Feuille d'exercices n°12 : Couples de variables aléatoires discrètes

Conditionnement par des variables aléatoires qui suivent des lois usuelles

Exercice 1

- On considère n urnes numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}^*$).
- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
- On tire un nombre au hasard entre 1 et n. On note alors X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre obtenu. Si ce nombre est i, on effectue alors un tirage dans l'urne i.
- On note enfin Y la variable aléatoire qui prend pour valeur :
  - × 1 si on obtient une boule blanche.
  - × 0 si on obtient une boule noire.

1. Reconnaître la loi de X. Rappeler alors l'espérance et la variance de X.

2. ***a)*** Déterminer $Y(\Omega)$. Que peut-on en conclure ?

b) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$.

3. Déterminer alors la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 2

- On considère une pièce qui amène Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.
- On tire un nombre au hasard entre 1 et n. On note alors X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre obtenu. Si ce nombre est i, on effectue alors i lancers de la pièce. Les lancers sont considérés indépendants.
- On note enfin Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de Pile obtenus lors de ces lancers.

1. Reconnaître la loi de X. Rappeler alors l'espérance et la variance de X.

2. ***a)*** Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$.

3. Démontrer :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}\big(\{Y = j\}\big) = \frac{1}{n} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} (1-p)^i$$

4. Vérifier, par le calcul : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{Y = j\}\big) = 1$.

5. Démontrer : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+1}{2}\, p$.

Exercice 3

- On considère n urnes numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}^*$).
- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
- On tire un nombre au hasard entre 1 et n. On note alors X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre obtenu. Si ce nombre est i, on effectue alors une infinité de tirages dans l'urne i.
- On note enfin Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang de la première boule blanche obtenue.

1. Reconnaître la loi de X. Rappeler alors l'espérance et la variance de X.

2. ***a)*** Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$.

3. Démontrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{Y = j\}\big) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{j-1}$$

4. Vérifier, par le calcul : $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y = j\}\big) = 1$.

5. Démontrer : $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Exercice 4

- Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0,1[$), et celle d'obtenir face est $q = 1 - p$.
- Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile.
- On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.
- Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

1. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = k\}$.

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

3. Montrer : $\mathbb{P}\big(\{Y = 0\}\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\mathbb{P}\big(\{Y = n\}\big) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dbinom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.

5. On admet :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0,1[,\ \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k-1}{m-1} x^k = \frac{x^m}{(1-x)^m}$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\{Y = n\}\big) = \dfrac{1}{(1+q)^2} \left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

6. Déterminer l'espérance de Y.

7. ***a)*** Démontrer que la variable aléatoire Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) = 2q$$

b) Déterminer $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$ et en déduire la variance de Y.

Exercice 5

- On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et face avec probabilité $q = 1 - p$.
- On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.
- Les lancers sont considérés indépendants.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

3. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$.

4. En déduire la loi de Y.

5. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\sum\limits_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y = j\})$? Retrouver ce résultat par calcul.

Obtention des lois marginales / conditionnelles via la loi de couple

Exercice 6

- Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
- Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telles que $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
- Pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on pose :

$$a_{i,j} = \mathbb{P}\big(\{X = j\} \cap \{Y = i\}\big) \quad \text{et} \quad b_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X=j\}}\big(\{Y = i\}\big)$$

1) On suppose qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, a_{i,j} = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

a. Calculer la valeur de λ.

b. Déterminer les lois marginales de X et de Y.

c. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

d. Soit $Z = X - 1$. Reconnaître dans la loi de Z une loi usuelle.
En déduire l'espérance et la variance de X.

2) On suppose à présent que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } |i+j-n-2| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Déterminer α.

b. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7

- Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.
- On suppose que :
  - × X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
  - × $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
  - × pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = n\}$ est une loi binomiale de paramètres n et p.
    Cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{V = k\}\big)$ où V est une variable aléatoire telle que : $V \sim \mathcal{B}(n, p)$.
    (il est vivement conseillé de traduire correctement cette information, c'est-à-dire en prenant garde aux valeurs de k et n)

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

3. Déterminer la loi de $X - Y$.

4. *a)* Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 8

- Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = c\ \frac{i+j}{i!j!}$$

1. *a)* Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\{X = i\}) = c\frac{(i+1)}{i!}\ \mathrm{e}$$

En déduire la valeur de c.

b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2. *a)* Déterminer la loi de $X + Y - 1$.

b) En déduire la variance de $X + Y$.

c) Calculer la covariance de X et de $X + 5Y$.
Les variables aléatoires X et $X + 5Y$ sont-elles indépendantes ?

