Feuille d'exercices n°15 : Équations différentielles

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = y + 1$
2. $y' = 3y + \mathrm{e}^{3x}$
3. $y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}(1+x)$
4. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
5. $y' = -y + x\,\mathrm{e}^{x}$
6. $y' = 2y + 2x^2 - 1$
7. $y = \dfrac{y}{x^2}$
8. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\,y = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$
9. $y' - \ln(x)\,y = x^x$

Exercice 2
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' + 2y = 3 \\ y(0) = 10 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y' - y = t^2 + 1 \\ y(0) = -3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y' + y = t\,\mathrm{e}^{t} \\ y(1) = -1 \end{cases}$

Exercice 3 (Lemme de Gronwall)
Soient $c \in [0, +\infty[$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a,b[,\ \left|u(x)\right| \ \leqslant\ c + \int_a^x \left|u(t)\right| g(t)\ dt$$

1. On pose $v : x \mapsto c + \displaystyle\int_a^x \left|u(t)\right| g(t)\ dt$ et $w : x \mapsto v(x)\,\exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(t)\ dt\right)$. Montrer que w est décroissante sur I.
2. En déduire : $\forall x \in [a,b]$, $\left|u(x)\right| \leqslant c\,\exp\left(\displaystyle\int_a^x g(t)\ dt\right)$.

Exercice 4
Résoudre, sur $]0,1[$, l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\,y' + x\,y = \frac{1}{x} + x\,\ln(x) - x$$

Exercice 5
Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,(2x - 3t)\ dt \ =\ \frac{x^2}{2}$$

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 6
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{x}$
4. $y'' + 4y' + 4y = 2$
5. $y'' - 2y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$
6. $y'' + y' - 2y = \mathrm{ch}(x)$
7. $y'' - y = |x| + 1$

Exercice 7
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(-1) = 1 \\ y'(-1) = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y'' - 2y = \mathrm{e}^{t} \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y' - 6y' + 3y = t\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 8
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

1. en appliquant les résultats du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

2. en effectuant un changement de variable pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 9
Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)\, f(y) \ = \ \int_{x-y}^{x+y} f(t)\ dt$$

Exercice 10
On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x)\, y'' - y' - xy \ = \ 0 \qquad (E)$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution.

2. Soit y une solution de (E). Déterminer les fonctions $z : x \mapsto y(x)\, \mathrm{e}^{-x}$.

3. Conclure.

Équations fonctionnelles

Exercice 11
Soit f une fonction réelle à valeurs réelles deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) + f(x-y) \ = \ 2\, f(x)\, f(y)$$

1. On commence par étudier la fonction f.

- ***a)*** Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
- ***b)*** Montrer que si $f(0) = 0$, la fonction f est la fonction identiquement nulle.
- ***c)*** Montrer que f est paire et : $f'(0) = 0$.

2. Démontrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f''(x)\, f(y) \ = \ f(x)\, f''(y)$$

3. En déduire que f est soit nulle, soit solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions f satisfaisant l'équation fonctionnelle.

Exercice 12
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) \ = \ x\, f(y) + y\, f(x)$$

Dans toute la suite, f désigne une fonction de $\mathcal{E}$.

1. ***a)*** Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

- ***b)*** Démontrer que la fonction f est impaire.

2. On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

- ***a)*** Montrer que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$x\, f'(x) - f(x) \ = \ k\, x$$

  où k est une constante réelle dépendant de f que l'on précisera.
- ***b)*** Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle précédente.
- ***c)*** En déduire, en fonction de la constante k, la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ***d)*** La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3. On note F la primitive de f qui s'annule en 0.

- ***a)*** Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(xy) \ = \ x^2\, F(y) + \frac{x\, y^2}{2}\ f(x)$$

- ***b)*** En déduire que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Équations différentielles non linéaires

Exercice 13

- Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$.
- On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire) :

$$y' \;=\; ay - by^2 \tag{E}$$

1. Déterminer les équilibres de l'équation logistique.

2. Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.

   a) On pose $z = \dfrac{1}{f}$.

   Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, notée (E').

   b) Résoudre (E').

   c) Conclure quant à l'ensemble des solutions de (E) ne s'annulant pas sur I.

3. Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.
Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

Que remarque-t-on ?

Exercice 14

On considère l'équation différentielle :

$$x\,y' - x\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}} - y \;=\; 0 \qquad (E)$$

Résoudre cette équation différentielle à l'aide du changement de variable
$z : x \mapsto \dfrac{1}{x}\, y(x)$.

