Feuille d'exercices n°16 : Calcul différentiel

Exercice 1
Pour chaque sous ensemble de $\mathbb{R}^2$, préciser s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé, ou d'un fermé borné. Aucune justification n'est demandée.

1. $A = \mathbb{R}^2$

2. $B = [0,1] \times [0,1]$

3. $C = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

4. $D =]1,+\infty[\times \mathbb{R}_+^*$

5. $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x+y \geqslant 1\right\}$

6. $F = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

7. $G =]0,1[\times]0,1[$

8. $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

9. $I = \mathbb{R} - \{-1;1\} \times \mathbb{R}_+^*$

10. $J = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Exercice 2
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par :

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+x)}{y^2+1} - \sqrt{xy}$$

1. Expliciter les applications partielles de f en $(2,1)$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

3. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0,1] \times [0,1]$.

Exercice 3
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les lignes de niveau de f.

Exercice 4
Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U proposé, et calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

1. f définie par $f(x,y) = x^2 + 3x^2y - xy + y^2$ sur $U = \mathbb{R}^2$;

2. f définie par $f(x,y) = (x+y)(1-2x-2y)$ sur $U = \mathbb{R}^2$;

3. f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;

4. f définie par $f(x,y) = x\ (\ln(x) + x + y^2)$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$;

5. f définie par $f(x,y) = xy\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2$;

6. f définie par $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$ sur $U =]0,+\infty[\times]1,+\infty[$;

7. f définie par $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} \ln(1+x^2+y^2)$ sur $U = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.

2. Déterminer l'unique point (a,b) en lequel f est suceptible de présenter un extremum local.

3. Prouver que f atteint un minimum en (a,b).

4. Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $5\left(x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{5}\,(y-2)^2$.
En déduire que f admet un minimum global su $\mathbb{R}^2$.
Quelle est la valeur de ce minimum ?

Exercice 6

T est l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations :

$$x \geqslant \frac{1}{4};\ y \geqslant \frac{1}{4};\ x+y \leqslant \frac{3}{4}$$

On note T' « l'intérieur de T » à savoir l'ensemble des couples (x,y) solutions du système d'inéquations :

$$x > \frac{1}{4};\ y > \frac{1}{4};\ x+y < \frac{3}{4}$$

On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que T est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Soit f la fonction définie sur T par : $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x+y}$.

1. Représenter sur un même graphique T et T'.

2. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur T.

3. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur T'.

b) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.

c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T'.

4. ***a)*** Montrer que le minimum et le maximum de f sont atteints sur :

$$\mathscr{C} = \left\{(x,y) \in T\ ;\ x = \frac{1}{4} \text{ ou } y = \frac{1}{4} \text{ ou } x+y = \frac{3}{4}\right\}.$$

b) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x,y) de T :

$$2 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{16}{3}$$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

2. Déterminer un équivalent de $f(x,x) - f(0,0)$ et de $f(x,0) - f(0,0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0,0)$?

3. Rechercher les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x,y,y^2)$$

On dit alors qu'on étudie la fonction g **sous la contrainte** $z = y^2$.

1. Expliciter $f(x,y)$, et calculer :

$$\partial_1(f)(x,y),\ \partial_2(f)(x,y),\ \partial_1^2(f)(x,y),\ \partial_{12}^2(f)(x,y) \ \text{ et } \ \partial_2^2(f)(x,y)$$

2. Déterminer les extrema éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = 4\left(x + \dfrac{1}{2}z\right)^2 + 4\left(y - \dfrac{1}{2}z\right)^2$.
En déduire que f admet un minimum global en $(0,0)$.

4. Montrer que f présente un minimum local en $(-2,2)$.

5. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de f en $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$.

En déduire le développement limité d'ordre 2 de $f\left(-\dfrac{1}{2}+h, 1+h\right)$ et de $f\left(-\dfrac{1}{2}+h, 1-h\right)$, lorsque h est au voisinage de 0. En déduire que f ne présente pas d'extremum local en $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Déterminer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.

