Feuille d'exercices n°13 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien

Exercice 1

On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que l'application f qui à tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe :

$$f(P) = (2X-1)P' + (X^2-X)P''$$

est un endomorphisme auto-adjoint (relativement à ce produit scalaire) de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 2

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien.

Soit $u \in E$ un vecteur unitaire.

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on note f_a l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E,\ \ f_a(x) = x + a\langle u, x\rangle \cdot u$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme auto-adjoint.

2. Trouver un polynôme annulateur de f_a.
En déduire les éléments propres de f_a.

3. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il un projecteur orthogonal ?

Exercice 3

Soient E un espace euclidien, a et b dans E non colinéaires.

Soit u l'endomorphisme de E défini par : $\forall x \in E$, $u(x) = \langle a|x\rangle b$.

1. Déterminer la matrice M de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

2. On note u^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est ${}^tM$.
Montrer que $f = u + u^*$ est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

Exercice 4

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$, alors $A^2 = I_n$.

Exercice 5

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = {}^tAA$.

1. Montrer que S est symétrique et à valeurs propres positives.
Montrer que $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{Ker}(A)$.

2. On suppose que A est nilpotente et commute avec sa transposée.
Que dire de A ?

Exercice 6

Soit $(E, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

Notons $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres.

Soit $x \in E$ un vecteur unitaire.

1. Montrer : $\forall x \in E$, $\lambda_1 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant \lambda_n$.

2. Montrer : $\forall x \in E$, $\langle x, f(x)\rangle = \lambda_1 \Leftrightarrow f(x) = \lambda_1 x$.

Exercice 7

Soient E un espace euclidien et $u \in E$.

Déterminer les réels α tels que l'application $x \mapsto \alpha\langle u, x\rangle u - x$ soit une isométrie de E. Reconnaître alors cette application.

Exercice 8

Soit E un espace euclidien.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ admettant au moins une valeur propre.
On note λ une valeur propre de u de module maximal.

1. Montrer : $|\lambda| \leqslant \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| \leqslant \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

2. Montrer que si u est un endomorphisme auto-adjoint, alors les inégalités précédentes sont des égalités.

Exercice 9

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques S de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXSX \geqslant 0$$

1. Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer : $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

2. Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.

Exercice 10

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On dit que f est *antisymétrique* si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x|f(y)\rangle = -\langle f(x)|y\rangle.$$

1. On note M la matrice de f dans une base orthonormale de E.
Montrer que f est antisymétrique si et seulement si M est antisymétrique.

2. On suppose que f est antisymétrique.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Montrer que f^2 est symétrique et à valeurs propres négatives.

3. **Illustration.** Soient $u \in \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par : $\forall x \in E,\ f(x) = u \wedge x$.

Montrer que f est antisymétrique et préciser $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
Reconnaître f^2.

Exercice 11

Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$$

1. Que dire de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$?

2. En calculant le produit scalaire $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j)\rangle$ de deux façons, montrer qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \|f(e_i)\| = a$$

3. Montrer qu'il existe une isométrie $g \in \mathrm{O}(E)$ telle que $f = a \cdot g$.

Exercice 12

Soit E un espace euclidien.

Soit H un hyperplan de E et soit $u \neq 0$ un vecteur orthogonal à H.

Soit f une isométrie de E et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

1. **Préambule**.
Soit $h \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer : (h stabilise toute droite vectorielle) $\Rightarrow$ (h est une homothétie).

2. Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie orthogonale.
Préciser ses caractéristiques.

3. Montrer que f commute avec s si et seulement si u est un vecteur propre de f.

4. En déduire l'ensemble des isométries commutant avec tous les éléments de $O(E)$.

Exercice 13

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne standard.

1. Soit r une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) = 1$ et $|P(e^{i\theta})| = 1$.
Montrer que $P(r)$ est une rotation et déterminer son axe et son angle.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\dfrac{1}{3}(2A^2 - A + 2I_3)$ est une matrice de rotation.
Déterminer son axe et son angle.

Exercice 14
Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la rotation autour de la droite dirigée par $(1,0,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ relativement à ce vecteur.

Exercice 15 *(d'après* `E3A 2021 - MP`*)*

- Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$.
- On note id_E l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E que l'on suppose non inversible et non nul.

a) Citer le **théorème spectral.**

b) Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.

c) Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j \in [\![0,k]\!]}$ avec :

$$k \geqslant 1, \quad \lambda_0 = 0 \quad \text{et} \quad 0 < |\lambda_1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k|$$

Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

d) Montrer : $\mathrm{id}_E = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j$.

e) Prouver que tout couple (i,j) de $[\![0,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

f) Démontrer : $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j$.

g) Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer : $p = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j$.