Systèmes différentiels dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 15

1. Donner les éléments propres de $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$.

2. Si $A(t)$ est diagonalisable, donner une matrice de passage P telle que $P^{-1}A(t)P$ est diagonale.

3. Résoudre le système différentiel $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$.

Exercice 16

On considère le système différentiel :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 3\,y \\ y' & = & x & - & y \end{array} \right.$$

1. Résoudre le système (S).

2. Trouver les états d'équilibre du système (S).

3. Existe-t-il des trajectoires convergentes ? Si oui, en donner une.

4. Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.

Exercice 17

On considère le système différentiel :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & y \\ y' & = & -2\,x & - & 2\,y \end{array} \right.$$

1. Montrer que les trajectoires de (S) sont convergentes.

2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.

3. Résoudre le système (S).

4. Expliciter une trajectoire non constante qui converge vers l'état d'équilibre $(2,-2)$.

Exercice 18

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + 5\,x'(t) + 4\,x(t) \;=\; 0 \tag{E}$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres que l'on déterminera, puis donner une base de chacun des sous-espaces propres associés.

2. Résoudre l'équation (E).

Exercice 19

On considère le système différentiel :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & 3\,x & - & y \\ y' & = & x & + & y \end{array} \right.$$

1. ***a)*** Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possède une unique valeur propre, que l'on déterminera.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. ***a)*** On pose : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire P que l'on explicitera.

Soient x et y deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Dans la suite de l'exercice, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on pose $Y = P^{-1}X$.

3. ***a)*** En notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, prouver que : $Y' = P^{-1}X'$.

b) En déduire : $X' = AX \;\Leftrightarrow\; Y' = TY$.

4. ***a)*** Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$.

b) En déduire les solutions du système $Y' = TY$.

c) Conclure.

Systèmes différentiels dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Exercice 20

On considère le système différentiel linéaire :

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 2\,y & - & 2\,z \\ y' & = & -4\,x & - & 3\,y & + & 4\,z \\ z' & = & -2\,x & & & + & z \end{array} \right.$$

où x, y et z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Définir une matrice A telle que : $(E) \;\Leftrightarrow\; X' = AX$.

2. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on admet que P est inversible d'inverse :

$$P^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer : $P^{-1}AP = T$, où T est la matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) On pose $Y = P^{-1}X$. Démontrer : $X' = AX \;\Leftrightarrow\; Y' = TY$.

3. ***a)*** Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$: $\varphi' = \varphi$.

b) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$: $\varphi' = -\varphi$.

c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto c\,t\,\mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_3)$: $\varphi' = -\varphi + c\,\mathrm{e}^{-t}$.

4. On note $Y = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$.

Montrer que α est solution de $(\mathcal{E}_1)$, γ est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et β est solution de $(\mathcal{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

5. En déduire que, si $X' = AX$, alors il existe des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & (2\,\lambda_1\,t + \lambda_2 - \lambda_1)\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) & = & 2\,\lambda_1\,\mathrm{e}^{-t} + \lambda_3\,\mathrm{e}^{t} \\ z(t) & = & (2\,\lambda_1\,t + \lambda_2)\,\mathrm{e}^{-t} + \lambda_3\,\mathrm{e}^{t} \end{array}\right.$$

6. En déduire une solution non stationnaire de (S) qui converge vers l'unique état d'équilibre du système (E).

Exercice 21

On considère le système différentiel linéaire :

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 4\,y & - & 4\,z \\ y' & = & 3\,x & + & 2\,y & - & 4\,z \\ z' & = & 3\,x & - & 3\,y & + & z \end{array}\right.$$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution au système (S) vérifiant :

$$X(0) = X_0$$

2. Résoudre le système (S).

3. ***a)*** Déterminer la trajectoire associée à la solution évoquée en question ***1.***

b) Cette trajectoire est-elle ocnvergente ?

Énoncés de concours

Exercice 22 *(d'après* `EPITA 2024`*)*

On considère **dans cette partie et dans la partie IV uniquement** les matrices :

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\-1 & 2 & -1\\3 & -3 & 2\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\-1 & 2 & -1\\1 & -1 & 3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Calculer AX_1, AX_2 et AX_3.

2. Soit $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. En déduire une matrice $P_A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P_A\,D\,P_A^{-1}$.

3. Déterminer P_A^{-1}.

4. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A\,X(t)$.

5. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A\,X(t)$.

6. Démontrer : $\chi_B(X) = (X-1)\,(X-2)^2$.

7. B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? On justifiera sa réponse.

8. Déterminer $P_B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $B = P_B\,T\,P_B^{-1}$.

9. Résoudre le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = T\,X(t)$.

10. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ du système différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = B\,X(t)$$

Exercice 23 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base des vecteurs propres associés.

