Orthogonal - Norme - Distance

Exercices classiques, méthodes usuelles

I. Espaces vectoriels normés

I.1. Notion de limites, continuité

Exercice 1 (`Oraux CCINP`)
Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.

2. Démontrer : $x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

4. Démontrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

Exercice 2 (`Oraux CCINP`)
E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.
On considère les propositions suivantes :

P1 f est continue en a.

P2 Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions **P1** et **P2** sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice 3 (`Oraux CCINP`)
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$.
On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1 f est continue sur E.

P2 f est continue en 0_E.

P3 $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \big|f(x)\big|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$, définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.
Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 4 (`Oraux CCINP`)
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. ***a)*** Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

b) Montrer que : $A \subset B \ \Rightarrow\ \overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. ***a)*** Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Montrer, à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 5 (`Oraux CCINP`)
Les questions *1.* et *2.* sont indépendantes.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. ***a)*** Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.

b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \ \|x - a\|$.

a) Soit $x \in E$. Prouver : $d_A(x) = 0 \ \Rightarrow\ x \in \overline{A}$.

b) On suppose que A est fermée et : $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1],\ d_A\big(tx+(1-t)y\big) \leqslant t d_A(x)+(1-t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

I.2. Normes

Exercice 6 (`Oraux CCINP`)
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in [0,1]} \ \big|f(x)\big|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 \ \big|f(t)\big| \ dt$.

1. ***a)*** Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E : $N_1(f) \leqslant k\, N_\infty(f)$.

c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

II. Produit scalaire

II.1. Définition

Exercice 7 (`Oraux CCINP`)
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrer : $\displaystyle\int_a^b \ h(x) \ dx = 0 \ \Rightarrow\ h = 0$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall (f, g) \in E^2,\ \langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_a^b \ f(x)\, g(x) \ dx$.
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \ \sqrt{x}\, \mathrm{e}^{-x} \ dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

II.2. Orthogonal

Exercice 8 (`Oraux CCINP`)
On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. *a)* Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n\, y_n$ converge.
On pose alors $\langle x \mid y\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_n$.

b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.
Dans la suite de l'exercice, on admet que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire dans l^2.
On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose : $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
Déterminer $F^\perp$ (au sens de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$).
Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 9 (`Oraux CCINP`)
Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer : $(A^\perp)^\perp = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Démontrer : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Démontrer : $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

II.3. Projeté orthogonal et distance

Exercice 10 (`Oraux CCINP`)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.
On pose : $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle \cdot \mid \cdot \rangle}$.

1. *a)* Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [a,b], f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\, dt \mid f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice 11 (`Oraux CCINP`)
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\langle f \mid g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto sin^2(x)$.

Exercice 12 (`Oraux CCINP`)
On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}(A^T A')$, où $\mathrm{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3. Déterminer la projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 13 (`Oraux CCINP`)
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.
On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose : $\langle A \mid A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

II.4. Isométries

Exercice 14 (`Oraux CCINP`)
Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $\langle x \mid y \rangle$ le produit scalaire de x et de y et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

  a) Démontrer : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$.

  b) Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver : $u \in \mathrm{O}(E) \;\Leftrightarrow\; \big(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

III. Matrices

Exercice 15 (`Oraux CCINP`)
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max\limits_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Démontrer : $\forall (A,B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$, $\|AB\| \leqslant n \, \|A\| \, \|B\|$.
Puis démontrer, pour tout entier $p \geqslant 1$: $\|A^p\| \leqslant n^{p-1} \, \|A\|^p$.

Exercice 16 (`Oraux CCINP`)

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouver : $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

2. Prouver : $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.

3. Prouver : $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \;\Rightarrow\; A^2 B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $A = B^2$.

Exercice 17 (`Oraux CCINP`)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
Une matrice A de E est dite antisymétrique lors que $A^T = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

   a) Prouver : $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

   b) Prouver : $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.