3. ***a)*** Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer qu'effectivement f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.

4. ***a)*** Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant x\,\mathrm{e}^x$.

b) En étudiant la fonction $g : x \mapsto x\ \mathrm{e}^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question ***3.b)*** est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. ***a)*** Calculer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

3. ***a)*** Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.

b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y$$

a) Utiliser la question ***3)*** pour établir : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geqslant -\frac{1}{6}$.

b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ par :

$$f(x,y) = x^2 \ln(y) - y\ln(x)$$

1. On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(t) = 4t^2 - 2t\ln(t) - 1$.

a) Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur son domaine et calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ pour $t > 0$.

b) Étudier les variations de g' sur $]0; +\infty[$, puis celle de g sur $]0; +\infty[$. (On précisera à chaque fois les limites aux bornes)

c) En déduire qu'il existe un unique élément strictment positif α tel que $g(\alpha) = 0$.

d) Vérifier que : $\ln(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{2\alpha}$.

2. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

c) En déduire que si (x_0, y_0) est un point critique de f, alors $x_0 > 1$ et $y_0 = \frac{(x_0)^2}{\ln(x_0)}$.

d) Établir alors que $g(\ln(x_0)) = 0$.
En déduire que f possède un unique point critique noté M, de coordonnées $\left(\mathrm{e}^\alpha, \frac{\mathrm{e}^{2\alpha}}{\alpha}\right)$ où α est le réel défini au ***1.c)***.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) En utilisant la relation de la question ***1.d)***, montrer que :

$$2\ln(y_0) + \frac{y_0}{(x_0)^2} = \frac{2}{\alpha}$$

En déduire que la fonction f ne présente pas d'extremum.

Exercice 12

Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F_a(x,y) \ = \ \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $F_a(x,y)$ en fonction de x, y et a.

2. Vérifier que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles.
Calculer $F_a(x_0, y_0)$.

4. Calculer, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre :

$$G_a(x,y) = F_a(x,y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2$$

et préciser son signe.

5. En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$.
Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum global et donner sa valeur notée $M(a)$.

6. Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

Exercice 13

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 - 2xy + 2y^2 + \mathrm{e}^{-x} \end{array}$

1. Établir que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule, qu'on notera par la suite x_0.

2. Montrer que l'unique point critique de f est le point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.

3. ***a)*** Écrire la matrice hessienne, notée H, de f au point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.

b) Montrer que H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 6 + x_0 \\ \lambda_1 \lambda_2 & = & 4 + 4\,x_0 \end{cases}$$

c) La fonction f présente-t-elle un extremum local au point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$?

Exercice 14

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ f(x,y) = \mathrm{e}^{x+4y} \ln(xy)$$

Étude des zéros de φ

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.

4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.
Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \ \text{ avec } 0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$$

6. Proposer un programme en **Python** permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

7. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

8. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x et y strictement positifs :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = f(x,y) + \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\ \partial_2(f)(x,y) = 4f(x,y) + \dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}$$

9. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

10. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et établir que :

$$\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \partial^2_{2,2}(f)\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \partial^2_{2,1}(f)\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}$$

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$?
Si oui, en donner sa nature (maximum on minimum).

12. De même, f présente-t-elle un extremum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$?

Exercice 15

On considère la fonction f qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,(x-y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

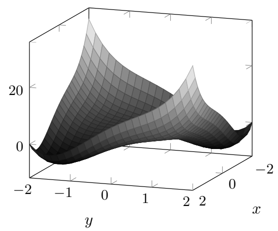
d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x=0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

4. ***a)*** Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y)-(x^2-2)^2-(y^2-2)^2-2(x+y)^2$.