On note alors f^I l'endomorphisme de E défini par : $f^I = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$, appelé **inverse généralisé** de f.

2. Quelques propriétés de l'inverse généralisé.

a) Montrer : $f \circ f^I = p$.
En déduire : $\forall (x,y) \in E^2, \Big(f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f) \Big)$.

b) Soit y un vecteur de E. Montrer :

$$\forall x \in E, \ \left(\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f) \right)$$

3. Application à un exemple.
On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Justifier que f est un endomorphisme symétrique, non nul et non inversible.

b) Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice A.

c) En déduire que f admet exactement 3 valeurs propres : $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
On note pour tout $j \in [\![0,2]\!]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathscr{B}$.

d) Justifier que l'on peut écrire A sous la forme : $A = 2M_1 + 4M_2$.

e) Montrer que E_2 est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de E_2 tel que $\|v_2\| = 1$.

f) Démontrer que : $\forall x \in E, p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle \cdot v_2$.

g) Déterminer la matrice M_2.

4. En déduire la matrice associée à f^I relativement à la base $\mathscr{B}$.

Exercice 16 *(d'après* `E3A 2017 - MP-1`*)*

- Dans tout l'exercice, on note E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- On considère un automorphisme u de E (c'est-à-dire un endomorphisme **bijectif** de E) qui vérifie la propriété (1) :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle \tag{1}$$

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

a) Étant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le (i, j)-ème coefficient de A. Justifier :

$$a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle$$

b) En déduire l'égalité : ${}^tA = -A$.

2. Montrer que l'entier n est un nombre pair.

Indication : on pourra considérer le déterminant de la matrice A.

3. On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$.

Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E.

4. Soit λ une valeur propre réelle de v.

Montrer que λ est strictement négative.

5. On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.

a) Montrer que la dimension de F est égale à 2.

b) Montrer que F est stable par l'automorphisme u.
En déduire que l'orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u.

On notera u_F et $u_{F^\perp}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$.

c) Soit λ une valeur propre réelle de v. On pose $a = \sqrt{-\lambda}$.
Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathscr{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
Indication : on pourra considérer les vecteurs

$$e'_1 = \frac{1}{\|x\|} \cdot x \quad \textit{et} \quad e'_2 = \frac{1}{a\|x\|} \cdot u(x)$$

d) Montrer que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).

6. On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4.
Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).

Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$" de E et deux réels α et β non nuls tels que la matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 *(d'après* `E3A 2012 - MP-2`*)*

- Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.
- Pour tout π, endomorphisme de E, on note π^* son endomorphisme adjoint, c'est-à-dire l'unique endomorphisme vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \langle \pi(x), y \rangle = \langle x, \pi^*(y) \rangle$$

- On dit qu'un endomorphisme π de E est un projecteur s'il vérifie $\pi^2 = \pi$. On dit que le projecteur π est strict si π n'est ni l'endomorphisme nul, ni l'identité id_E.
- Un projecteur π est dit orthogonal si les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(\pi)$ et $\mathrm{Ker}(\pi)$ sont orthogonaux.

1. Soit π un projecteur de E.

  a) Démontrer : $E = \mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi)$.

  b) Dans le cas où π est un projecteur orthogonal, démontrer que :

    (i) Tout vecteur x dans E vérifie : $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$.
    Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

    (ii) Tout vecteur x dans E vérifie : $\langle \pi(x), x \rangle \geqslant 0$.
    Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

  c) Démontrer que π est un projecteur orthogonal si et seulement si $\pi = \pi^*$.