3. On pose : $Z = \dfrac{1}{X+1}$.

a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$.

Exercice 9 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big((X,Y) = (j,k)\big) \ = \ \frac{(j+k)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Prouver que $\mathbb{E}\big(2^{X+Y}\big)$ existe et la calculer.

Exercice 10 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

- Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) \ = \ \frac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1}\ j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. ***a)*** Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $\mathbb{P}\big(\{X = Y\}\big)$.

Exercice 11 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

- On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \,]-1,1[$, la série $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que :

$$\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} \ = \ \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$$

- Soit $p \in \,]0,1[$.
- Soit $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé.
- Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Y = n\}\big) \ = \ \begin{cases} \dbinom{n}{k} \ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ p\,(1-p)^n & \textit{si } k \leqslant n \\ \qquad 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. ***a)*** Déterminer la loi de Y.

b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.

c) Déterminer l'espérance de Y.

3. Déterminer la loi de X.

Exercice 12

- Soient $n \geqslant 2$, et p et q deux réels de $]0,1[$ tels que $p + q = 1$.
- On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. La loi du couple (X, Y) est donnée par, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, et tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}\big(\{X = j\} \cap \{Y = k\}\big) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k\, q^{n-k} & \text{si } k = j \text{ et } j \neq 0 \\ \quad \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ \quad 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1. ***a)*** Déterminer les lois marginales de X et Y respectivement.

b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

2. Soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n$.

a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = j\}$.

b) Si A est un événement de probabilité non nulle, on note $\mathbb{E}_A(Y)$ l'espérance de Y, si elle existe, pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$.
Déterminer $\mathbb{E}_{\{X=j\}}(Y)$.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $q \in \,]0;1[$, on a :

$$\mathbb{P}\big(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}\big) \neq \mathbb{P}\big(\{X = 1\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{Y = 1\}\big)$$

Conclure.

b) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
Montrer qu'il existe une valeur de q pour laquelle $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

c) Conclure.

Exercice 13

- Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soient λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.
- On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathbb{P}\big(\{X = n\} \cap \{Y = k\}\big) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^n\,p^k\,(1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.

2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y, sachant que $\{X = n\}$ est réalisé.

4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Déterminer la loi d'un couple (X, Y)

Exercice 14

- On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$ et face avec probabilité $q = 1 - p$. On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.
- Les lancers sont considérés indépendants.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. En déduire la loi de Y.

4. Que vaut $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \right)$? Le retrouver par calcul.

Exercice 15

- On considère un dé équilibré à 3 faces numérotées 1, 2 et 3. On effectue n lancers de ce dé (où $n \in \mathbb{N}^*$). On introduit les variables aléatoires X et Y suivantes :
  - × X prend pour valeur le nombre de faces 1 obtenues au cours de l'expérience,
  - × Y prend pour valeur le nombre de faces 2 obtenues au cours de l'expérience.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. Déterminer la loi de X à l'aide de la question précédente.
Quelle loi usuelle reconnaît-on ? Commenter.

3. On considère maintenant que le dé amène :
- × la face 1 avec probabilité $p \in \,]0,1[$,
- × la face 2 avec probabilité $q \in \,]0,1[$,
- × la face 3 avec probabilité $r \in \,]0,1[$.

En particulier, on a : $p + q + r = 1$.

Déterminer la loi du couple (X, Y) dans ce cas.

Fonctions génératrices des probabilités

Exercice 16

- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$, où n et m sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.
- Pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$.
- Soient F_X et F_Y les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = i\})\,x^i \quad \text{et} \quad F_Y(x) = \sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}(\{Y = j\})\,x^j$$

Soit $Z = (X, Y)$ et G_Z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$G_Z(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_{i,j}\,x^i\,y^j$$

1. Donner la valeur de $G_Z(1,1)$ et exprimer les espérances de X, Y et XY, puis la covariance de (X,Y) à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de G_Z au point $(1,1)$.

