Illustration du théorème spectral - variations autour d'un exercice

Exercice 1

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier, sans calcul que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La matrice A est symétrique RÉELLE.

Par théorème spectral, elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. □

2. Démontrer que 0 est valeur propre de A.

Démonstration.
La matrice A est non inversible (on peut remarquer par exemple que les deux premières colonnes sont égales).

On en conclut que 0 est valeur propre de A. □

3. Que vaut $\dim\big(E_0(A)\big)$? En déduire le spectre de A ainsi que la dimension des sous-espaces propres.

Démonstration.

- D'après la question précédente, 0 est valeur propre de A.
  Déterminons alors $\dim\big(E_0(A)\big)$. Par théorème du rang matriciel :

$$\begin{aligned} \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) &= \dim\big(\operatorname{Im}(A)\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(A)\big) \\ &= \operatorname{rg}(A) + \dim\big(E_0(A)\big) \end{aligned}$$

On en déduit : $\dim\big(E_0(A)\big) = \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) - \operatorname{rg}(A) = 3 - 1 = 2$. En effet :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A) &= \dim\left(\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \dim\left(\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \dim\left(\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\dim\big(E_0(A)\big) = 2}$$

- D'après la question ***1.***, la matrice A est diagonalisable. On en déduit :

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) \;=\; \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) \;=\; 3 \qquad (*)$$

Comme $\dim\big(E_0(A)\big) = 2$, l'égalité $(*)$ démontre que la matrice A possède une valeur propre non nulle μ et que : $\dim\big(E_\mu(A)\big) = 1$. Il reste à déterminer la valeur de μ.

Commentaire

- Il existe une autre méthode pour démontrer que la matrice A admet une valeur propre différente de 0. On la détaille dans le point suivant.
- On procède par l'absurde.
  On suppose alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
  Comme la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors il existe :
  - $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$,
  - $D \in \mathscr{D}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A présentes autant de fois que leur multiplicité,

  tels que : $A = P\,D\,P^{-1}$. Ainsi :

$$A \;=\; P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} \;=\; \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

  Impossible puisque $A \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  Ainsi, A possède bien une valeur propre différente de 0.

- La matrice A étant diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Elle est donc en particulier trigonalisable sur $\mathbb{R}$ ce qui suffit à affirmer :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A) &= \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A)\times\lambda \\
&= \cancel{m_0(A)\times 0} \;+\; m_\mu(A)\times\mu \\
&= \dim\big(E_\mu(A)\big)\times\mu && \textit{($m_\mu(A) = \dim\big(E_\mu(A)\big)$ puisque A est diagonalisable)} \\
&= \mu
\end{aligned}$$

On en conclut : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$ et $\dim\big(E_0(A)\big) = 2$ et $\dim\big(E_3(A)\big) = 1$.

□

4. Déduire des questions précédentes le polynôme caractéristique de A.

Démonstration.
Comme A est diagonalisable :

$$m_0(A) = \dim\big(E_0(A)\big) = 2 \quad\text{et}\quad m_3(A) = \dim\big(E_3(A)\big) = 1$$

On en conclut : $\chi_A(X) = X^2\,(X-3)$.

□

Exercice 2

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.

Démonstration.

$$A^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \;=\; 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 3 \cdot A$$

Comme $A^2 - 3 \cdot A = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ alors $P(X) = X^2 - 3X = X\,(X-3)$ est un polynôme annulateur de A. □

2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

La matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. □

3. Déduire des questions précédentes le polynôme caractéristique de A.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Sp}(A) \;\subset\; \{\text{racines de } P, \text{ polynôme annulateur de } A\} \;=\; \{0, 3\}$$

Les valeurs propres `POSSIBLES` de A sont 0 et 3.

- La matrice A est non inversible (on peut remarquer par exemple que les deux premières colonnes sont égales).

On en conclut que 0 est valeur propre de A.

- Par ailleurs, par théorème du rang matriciel :

$$\begin{aligned} \dim\big(E_0(A)\big) &= \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(A)\big) \\ &= \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) - \mathrm{rg}(A) \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\dim\big(E_0(A)\big) = 2$$

- Comme A est diagonalisable alors :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) = 3 \qquad (*)$$

On en déduit que A possède une valeur propre non nulle μ. Comme $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 3\}$ alors $\mu = 3$.

D'après $(*)$, $\dim\big(E_3(A)\big) = 3 - \dim\big(E_0(A)\big) = 3 - 2 = 1$

- Finalement, comme A est diagonalisable :

$$m_0(A) = \dim\big(E_0(A)\big) = 2 \quad \text{et} \quad m_3(A) = \dim\big(E_3(A)\big) = 1$$

On en conclut : $\chi_A(X) = X^2\,(X-3)$.

□

Exercice 3

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer χ_A.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det\Big(X\,I_3 - A\Big) \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & X-1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ X-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (X-3)\,L_1}}{=} (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ 0 & X & -X \\ 0 & -X & -1+(X-1)^2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ 0 & X & -X \\ 0 & -X & X^2-2X \end{vmatrix} \\
&= \cancel{(-1)} \times (-1)^{1+1}\ \cancel{(-1)} \times \begin{vmatrix} X & -X \\ -X & X(X-2) \end{vmatrix} && \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= X\begin{vmatrix} 1 & -X \\ -1 & X(X-2) \end{vmatrix} \\
&= X \times X\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & (X-2) \end{vmatrix} \\
&= X^2\Big(\big(1\times(X-2)\big) - \big((-1)\times(-1)\big)\Big) \\
&= X^2\,(X-3)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \chi_A(X) = X^2\,(X-3).}$$

□

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } \chi_A, \\ \text{polynôme caractéristique de } A \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}}$$

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_0(A) & \iff & A \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & -y & - & z \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_0(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y - z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On en conclut : $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

La famille $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× libre car constituée uniquement de **deux** vecteurs non colinéaires.

× génératrice de $E_0(A)$.

C'est donc une base de $E_0(A)$.

En particulier : $\dim\left(E_0(A)\right) = \text{Card}\left(\mathscr{F}\right) = 3$.

- Déterminons alors $E_3(A)$.

$$
\begin{array}{rcl}
U \in E_3(A) & \iff & (A - 3\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & = & -z & & \\ & - & 3\,y & = & -3\,z & & \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -6\,x & & & = & -6\,z & & \\ & - & 3\,y & = & -3\,z & & \end{array} \right.
\end{array}
$$

On obtient alors :

$$
\begin{array}{rcl}
E_3(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \quad \text{et} \quad y = z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

La famille $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

× génératrice de $E_3(A)$.

C'est donc une base de $E_3(A)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \dim\big(E_3(A)\big) = \text{Card}\,\big(\mathscr{F}\big) = 1.}$$

□

3. Démontrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\dim\left(E_0(A)\right) \ + \ \dim\left(E_3(A)\right) \ = \ 2 \ + \ 1 \ = \ 3 \ = \ \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$$

Ainsi, A est diagonalisable.

- On conclut du point précédent : $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_0(A) \ \oplus \ E_3(A)$.
  En particulier, la famille $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ obtenue par concaténation d'une base de $E_0(A)$ et de $E_3(A)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  En notant $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

□