2. On considère ici le cas particulier du plan euclidien : $E = \mathbb{R}^2$.

  a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
  Démontrer que M est la matrice d'un projecteur strict orthogonal sur une base orthonormée de E si et seulement si $d = 1-a, b = c$ et $a(1-a) = b^2$.

  b) Qu'impose cette dernière égalité pour la valeur a ?

  c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ la matrice d'un projecteur strict orthogonal sur une base orthonormée de E. Exprimer le produit de matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$$

  Justifier que la matrice N est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

  d) Soient π_1 et π_2 deux projecteurs stricts orthogonaux sur E. Démontrer que l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

3. Soient π_1 et π_2 deux projecteurs stricts orthogonaux sur un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$.

  a) Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.
  En déduire que l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable sur une base orthonormée (on citera précisément le théorème utilisé) et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

  b) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(\pi_1)$ est stable par l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.

  c) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(\pi_1)$ est stable par l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ et que celui-ci induit sur $\mathrm{Im}\,(\pi_1)$ un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont dans l'intervalle $[0, 1]$.

  d) Soit G le sous-espace vectoriel $(\mathrm{Im}\,(\pi_1) + \mathrm{Ker}\,(\pi_2))$.
  On note $G^\perp$ son orthogonal dans E.
  Démontrer : $G^\perp = \mathrm{Ker}\,(\pi_1) \cap \mathrm{Im}\,(\pi_2)$.
  Que vaut l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ sur $G^\perp$?

  e) Démontrer que l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

  f) Soit r_2 le rang de π_2. Démontrer que $\mathrm{tr}\,(\pi_1 \circ \pi_2) \leqslant r_2$.
  Étudier le cas d'égalité.

Exercice 18 *(d'après* `E3A 2020 - PSI`*)*

- Soient E un plan vectoriel, $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.
- On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathscr{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
- On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \Phi\left(\vec{j}, \vec{i}\right) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi\left(\vec{i}, \vec{i}\right) = \Phi\left(\vec{j}, \vec{j}\right) = 1$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j}$ et $Y = y_1 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$ deux vecteurs de E.
Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.

2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.

3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.

4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $\left(\vec{i}, \vec{k}\right)$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi\left(\vec{j}, \vec{k}\right) > 0$.

5. Expliciter la matrice de f dans la base $\left(\vec{i}, \vec{k}\right)$. Préciser la nature de f.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

Exercice 19 *(d'après* `E3A 2019 - MP-1`*)*

Question de cours : Soit E un espace euclidien.
Redonner sans démonstration la dimension de $E^{\perp}$.

- Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$.
- On note $\mathscr{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
- Soit u l'application qui à $P \in E$ associe $u(P)$ défini par :

$$\forall x \in R,\ u(P)(x) \ = \ \int_0^1 (x+t)^n\ P(t)\ dt$$

1. Montrer : $u \in \mathrm{GL}(E)$.

2. a) Démontrer que pour tout $(p,q) \in [\![0,n]\!]^2$:

$$\left\langle u(X^p), X^q\right\rangle \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+q+1)\,(n+p+1-k)}$$

b) En déduire que u est un endomorphisme auto-adjoint.

3. On sait qu'il existe alors une base **orthonormale** $(P_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $(\lambda_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$.

Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\ P_j(x)\,P_j(y)$.

Indication : pour y réel, on pourra décomposer le polynôme $Q_y = (X+y)^n$ dans la base $(P_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$.

4. Déterminer alors $\mathrm{tr}(u)$ (trace de l'endomorphisme u).

5. a) Pour tout y réel, montrer : $u(Q_y)(y) \ = \ \dfrac{1}{2n+1}\ \left(\ (y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\ \right)$.

b) Déterminer $\mathrm{tr}\left(u^2\right)$. On pourra calculer $\displaystyle\int_0^1 u(Q_y)(y)\ dy$.

Exercice 20 *(d'après* `E3A 2012 - MP-2`*)*

- Étant donné un entier naturel non nul $n, \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ désigne la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices (n,n) à coefficients dans $\mathbb{C}$.
  On désigne par I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
- Étant donnée une matrice M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$ son polynôme caractéristique.
- Si A, B, C, D sont quatre matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $M_{A,B,C,D}$ la matrice de $M_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par :

$$M_{A,B,C,D} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

1. Soient A, B, C, D, E cinq matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Exprimer la matrice produit $M_{A,B,C,D} \times M_{I_n,E,0_n,I_n}$.

b) On suppose la matrice A inversible. Justifier l'égalité :

$$\det M_{A,B,C,D} = \det(A)\ \det\left(D - CA^{-1}B\right)$$

2. On suppose que les matrices A et C commutent.

a) On suppose que la matrice A est inversible.
Démontrer : $\det\left(\ M_{A,B,C,D}\ \right) = \det(AD - CB)$.

b) On ne suppose plus la matrice A inversible.