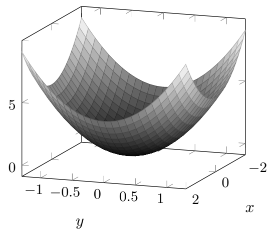
b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

5. Parmi les trois nappes suivantes, laquelle correspond à la représentation graphique de f ?

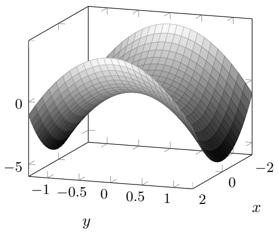
Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 16

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

c) Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$$

4. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

6. Démontrer que pour tout $(x,y) \in U$:

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la **Partie A**.
Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire de la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1,z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 17

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. ***a)*** Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

4. ***a)*** Étudier les variations de la fonction $u : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array} \right.$.

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$, définie, pour tout (x,y) de $]1,\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy$$

5. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question **4.** de la partie **I**.

6. ***a)*** Déterminer la matrice hessienne de F en (α,α).

b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α,α) ?
Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

Exercice 18

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,+\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \ H(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + \mathrm{e}^y$$

1. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x,y) de U.

b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a,\ln(a))$ et $(b,\ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question ***2.***

2. ***a)*** Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a,\ln(a))$.

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a+1 \\ \lambda_1\,\lambda_2 & = & a-1 \end{array} \right.$$

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a,\ln(a))$?

3. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b,\ln(b))$?

Exercice 19 *(d'après* `CCINP 2022 - MP - oraux`*)*

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.

b) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».

2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20 *(d'après* `CCINP 2022 - MP - oraux`*)*

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
Soit $a \in E$ et soit $f : E \to F$ une application.
Donner la définition de « f différentiable en a ».

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
On pose : $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.
On pose : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.
On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.
Soit $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

a) Démontrer : $\exists C \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in E \times E,\ B(x,y) \ \leqslant\ C\ \|x\|_\infty\ \|y\|_\infty$.

b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Exercice 21 *(d'après* `CCINP 2021 - PSI`*)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Expliciter des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

a) arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) < 0$.

b) arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) > 0$.

La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = f(1+u, 1+v) - f(1,1)$$

3. Calculer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v)$.
Puis, calculer pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$.

4. Prouver que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \geqslant 3r^2 \left(\dfrac{1}{2} - 2r\right)$.

Que peut-on en conclure ?

5. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Exercice 22 *(d'après* `CCINP 2021 - MP`*)*

1. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$ et en déduire :

$$\forall (a,b,c) \in \,]0,+\infty[^3,\ \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

2. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Exercice 23 *(d'après* `CCINP 2020 - PC`*)*

On se donne un entier $n \geqslant 2$.
On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
On considère alors l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned}\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\ x_i\, x_j \right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j}\ x_i\, x_j\end{aligned}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n. On définit la matrice $M_f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & si\ i = j \\ a_{i,j}/2 & si\ i < j \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette **partie**, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2,\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 x_2$$

1. Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.

2. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2.

3. Justifier que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur la boule B_2 et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte définie par $B_2' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

4. En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1.

5. Vérifier que la plus grande valeur propre de la matrice M_f est égale au maximum de la fonction f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$.
On considère $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. Montrer : $f(x) = X^T M_f X$.

7. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.
On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

8. Montrer les égalités $Y^T Y = X^T X = \|x\|^2$.

9. On suppose : $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.
Montrer : $\lambda_1 \leqslant Y^T D Y \leqslant \lambda_n$ et en déduire : $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

10. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

11. Dans le cas où $\lambda_1 \geqslant 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie**, on suppose que $n \geqslant 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in B_n,\ f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2\, x_i x_j$$

12. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Exercice 24 *(d'après* `CCINP 2022 - MP - oraux`*)*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Prouver : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - xy \geqslant \dfrac{1}{2}\ (x^2 + y^2)$.

2. ***a)*** Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Dans cette question, on suppose : $\alpha = 0$.

a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.

b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.

c) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 25 *(d'après* `CCINP 2010 - MP`*)*
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2 + y^2} & \textit{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \textit{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

1. Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles premières en $(0, 0)$ que l'on déterminera.

2. Démontrer que la fonction f est différentiable en $(0, 0)$.