- Toutes les homothéties sont des endomorphismes auto-adjoints.
- Les projections et symétries de E ne sont pas forcément auto-adjointes. Plus précisément : les projections (respectivement symétries) auto-adjointes sont les projections (respectivement symétries) orthogonales.
- Les puissances d'un endomorphisme auto-adjoint sont auto-adjointes.
- La composée de deux endomorphismes auto-adjoints est auto-adjointe si et seulement s'ils commutent.

VI.1.b) Structure de l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints

Théorème 16.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

- *L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.*

VI.1.c) Lien entre endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Théorème 17.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. $\boxed{f \text{ est auto-adjoint} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est symétrique}}$

2. a) *L'application Φ suivante :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. Elle induit de plus un ismorphisme de $\mathscr{S}(E)$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n.

b) $\boxed{\dim\big(\mathscr{S}(E)\big) = \dfrac{n\,(n+1)}{2}}$

Démonstration.
On note : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\begin{aligned} f \text{ auto-adjoint} \ &\Leftrightarrow \ \forall (x, y) \in E^2, \ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \\ &\Leftrightarrow \ \forall (X, Y) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2, \ X^T\, A^T\, Y = X^T\, A\, Y \\ &\Leftrightarrow \ A^T = A \end{aligned}$$

(pour la dernière implication, considérer le cas de X et Y éléments de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) □

Remarque

1. Pour toute matrice symétrique $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S est auto-adjoint (relativement au produit scalaire canonique).

2. On retrouve que les homothéties et les projections/symétries orthogonales sont des endomorphismes auto-adjoints.

VI.2. Théorème spectral

VI.2.a) Éléments propres d'un endomorphisme auto-adjoint

Théorème 18.
Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint de E.

1. *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.*
2. *Les valeurs propres (complexes) de f sont toutes réelles.*
3. *Les sous-espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux.*

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

1. *Si F est une sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par l'endomorphisme canoniquement associé à S, alors $F^\perp$ (pour le produit scalaire canonique) est stable par cet endomorphisme.*
2. *Les valeurs propres (complexes) de S sont toutes réelles.*
3. *Les sous-espaces propres réels de S sont 2 à 2 orthogonaux (pour le produit scalaire canonique).*

Démonstration.

1. Supposons que F est stable par f.
Soient $y \in F^\perp$ et $x \in F$. Alors $f(x) \in F$ et, comme f est un endomorphisme auto-adjoint :
$$\langle x, f(y)\rangle \ = \ \langle f(x), y\rangle \ = \ 0$$
D'où : $f(y) \in F^\perp$.
2. L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre complexe λ.
On note S la matrice représentative de f dans une base $\mathscr{B}$ de E et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ. Alors :
   × d'une part :
$$\overline{X}^T S\, X \ = \ \lambda\, \overline{X}^T X$$
   × d'autre part, comme f est auto-adjoint, alors S est symétrique. Comme S est de plus réelle :
$$\overline{X}^T S\, X \ = \ (S\overline{X})^T X \ = \ (\overline{\lambda\, X})^T X \ = \ \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X$$
On en déduit : $\lambda\, \overline{X}^T X = \overline{\lambda}\, \overline{X}^T X$.
Or, comme $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ (car X est un vecteur propre), alors : $\overline{X}^T X \neq 0$.
D'où : $\overline{\lambda} = \lambda$, *i.e.* $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f.
Soient $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et $y \in \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$. Alors :
$$\lambda\, \langle x, y\rangle \ = \ \langle f(x), y\rangle \ = \ \langle x, f(y)\rangle \ = \ \mu\, \langle x, y\rangle$$
Donc : $\langle x|y\rangle = 0$ (car $\lambda \neq \mu$). Les sous-espaces propres de f sont donc orthogonaux.

□

VI.2.b) Théorème spectral

Théorème 19.
Énoncé dans le cas des endomorphismes

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

Alors, f est diagonalisable dans une base orthonormée.

Énoncé dans le cas matriciel

Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe :

× *une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,*

× *une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,*

telles que : $M = P\, D\, P^T$.

Démonstration.
On procède par récurrence sur la dimension n de l'espace euclidien en jeu.
On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: si $\dim(E) = n$, alors tout $f \in \mathcal{S}(E)$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

- **Initialisation** : évident.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* si $\dim(E) = n+1$, alors tout $f \in \mathscr{S}(E)$ est diagonalisable en base orthonormée).
  Supposons : $\dim(E) = n+1$.
  Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.
  - Comme f est auto-adjoint, alors il admet une valeur propre réelle λ. Soit a un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
  - On sait que :
    - l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(a)$ est stable par f,
    - l'endomorphisme f est auto-adjoint.