(i) Démontrer qu'il existe des matrices U et V dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que le polynôme caractéristique de la matrice $M_{A,B,C,D}$ vérifie :

$$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det\left(\lambda^2 I_n + \lambda U + V\right)$$

Expliciter U et V en fonction des matrices A, B, C et D.

(ii) En déduire que $\det M_{A,B,C,D} = \det(AD - CB)$.

3. Dans cette partie, on suppose que $A = D = I_n$ et que C et B sont deux matrices à coefficients réels transposées l'une de l'autre.

On désigne la matrice $M_{I_n,B,{}^tB,I_n}$ par S.

a) Justifier que ${}^tBB$ est une matrice symétrique positive et que ses valeurs propres sont toutes des nombres réels positifs ou nuls.

b) Exprimer le polynôme χ_S en fonction du polynôme $\chi_{{}^tBB}$.

c) Soit T une matrice symétrique dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que T est définie positive (c'est-à-dire tout vecteur non nul X de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^tXTX > 0$) si et seulement si les valeurs propres de T sont toutes > 0.

d) En déduire que la matrice S est symétrique définie positive si et seulement si les valeurs propres de la matrice ${}^tBB$ sont toutes < 1.

4. On considère la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & -2 \end{pmatrix} \text{ et pour } n > 1, A_n = \begin{pmatrix} 2A_{n-1} & iA_{n-1} \\ iA_{n-1} & -2A_{n-1} \end{pmatrix}$$

a) Soit $n > 1$. Déterminer une relation de récurrence entre $\det A_n$ et $\det A_{n-1}$.

b) Soit $n \geqslant 1$. Exprimer $\det A_n$ en fonction de n.

c) Soit $n > 1$. Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice A_n, χ_{A_n}, en fonction de $\chi_{A_{n-1}}$ et $\chi_{(-A_{n-1})}$.

d) Soit $n \geqslant 1$. Déterminer les valeurs propres de la matrice A_n.

Exercice 21 *(d'après* `E3A 2016 - PSI-1`*)*

- Dans tout l'exercice n est un entier naturel.

Préliminaires

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Le sous-espace $\mathrm{Im}(u)$ est-il stable par l'endomorphisme u ?
Justifiez votre réponse.

2. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ défini dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E par :

$$u(e_1) = e_3,\ u(e_2) = e_4,\ u(e_3) = u(e_4) = 0$$

a) Déterminer $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{rg}(u)$. A-t-on $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$?

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

c) Ecrire dans une base de $\mathrm{Im}(u)$ la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.
Que peut-on dire de la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

4. On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres distinctes. Donner, en le justifiant, l'ordre de multiplicité de chacune de ces valeurs propres dans le polynôme caractéristique.

Exercice

- On identifie le vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ et la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique.
- On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $(X|Y) = {}^tXY$.
- M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on choisit un vecteur non nul $V_k \in E_k = \mathrm{Ker}(M - \lambda_k I_n)$.

5. Montrer que ${}^tM$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et admet les mêmes valeurs propres que M.

On choisit alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ un vecteur W_k non nul de $\mathrm{Ker}({}^tM - \lambda_k I_n)$.

6. Prouver que $\forall i \neq j,\ {}^tV_i\ W_j = 0$.

7. Démontrer que $\forall i,\ {}^tV_i\ W_i \neq 0$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $B_k = \dfrac{1}{{}^tV_k\ W_k}\ (V_k{}^t\ W_k)$.

8. <u>Exemple</u> : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que A possède deux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Déterminer les matrices $B_1 + B_2$ et $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$.

9. **On revient au cas général**
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer le rang de B_k.
Calculer B_k^2.
La matrice B_k est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

10. Déterminer $P = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k$ et $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\ B_k$.

11. Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer $G_r = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k)^r\ B_k$.

Exercice 22 *(d'après* `E3A 2015 - PSI-2`*)*

Dans tout le problème :

- × E est un espace euclidien de dimension $p \geqslant 1$ dans lequel le produit scalaire sera noté $(.|.)$ et la norme associée $\|.\|$.
- × $\mathscr{S}(E)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques de E.
- × $T(E)$ désigne l'ensemble des éléments u de $\mathscr{S}(E)$ de rang inférieur ou égal à 1 et qui vérifient :

$$\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geqslant 0$$

Préliminaires

1. Justifier que $T(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

2. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on notera $\mathrm{tr}(M)$ sa trace.
Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2$.

- ***a)*** Prouver : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- ***b)*** On suppose que B est semblable à A. Comparer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(B)$.
- ***c)*** Donner la définition de la trace d'un endomorphisme de E.