2. Soit f une fonction polynomiale de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j \quad \text{avec} \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

On suppose que pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = 0$.

a) Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$.

b) En déduire :

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ G_Z(x,y) = F_X(x)\ F_Y(y)$

(on pourra poser : $a_{i,j} = p_{i,j} - \mathbb{P}(\{X=i\})\ \mathbb{P}(\{Y=j\})$)

3. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A, B ou C.
La proportion des jetons portant la lettre A est p, celle des jetons portant la lettre B est q et celle des jetons portant la lettre C est r, où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p+q+r=1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

a) Quelles sont les lois de X et Y respectivement ? Déterminer F_X et F_Y.

b) Déterminer la loi de Z. En déduire G_Z.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Calculer la covariance de (X,Y).
Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Exercice 17

- Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires et p_3 pour les rouges ($p_1+p_2+p_3=1$).
- On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise. Les proportions de boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.
- On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si une boule blanche est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage, -1 si une boule noire est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage et 0 si une boule rouge est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage. On note $S_k = Z_1 + \cdots + Z_k$.

a) Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de S_k.

b) Pour tout réel t strictement positif et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$g_k(t) = \mathbb{E}\big(t^{S_k}\big)$$

Expliciter $g_k(t)$ en fonction de t et de k.

c) Montrer que $g_k'(1) = \mathbb{E}(S_k)$ et retrouver le résultat de la question ***a)***.

2. ***a)*** On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois.

Trouver la loi de probabilité de X_1.

Calculer son espérance et sa variance.

b) Sachant que l'événement $\{X_1 = k\}$ est réalisé, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge à chacun des $k-1$ premiers tirages ?

c) On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche.

Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $\{X_1 = k\}$?

d) En déduire la loi de W (sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer).

3. On note Y_1 la variable représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l), la probabilité de l'évènement :
$$\{X_1 = k\} \cap \{Y_1 = l\}$$
(on pourra distinguer selon que $k > l,\ k = l$ ou $k < l$)

Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ?

b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $p_3 = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boule rouge).
Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.

Loi de la somme / de la différence / de la distance

Exercice 18

- Soient X et Y deux variables de Bernoulli de même paramètre p $(0 < p < 1)$ et indépendantes.

1. On considère les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
Déterminer la loi du couple (S, D).

2. Déterminer les lois marginales du couple (S, D).

3. Calculer les espérances $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{E}(D)$.

4. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

5. Calculer la covariance de S et D.

Exercice 19

- Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n.
- On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac.
- On note X le numéro du premier jeton tiré, et Y le numéro du second jeton tiré.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

3. Déterminer la covariance de X et Y.

4. On note $Z = |X - Y|$.
Déterminer la loi de Z, puis calculer l'espérance de Z.

Exercice 20

- Soient N et X deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω, telles que $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et pour tout $k \in N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $\{N = k\}$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, k\}$.
- On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(\{N = k\})$.

1) **a.** Déterminer la loi du couple (X, N) en fonction de la loi de N.

b. Donner, sous la forme d'une somme faisant intervenir les p_k, la probabilité $\mathbb{P}(\{X = i\})$, pour $i \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que $(N - X)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et que $N - X$ suit la même loi que X.

2) On suppose dans cette question qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que :

× $\forall k \geqslant n + 1,\ p_k = 0,$

× $\forall k \leqslant n,\ p_k > 0.$

a. Justifier l'existence des variances de N et de X et de la covariance de N et X.

b. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X)$, puis entre $\mathbb{V}(N)$ et $\mathrm{Cov}(N, X)$.

c. Calculer $\mathrm{Cov}(N, N - 2X)$.
Les variables N et $N - 2X$ sont-elles indépendantes ?

3) On suppose dans cette question que $p_0 = p_1 = 0$ et : $\forall k \geqslant 2, p_k = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

a. Déterminer explicitement la loi du couple (X, N) et la loi de X.

b. Les variables X et N admettent-elles une espérance ?

c. Montrer que les espérances $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$ existent et les calculer.