    On en déduit que $\mathrm{Vect}\,(a)^\perp$ est stable par f. On peut ainsi définir $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Vect}\,(a)^\perp$.
  - L'endomorphisme $\tilde{f}$ est symétrique pour le produit scalaire induit sur $\mathrm{Vect}\,(a)^\perp$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathrm{Vect}\,(a)^\perp$ constituée de vecteurs propres de $\tilde{f}$.
  - La famille $(e_1, \dots, e_n, \frac{a}{\|a\|})$ est alors une base orthonormale de E, et est constituée de vecteurs propres de f.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

□

Exemple
Diagonaliser la matrice $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Remarque
Beaucoup de notions (et donc d'exercices) sur les endomorphismes et matrices symétriques utilisent les produits scalaires suivants, pour $f \in \mathscr{S}(E)$ et $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\langle x, f(x) \rangle \text{ pour } x \in E \quad \text{ou} \quad X^T\, S\, X \text{ pour } X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Il est souvent utile de considérer leur expression dans une base orthonormale de diagonalisation $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de f (resp. de S), à savoir, en notant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, λ_k la valeur propre associée à e_k, et $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées de x (resp. de X) dans $\mathscr{B}$:

$$\langle x, f(x) \rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k^2 \;=\; X^T\, S\, X$$

Démonstration.
On peut écrire : $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$. Ainsi, par linéarité de f :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k \cdot e_k$$

D'où, par expression du produit scalaire en base orthonormale :

$$\langle x, f(x) \rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k^2$$

De même en remplaçant f et x par S et X. □

VI.3. Endomorphisme auto-adjoint positif et défini positif

VI.3.a) Définition

Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

- On dit que f est :
  - × **positif** si :
$$\forall x \in E, \quad \langle x, f(x)\rangle \geqslant 0$$
  - × **défini positif** si :
$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in E, \quad \langle x, f(x)\rangle \geqslant 0 \\ \forall x \in E, \quad \langle x, f(x)\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{array}\right.$$
- On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs.
- On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs.

VI.3.b) Caractérisation du caractère (défini) positif par signe des valeurs propres

Théorème 20.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

1. $\boxed{\textit{L'endomorphisme } f \textit{ est positif} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\textit{L'endomorphisme } f \textit{ est défini positif} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, l'endomorphisme f auto-adjoint est défini-positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration.

1. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que l'endomorphisme f est positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On note x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- Comme f est auto-adjoint positif :
$$\langle x, f(x)\rangle \geqslant 0$$
- De plus : $\langle x, f(x)\rangle = \lambda\, \langle x, x\rangle = \lambda\, \|x\|^2$.

On en déduit : $\lambda\, \|x\|^2 \geqslant 0$. Or, comme $x \neq 0_E$ (c'est un vecteur propre de f), alors : $\|x\| \neq 0$. On obtient alors : $\|x\|^2 > 0$. D'où :
$$\lambda \geqslant 0$$

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

- L'endomorphisme f est auto-adjoint. Il est donc diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i.
Comme $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
- Soit $x \in E$. Alors il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.
Alors :
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \cdot e_i$$
On en déduit :
$$\langle x, f(x)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i^2 \geqslant 0$$
Donc l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.

2. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que f est défini positif.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On note x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

- En particulier, f est positif. D'après le point précédent, on a déjà : $\lambda \geqslant 0$.
- Comme f est défini positif :

$$x \neq 0_E \quad \Rightarrow \quad \langle x, f(x) \rangle \neq 0$$

Or on a bien : $x \neq 0_E$ car x est un vecteur propre de f. Ainsi :

$$0 \;\neq\; \langle x, f(x) \rangle \;=\; \lambda \, \|x\|^2$$

On en déduit : $\lambda \neq 0$.

Finalement : $\lambda > 0$.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$. D'après ***1.***, on sait déjà que l'endomorphisme auto-adjoint f est positif.
- Soit $x \in E$.
Supposons : $\langle x, f(x) \rangle = 0$.
  - × L'endomorphisme f est auto-adjoint. Il est donc diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i.
Comme $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$.
  - × Comme $x \in E$, alors il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$. Alors :

$$\langle x, f(x) \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i^2$$

  - × Or : $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Donc : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i^2 = 0$.
Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \, x_i^2 \geqslant 0$, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \, x_i^2 = 0$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On sait par ailleurs : $\lambda_i > 0$. Ainsi : $x_i^2 = 0$.
D'où : $x_i = 0$.
Finalement : $x = 0_E$.

L'endomorphisme auto-adjoint f est donc défini positif.

$\square$

VI.4. Matrice symétrique positive et définie positive

VI.4.a) Définition

Définition

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est :
  - × **positive** si :
  $$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X \geqslant 0$$
  - × **définie positive** si :
  $$\begin{cases} \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), & X^T A X \geqslant 0 \\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), & X^T A X = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{cases}$$
- On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
- On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Exemple

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T A$ et $A A^T$ sont symétriques positives.
- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T A$ et $A A^T$ sont symétriques définies positives.

VI.4.b) Lien entre matrices symétriques (définies) positives et endomorphismes auto-adjoints

Théorème 21.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien de dimension finie.
On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On note : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

L'endomorphisme f est auto-adjoint positif	$\Leftrightarrow$	La matrice A est symétrique positive

L'endomorphisme f est auto-adjoint défini positif	$\Leftrightarrow$	La matrice A est symétrique définie positive

VI.4.c) Caractérisation du caractère (défini) positif par signe des valeurs propres

Théorème 22.

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est positive } \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+}$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est définie positive } \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*}$

Autrement dit, la matrice A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.