3. Rappeler la définition d'un hyperplan de E.

On se donne alors un tel hyperplan H et on note G son complémentaire dans E.

Déterminer (en justifiant) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

- ***(i)*** G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de H.
- ***(ii)*** Pour tout vecteur a de G, $\mathrm{Vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.
- ***(iii)*** Pour tout vecteur a non nul et orthogonal à H, $\mathrm{Vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.
- ***(iv)*** Le noyau de l'application tr est un hyperplan de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
- ***(v)*** Un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de E.

4. Montrer que l'application :

$$(f, g) \in \mathscr{S}(E)^2 \mapsto \langle f, g\rangle = \mathrm{tr}(f \circ g)$$

est un produit scalaire.

On notera pour la suite N la norme associée à ce produit scalaire.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé. Donner les éléments propres de la matrice A.

Partie 1

Soit $a \in E$ et u_a l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E,\ u_a(x) = (x|a) \cdot a$$

6. Montrer que $u_a \in T(E)$.

7. On suppose dans cette question que $a \neq 0$.

- ***a)*** Ecrire la matrice de u_a dans une base $\mathscr{B}$ de E constituée du vecteur a et d'une base de $\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.
- ***b)*** Déterminer alors $\mathrm{tr}(u_a)$ et $\mathrm{tr}(u_a \circ u_a)$ en fonction de a.
- ***c)*** Soit f un endomorphisme de E.
Déterminer les éléments diagonaux de la matrice $f \circ u_a$ dans la base $\mathscr{B}$ définie précédemment.
- ***d)*** Calculer alors $\mathrm{tr}(f \circ u_a)$ en fonction de a.

8. Soit $u \in T(E)$, u non nul et b un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$.

- ***a)*** Montrer que b est un vecteur propre de u associé à une valeur propre μ positive.
- ***b)*** Prouver : $\forall x \in E,\ u(x) = \dfrac{\mu}{\|b\|^2}\ (x|b) \cdot b$.
- ***c)*** En déduire que $\mu > 0$.
- ***d)*** Montrer qu'il existe au moins un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

9. L'application $\varphi\ :\ a \in E \mapsto \varphi(a) = u_a \in T(E)$ est-elle injective ? Surjective ?

Partie 2

Pour cette partie du problème, f est un endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ qui est **fixé**. Pour tout vecteur $x \in E$, on pose :

$$\Phi(x) = \left(N(f - u_x) \right)^2 \quad \text{et} \quad m(f) = \inf_{x \in E} \Phi(x)$$

Pour tout vecteur x de E et tout vecteur y de E tel que $\|y\| = 1$, on pose

$$h_x \;:\; t \in \mathbb{R} \mapsto h_x(t) = \Phi(x + ty)$$

10. Justifier l'existence de $m(f)$.

11. Prouver : $\forall x \in E,\ \Phi(x) = \left(N(f) \right)^2 - 2\,(x|f(x)) + \|x\|^4$.

12. Montrer que h_x est une fonction polynomiale dont on précisera les coefficients.

13. justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et de réels $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ f(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p$$

14. Calculer alors $N(f)$ à l'aide des réels λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$.

15. Exprimer $\alpha = \sup\limits_{z \in E, \|z\|=1} (z|f(z))$ à l'aide des λ_i. Déterminer l'ensemble des vecteurs $z \in E$ unitaires tels que $(z|f(z)) = \alpha$.

16. On suppose que $m(f)$ est atteint en $a \in E$.

a) Déterminer $h'_a(0)$.

b) Prouver : $f(a) = \|a\|^2 \cdot a$.

c) Prouver que pour tout réel t et tout vecteur y de norme 1 :

$$\Phi(a + ty) - \Phi(a) = t^2 \left(\left(t + 2\,(y|a)\right)^2 + 2\,\left(\|a\|^2 - (y|f(y))\right) \right)$$

d) Prouver :

$$m(f) = \Phi(a) \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = \|a\|^2 \cdot a \\ \forall y \in E \ \text{ tel que } \ \|y\| = 1,\ (y|f(y)) \leqslant \|a\|^2 \end{cases}$$

17. On suppose que $\lambda_p \leqslant 0$.

a) Prouver que $m(f) = \Phi(a)$ si et seulement si $a = 0$.

b) Déterminer $m(f_A)$ où f_A est l'endomophisme de la question 5 des préliminaires.