Exercice 21

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance. On la note $r(Z)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big(\{Z = n\}\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

2. ***a)*** Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité et calculer $r(Z)$.

b) Montrer que pour tout $(n, q) \in \mathbb{N}^2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1}$.

c) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que Z et pour tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q = \sum\limits_{i=1}^{q} X_i$.

Montrer que la loi de S_q est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{S_q = n\}\big) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

d) Calculer $r(S_q)$. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}$$

3.
- On suppose dans cette question que Z représente le nombre de lionceaux devant naître en 2014 d'un couple de lions.
- Chaque lionceau a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres.
- On note F la variable aléatoire représentant le nombre de femelles devant naître en 2014.

Déterminer la loi de F.

Exercice 22

- Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

1. Déterminer $S_n(\Omega)$.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2.

3. Montrer par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}\big(\{S_n = k\}\big) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum \binom{k-1}{n-1} k\,(1-p)^k$ est convergente et a pour somme $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} k\ (1-p)^k = \dfrac{n\,(1-p)^n}{p^{n+1}}$

Exercice 23

- Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.
- On suppose que :
  - × X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
  - × $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
  - × pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = n\}$ est une loi binomiale de paramètres n et p.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

3. Déterminer la loi de $X - Y$.

4. Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

Détermination de la loi de couple / des lois conditionnelles

Exercice 24

- Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
- On dispose d'un paquet de n cartes C_1, C_2, ..., C_n que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs J_1, J_2, ..., J_n selon le protocole suivant :
  - × la première carte C_1 est donnée à J_1 ;
  - × la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;
  - × la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;
  - × et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs J_1, ..., J_n.

  On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X_n = n-1\}\big)$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.

Déterminer la loi de B_i. Exprimer la variable aléatoire X_n en fonction des variable aléatoire B_i et en déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. ***a)*** Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :

$$\mathbb{P}(\{B_i = 1\} \cap \{B_j = 1\}) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des variable aléatoire B_j et B_j.

b) Montrer que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 25

- On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n.
- On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise.
- On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :
  - × X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1 ;
  - × pour $p \geqslant 2$, X_p prend la valeur 1 si le numéro obtenu au $p^{\text{ème}}$ tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents et X_p prend la valeur 0 dans le cas contraire.

1) Déterminer la loi de X_2.

2) Montrer que X_p suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.

3) ***a.*** Montrer que :

$$\forall i < j,\ \mathbb{P}(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}) = \frac{(n-1)^{i-1}\, n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

b. En déduire la loi du produit $X_i X_j$.

4) Soit $N \geqslant 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages.

Exprimer Z_N en fonction de X_k et en déduire son espérance.

Exercice 26

- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
- On effectue deux tirages d'une boule avec remise.
- On note X (respectivement Y) le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros tirés.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

2. Déterminer les lois mariginales de X et Y.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

4. Calculer la covariance de X et Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Calculer la variance de $X + Y$.

Exercice 27

- Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p (avec $0 < p < 1$) ; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
- On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise.
- On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ par, pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$\{X = i\} \cap \{Y = j\}$: « les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est blanche ou les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est verte »

1. *a)* Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y)

3. En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

4. *a)* Établir que si $p \neq \frac{1}{2}$, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

b) Démontrer que si $p = \frac{1}{2}$, les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 28

- On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire et on procède à l'expérience suivante : on effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et à chaque pas du tirage on replace dans l'urne la boule tirée en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur que la boule obtenue.
- On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ?

2. Déterminer la loi de X_1, de X_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer, pour tout $k \in X_n(\Omega)$, la loi de X_{n+1} conditionnelle à $\{X_n = k\}$.

4. Démontrer, en raisonnant par récurrence : $X_n \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

Exercice 29

- Une urne contient n boules noires (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et deux boules blanches.
- On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule, sans remise.
- On note :
  - × X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.
  - × Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la seconde boule blanche.
  - × pour tout $i \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$, N_i (resp. B_i) l'événement « le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule noire (resp. blanche) ».