18. On suppose que $\lambda_p > 0$.

a) Démontrer : $m(f) = \sum\limits_{i=1}^{p-1} {\lambda_i}^2$.

b) Prouver : $m(f) = \Phi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_p \cdot \mathrm{id}_E) \\ \|x\| = \sqrt{\lambda_p} \end{cases}$.

Partie 3

Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{R}^p$ euclidien usuel.

19. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et telle que

$$\begin{cases} \forall i,j \in [\![1,p]\!]^2,\ m_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p} m_{i,j} = 1 \end{cases}$$

On note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à la matrice M.

a) Prouver que $\lambda = 1$ est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

b) Soit λ une valeur propre de M et $X = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Soit $k \in [\![1,p]\!]$ tel que $|x_k| = \max\,\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$.

En considérant la $k^{\text{ème}}$ ligne du système $MX = \lambda X$, prouver : $|\lambda| \leqslant 1$.

c) Déterminer alors un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(a) = m(f_M)$.
(on ne cherchera pas à calculer la valeur de $m(f_M)$)

d) En déduire l'existence d'un endomorphisme v de $T(E)$ tel que :

$$\left(N(f_M - v) \right)^2 = m(f_M)$$

e) Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme v et donner ses éléments remarquables.

20. Soit $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et f_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé. Calculer $m(f_B)$.
Trouver un vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ tel que $\left(N(f_B - u_b) \right)^2 = m(f_B)$.

21. On prend dans cette question $p > 1$. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$$

et f_C l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé.

a) Déterminer les éléments propres de la matrice C.

b) Calculer $m(f_C)$.

c) Trouver un vecteur c de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(c) = m(f_C)$ et un endomorphisme $w \in T(E)$ tel que $m(f_C) = \left(N(f_C - w) \right)^2$.

d) Cet endomorphisme w est-il unique ?

Exercice 23 *(d'après* `E3A 2013 - PC-2`*)*
Cet exercice a pour but d'étudier la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique réelle définie positive.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :
  - × $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n.
  - × $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, I_n désigne la matrice identité.
  - × $O_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales.
  - × $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques réelles.
  - × Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(f_1, \dots, f_k)$ une famille de vecteurs de E, $\mathrm{Vect}\,(f_1, \dots, f_k)$ désigne le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f_1, \dots, f_k)$.
  - × Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de A et ${}^tA$ la transposée de A.
  - × $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.
    Par définition : $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \ \Leftrightarrow\ A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp(A)} \subset \,]0, +\infty[$.
  - × $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.
  - × $\mathbb{R}^n$ sera identifié à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ensemble des matrices réelles avec n lignes et 1 colonne.
- Lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique : $\|X\|^2 = {}^tXX$.
- Les candidats seront amenés à utiliser le théorème suivant :

> **Théorème d'orthonormalisation de Schmidt :**
>
> Si $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ est un espace préhilbertien réel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de E, alors il existe une unique famille orthonormale $(g_1, \dots, g_p)$ telle que pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$:
>
> $$\mathrm{Vect}\,(f_1, \dots, f_k) = \mathrm{Vect}\,(g_1, \dots, g_k) \ \text{ et } \langle f_k, g_k \rangle > 0$$
>
> La famille $(g_1, \dots, g_p)$ s'appelle alors l'orthonormalisée de Schmidt de $(f_1, \dots, f_p)$.

I. Étude d'un exemple numérique

On considère, dans cette question uniquement, la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Énoncer le théorème qui permet de justifier qu'il existe une matrice $O \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tOSO = D$ où D est une matrice diagonale.

2. Déterminer O et D telles que $\det(O) = 1$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $\alpha < \beta < \gamma$ puis justifier que $S \in \mathscr{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

3. Démontrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathscr{T}_3^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tTT$.
On explicitera la matrice T.

II. Résultats préliminaires :

4. On considère $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer :

$$\varphi_S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & {}^tXSY \end{array} \right. \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n$$

5. Proposition : $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $G\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer cette proposition pour $n = 2$.
Dans la suite, on admettra le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $B = {}^tAA$.

6. Montrer que $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

7. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à λ, alors

$$\|Ax\|^2 = \lambda \|x\|^2 \text{ en déduire que } \lambda \in [0, +\infty[$$

8. En déduire que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

IV. Décomposition de Cholesky

- Le but de cette question est de montrer le théorème suivant :

> Théorème :
>
> $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad$ il existe une unique matrice $T \in \mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$
>
> Cette décomposition s'appelle décomposition de Cholesky de S.

- On considère $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

9. Montrer que s'il existe $T \in \mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$ alors $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

10. On suppose qu'il existe T_1, T_2 deux matrices de $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que :

$${}^tT_1T_1 = {}^tT_2\,T_2$$

a) Montrer que $\Delta = T_I\,(T_2)^{-1}$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. (utiliser II.2))

b) En déduire, en utilisant ${}^tT_1\,T_1 = {}^tT_2\,T_2$, que $\Delta^2 = I_n$.

c) En déduire que $T_1 = T_2$.

11. On suppose $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on considère φ_s le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ défini en II.1). Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $\mathscr{B}$ pour le produit scalaire φ_s.
On note T la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

a) Montrer $T \in \mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $S = {}^tT\,T$.

Exercice 24 *(d'après* `E3A 2022 PSI`*)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.

0_n et I_n sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note enfin $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **Question de cours**

Démontrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la transposition et pour la multiplication matricielle.

* * * * *

Partie 1

2. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.

On considère les matrices par blocs de taille $2n$:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I}_n & -B \\ -A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}, \quad \text{et :} \quad V = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0_n & \lambda \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

a) Calculer UV et VU.

b) Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

3. Justifier que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $M^T M$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

4. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale $R \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^T M = R^T M M^T R$.

Partie 2

On note Δ_n l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice Q dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $Q^T M Q = M^T$. Une telle matrice est dite *orthotransposable*.

On rappelle que si S_n est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si A_n est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n \oplus \mathrm{A}_n$$

5. Montrer que S_n est inclus dans Δ_n.

6. Démontrer que : $\forall A \in \mathrm{A}_n$, $\forall Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $Q^{-1} A Q \in \mathrm{A}_n$.

7. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Prouver qu'il existe une matrice $T \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, une matrice D diagonale et une matrice $A \in \mathrm{A}_n$ telles que :

$$M = T(D + A)T^{-1}$$

8. Cas $n = 2$: on démontre que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*

a) Déterminer **toutes** les matrices **à la fois** orthogonales **et** diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) On considère le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivant :

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Déterminer alors une matrice W orthogonale **et** diagonale telle que :

$$\forall L \in \mathcal{L}, \quad L^T = W^T L W.$$

c) En utilisant la question 7, démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*.

9. On revient au cas général et on suppose à présent que n est impair

Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note : $[A, B] = AB - BA$.

a) Montrer que si $M \in \Delta_n$, alors $\left[M^T, M\right]$ est semblable à son opposée.

b) En déduire que si $M \in \Delta_n$, alors $\det\left(\left[M^T, M\right]\right) = 0$.

Exercice 25 *(d'après* `E3A 2023 PSI`*)*

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée et on rappelle que :

$$\forall (M, N) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2, \; \left(MN\right)^T = N^T M^T$$

L'espace $E = \mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall (X, Y) \in E^2, \quad (X|Y) = X^T Y$$

et, pour tout vecteur X de E, sa norme est notée :

$$\|X\| = \sqrt{X^T X}$$

Soit n un **entier relatif** supérieur ou égal à -1.

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est de type n lorsque $A^T = A^n$.

1. **Quelques exemples**

a) Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 0.

b) Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1.

c) Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type -1.
En donner un exemple différent de la matrice identité lorsque $p=4$.

On suppose désormais que n est supérieur ou égal à 2.

2. **Dans cette question et uniquement dans cette question,** on prend $p=3$ et pour tout réel θ on note :

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

a) Démontrer que l'on a : $\forall m\in\mathbb{N},\ (A(\theta))^m=A(m\theta)$.

b) Déterminer alors l'ensemble des réels θ tels que $A(\theta)$ soit une matrice de type n.

On revient au cas général avec $p\geqslant 3$.

3. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type n.

a) Établir l'égalité : $A^{n^2}=A$.

b) On note $B=A^{n+1}$.

(i) Montrer que $B^n=B$.

(ii) Démontrer que B est une matrice symétrique.

(iii) Prouver que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.
On pourra examiner X^TBX où X est un vecteur bien choisi de E.

(iv) Déterminer les valeurs propres de la matrice B, lorsque B n'est ni la matrice nulle, ni la matrice identité.