1. *a)* Préciser $X(\Omega)$. Décrire, pour tout $k \in X(\Omega)$, l'événement $\{X = k\}$ à l'aide des événements N_i et B_i.

b) Montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. *a)* Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).

c) En déduire la loi de Y.

d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Commenter son signe.

Exercice 30

- On considère trois boîtes et une infinité de jetons. On place successivement chacun des jetons, au hasard, dans l'une des trois boîtes.
- On suppose que chaque boîte est vide au départ et a une capacité illimitée. On suppose également que la probabilité pour qu'un jeton soit placé dans une boîte donnée est $\frac{1}{3}$.
- Soit Y le nombre aléatoire de jetons placés lorsque, pour la première fois, deux boîtes exactement sont occupées par au moins un jeton.
- Soit Z le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, les trois boîtes sont occupées, chacune, par au moins un jeton.

1. Déterminer $\mathbb{P}\big(\{Y=k\}\big)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\} \times \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{Y=k\}}\big(\{Z=\ell\}\big)$.
4. Donner la loi de la variable aléatoire Z.

Exercice 31

- Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On jette n fois de suite un dé pipé dont les 6 faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3, et on suppose que les résultats des lancers sont indépendants.
- À chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q, et celle d'obtenir 3 est $1-p-q$, où p et q sont deux paramètres réels strictement positifs vérifiant $p+q<1$.
- Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en n lancers consécutifs.

1. *a)* Quelles sont les lois respectives de X et Y ?

   b) Déterminer la loi du couple (X,Y).

   c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

   Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en N lancers consécutifs.

   a) Déterminer les lois de X et Y respectivement.

   b) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

Exercice 32

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

1. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

   a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y-1$.

   b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire Y.
2. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

   a) Soit deux entiers $k \geqslant 2$ et $\ell \geqslant 3$.
   Calculer $\mathbb{P}(\{Y=k\} \cap \{Z=\ell\})$ selon les valeurs de k et ℓ.

   b) En déduire que, pour tout entier $\ell \geqslant 3$, on a : $\mathbb{P}(\{Z=\ell\}) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2^{\ell-2}-1}{3^{\ell-2}}\right)$.

   c) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.
3. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ n jetons, numérotés de 1 à n.

Loi de la somme

Exercice 33 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

- Soit $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé.

1. ***a)*** Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \,]0, +\infty[\, \times \,]0, +\infty[$.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in \,]0, 1[$. Soit $\lambda \in \,]0, +\infty[$.
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = m\}$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X.

Exercice 34 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

- Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
- On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in \,]0, 1[$).
- Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.

2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\,\{Y = k\} \mid \{X = i\}\,\big)$.

b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$$

c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Loi du minimum / loi du maximum de variables aléatoires discrètes

Exercice 35 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $p \in \,]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
- On considère N variables aléatoires X_1, X_2, …, X_N définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\mathbb{P}\big(\,\{X_i \leqslant n\}\,\big)$, puis $\mathbb{P}\big(\,\{X_i > n\}\,\big)$.

2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min\ \big(X_1(\omega), \ldots, X_N(\omega)\big)$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}\big(\,\{Y > n\}\,\big)$.
En déduire $\mathbb{P}\big(\,\{Y \leqslant n\}\,\big)$ puis $\mathbb{P}\big(\,\{Y = n\}\,\big)$.

b) Reconnaître la loi de Y.
En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 36 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

- On considère X et Y deux variables indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) = p\, q^k$$

où $p \in \,]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

- On considère alors les variables U et V définies par :

$$U = \sup\,(X, Y) \quad \text{et} \quad V = \inf\,(X, Y)$$

1. Déterminer la loi du couple (U, V).

2. Déterminer la loi marginale de U.

On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\big(\{V = n\}\big) = p\, q^{2n}\,(1 + q)$.

3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
En déduire l'espérance de V.

4. Les varrables U et V sont-elles indépendantes ?

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 37 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Rappler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de mêm loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
Prouver : $\forall a \in \,]0, +\infty[,\ \mathbb{P}\left(\left\{\left|\dfrac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right\}\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Y_1)}{n\,a^2}$.

3. **Application**
On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.