(v) Prouver que B est une matrice de projection orthogonale.
On précisera ses éléments caractéristiques.

c) Prouver que $\mathrm{Ker}(B)=\mathrm{Ker}(A)$.

d) Démontrer que $\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Im}(B)$.

e) Prouver que $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

f) Démontrer que l'on a : $\forall X\in\mathrm{Im}(A),\ \|AX\|=\|X\|$.

g) Prouver que si A est de plus inversible, alors A est aussi de type -1.

4. Prouver enfin que si A est à la fois de type n et de type $n+1$, alors A est une matrice de projecteur orthogonal.

Exercice 26 *(d'après* `oraux CCINP MP`)

Soit $\big(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E et $n=\dim(E)$.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x\in E,\ \|u(x)\|=\|x\|$.

a) Démontrer : $\forall(x,y)\in E^2,\ \langle u(x),u(y)\rangle=\langle x,y\rangle$.

b) Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver :

$$u\in\mathrm{O}(E)\quad\Leftrightarrow\quad\text{La famille }\big(u(e_1),u(e_2),\dots,u(e_n)\big)\text{ est une base orthonormée de }E$$

Exercice 27 *(d'après* `E3A 2023 PC`*)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x\,|\,y\rangle$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x. Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x\in E,\varphi_u(x)=2\frac{\langle x\,|\,u\rangle}{\langle u\,|\,u\rangle}\ u-x$$

1. **Étude de l'application φ_u**

a) Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

b) En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.

c) Soit x appartenant à E, calculer $\langle \varphi_u(x) \,|\, \varphi_u(x) \rangle$.

d) En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle \varphi_u(x) \,|\, \varphi_u(y) \rangle = \langle x \,|\, y \rangle$$

e) On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^{\perp}$.

Déterminer l'image de D_u par φ_u.

En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.

Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

2. **Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$**

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

a) Donner la dimension et une base orthonormale de $H^{\perp}$.

b) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

c) Soit v un vecteur unitaire de $H^{\perp}$.

Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. **Étude d'une réciproque**

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall x \in \Delta, \psi(x) = x \text{ et } \forall x \in \Delta^{\perp}, \psi(x) = -x$$

a) Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

b) Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

Exercice 28 *(d'après* `E3A 2024 PSI`*)*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On identifie dans tout l'exercice $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

Pour p et q deux entiers naturels non nuls et pour toute matrice A de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note $A^{\top}$ la matrice de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, transposée de la matrice A.

On rappelle que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X_1 et X_2 de $\mathbb{R}^n$ est : $(X_1 \mid X_2) = X_1^{\top} X_2$ et que $\|X_1\|^2 = X_1^{\top} X_1$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$.

On définit la matrice $M = (m_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \delta_{ij} + \alpha\, x_i x_j + \beta\, y_i y_j$, où α et β sont deux réels et δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ j = i \\ 0 & sinon \end{cases}$.

Enfin, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est M.

1. Justifier que la matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note $U_X = X X^{\top}$.

a) Justifier que $U_X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire son terme général. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer le rang de U_X puis une base de son image.

c) Prouver que $\mathrm{Ker}\,(U_X)$ et $\mathrm{Im}\,(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

d) Prouver que $\mathrm{Ker}\,(U_X)$ et $\mathrm{Im}\,(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

e) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice U_X.

f) On note u_X l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U_X. Déterminer la matrice de u_X dans une base adaptée à la décomposition de la question

3. Dans le cas particulier où $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, déterminer les valeurs propres de la matrice M.

En déduire une matrice diagonale semblable à la matrice M.

4. On revient au cas général et on se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice $M = I_n + \alpha U_X + \beta U_Y$, quelles que soient les valeurs de α et de β.

a) On note $F = \mathrm{Vect}\,(X, Y)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.

(i) Déterminer MX.

(ii) En déduire que F est stable par f.

b) Justifier que $F^{\perp}$ est aussi stable par f et déterminer l'endomorphisme induit par f sur $F^{\perp}$.

c) On note $G = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\|X\|^2 & \alpha\,\langle X \mid Y\rangle \\ \beta\,\langle X \mid Y\rangle & 1 + \beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$.

(i) Justifier que G est la matrice de l'endomorphisme induit sur F par f dans la base (X, Y).

(ii) Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$.

(iii) Justifier, sans calculer ses valeurs propres, que G est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont réelles.

(iv) Déterminer les valeurs propres de G.

d) Déterminer les valeurs propres de la matrice M.