2 On considère le système différentiel $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2\,z \\ y' & = & y \\ z' & = & 2\,x + z \end{array} \right.$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la question ***1.*** et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice 24 *(d'après* `E3A 2019 - PSI-2`*)*

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.

a) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction : $g = f + f' + f''$.

b) Résoudre l'équation (E_2).

c) En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1).

2. Soit (S) le système différentiel à coefficients constants $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

b) Résoudre le système (S).

c) Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question **1.3.** de cette partie.

3. On considère la série entière réelle $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
On note alors, lorsque cela existe, $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

b) Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer les développements en série entière de φ', φ'', $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

d) En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

e) Déterminer une expression de $\psi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

f) Déterminer une expression de $\theta(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{6n}}{(6n)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

- Dans la suite du problème :
  - × toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
  - × n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 ;
  - × $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est un élément de $\mathbb{K}^n$ et :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

- En outre, lorsque $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on note : $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ qui est donc un élément de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

- Notons :
  - × (E_α) l'équation différentielle linéaire : $y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, y^{(k)}$;
  - × $\mathscr{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{K}) \;\middle|\; f^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, f^{(k)} \right\}$.

4. ***a)*** Écrire l'équation différentielle (E_α) à l'aide d'un système différentiel.

b) Montrer que si $y \in \mathscr{S}_\alpha$, alors $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

c) Prouver que $\mathscr{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

d) Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_\alpha$.

On prend jusqu'à la fin de cette partie : $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5. Écrire l'équation (E_α) dans ce cas.

6. Déterminer tous les nombres complexes r pour lesquels la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{r\,x}$ appartient à $\mathscr{S}_\alpha$.

7. Donner une base de $\mathscr{S}_\alpha$.

8. Soit d l'application qui à $y \in \mathscr{S}_\alpha$ associe $d(y) = y'$.

a) Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathscr{S}_\alpha$.

b) L'endomorphisme d est-il bijectif ?

c) L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

Exercice 25 *(d'après* `CCINP 2015 - PSI`*)*

1. **L'intégrale de Gauss**

a) Montrer que l'intégrale de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est convergente sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ dt \right)^2,\ G(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2\,(t^2+1)}}{t^2+1}\ dt$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, puis préciser les dérivées d'ordre 1 de F et de G.

c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F'(x) + G'(x) = 0$$

et en déduire la valeur de $F + G$.

d) Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

e) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. **Les fonctions u et v**

a) Montrer que les fonctions :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\ \cos(t\,x)}{\sqrt{x}}\ dx \quad \text{et} \quad v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\ \sin(t\,x)}{\sqrt{x}}\ dx$$

sont bien définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $w = u + iv$ est solution d'une équation différentielle, puis en déduire que :

$$X(t) \ = \ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

est solution d'un système différentiel du premier ordre

$$X'(t) \ = \ A(t)\,X(t) \qquad (E_1)$$

où la fonction matricielle $A : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est à déterminer.

c) Déterminer, pour tout réel t, les valeurs propres complexes et les sous-espaces propres de $A(t)$.

d) Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{C}$ du système (E_1) et en déduire la solution générale de (E_1).

e) Calculer $u(0)$, $v(0)$ et en déduire l'expression réelle de u et v.

Exercice 26 *(d'après* `CCINP 2019 - PC`*)*

Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3 \tag{E}$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in\,]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in\,]-r, r[$:

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\left(a_n - a_{n-1}\right)x^n$$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in\,]-1, 1[,\ f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda x}{(1-x)} \end{array}$$

est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.

On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I,\ z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ y(x)$$

6. Justifier que z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.

7. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x \tag{E_1}$$

8. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$$

9. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I.

Partie III - Solutions de (E) sur $]0, +\infty[$

10. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 27 *(d'après* `CCINP 2016 - MP-1`*)*

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2\, y'' + (x^2 - x)\, y' + 2\, y = 0$.

Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

Exercice 28 *(d'après* `CCINP 2024 - MPI-1`*)*

- On considère les équations différentielles :

  $(E) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right) y = 1$

  $(H) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right) y = 0$

- On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

1. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

2. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2}$$

3. On note pour $x \in I$, $g(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x^2}$.

On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.

Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

4. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$) ?

Exercice 29 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Énoncer le théorème sous le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

b) Résoudre (E).

Exercice 30 *(d'après* `CCINP 2018 - PSI`*)*

1. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.

Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

2. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)\,s + b = 0 \qquad (1)$$

3. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières $m_1, m_2 \in [\![0, n]\!]$.

4. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

5. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \qquad (2)$$

où a et b sont des constantes réelles.

6. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

7. Montrer que si y est une solution de (2) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u\,y'' + (a-1)\,u' + b\,u = 0 \qquad (3)$$

8. Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I.

9. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I.

On suppose dans les deux questions suivantes uniquement que $a = 1$ et $b = -4$.

10. Montrer que si y est solution de (2) sur J, alors $h = y\circ(-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

11. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Partie III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \tag{4}$$

12. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4)

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k\, x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

13. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2} \end{cases}$$

14. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière obtenue : $\sum_{k\geqslant 0} c_k\, x^k$.

15. Soit $r > 0$ et soit f une autre solution de (4) sur $]0, r[$.

Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k\, x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k\, x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1$$

16. Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

17. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}$$

18. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$$

On pourra raisonner par récurrence.

19. Que peut-on dire du rayon de convergence R_β de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

20. Soit $r > 0$ et soit λ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, r[$.

Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto x\, J_0^2(x)\, \lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

21. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

22. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

23. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.

Exercice 31 *(d'après* `CCINP 2018 - PC`*)*

- On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
- Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée $n^{\text{ème}}$.
- On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \phi(P) \ = \ (X^2-1)\,P'' + 2XP'$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\ U_n^{(n)}$.

- Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.
- On admet dans la suite du problème :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

et on considère la série entière de la variable t : $\sum L_n(x)t^n$.
On note r la racine positive du polynôme X^2-2X-1.

1. Montrer : $\forall x \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N}, |L_n(x)| \leqslant r^n$.

On pourra raisonner par récurrence et utiliser la relation admise au début de cette partie.

2. Pour $x \in [-1,1]$, on note $R(x)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum L_n(x)t^n$. Montrer que : $R(x) \geqslant \dfrac{1}{r}$.

3. Pour $x \in [-1,1]$ et $t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$, on pose $S_x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$.

Montrer que S_x est solution sur $\left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $\left(1-2tx+t^2\right)\, y' + (t-x)y = 0$.

4. En déduire : $\forall x \in [-1,1],\ \forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}}$.

5. Indiquer une méthode permettant, à partir du seul résultat de la question 4, de retrouver l'expression des polynômes L_0, L_1 et L_2.

Exercice 32 *(d'après* `CCINP 2017 - PSI`*)*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ soit bornée.

1. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$ puis $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ sont convergentes et :

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt - \frac{F(a)}{a}$$

2. Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ sont convergentes et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$$

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ soit absolument convergente.

3. Montrer que la fonction :

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. On suppose de plus que la fonction f est bornée.

Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5. Soit $f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{E}$$

sur $]0,+\infty[$.

b) On cherche une solution particulière de $(\mathbf{E})$ de la forme :

$$x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$$

où les fonctions α et β sont de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifient :

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$$

Montrer que l'on peut prendre :

$$\alpha(x) = \int_x^{+\infty} f_1(t)\, dt \quad \text{et} \quad \beta(x) = \int_x^{+\infty} f_2(t)\, dt$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$ est une solution de l'équation $(\mathbf{E})$ sur $\left]0,+\infty\right[$.

d) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$

6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$

7. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. En déduire :

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

8. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 33 *(d'après* `Centrale 2022 - PSI-2`*)*

- Pour $p \in \mathbb{R}^*$ on note (E_p) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(E_p) : x\left(y'' - y'\right) + py = 0$$

1. Soient $p \in \mathbb{R}^*$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence infini. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E_p) si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n \end{cases}$$

IV.A - Recherche de solutions polynomiales

2. Montrer que (E_p) possède des solutions polynomiales non identiquement nulles si et seulement si $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'alors, les solutions polynomiales non nulles de (E_p) sont de degré p et appartiennent à l'espace vectoriel E.

On ne demande pas de déterminer explicitement les solutions polynomiales lorsqu'elles existent.

- Dans la suite de cette sous-partie, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ soit solution de l'équation (E_p). L'objectif est de déterminer une expression simple de P en fonction du paramètre p. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $h(x) = \mathrm{e}^{-x}P(x)$.

3. Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle $x\ (y'' + y') + py = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Justifier que la fonction h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On note $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière de h. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. On peut montrer, de la même façon qu'à la question ***1*** (cette démonstration n'est pas demandée), que ces coefficients vérifient

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n(n+1)b_{n+1} = -(n+p)b_n \end{cases}$$

5. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(n+p-1)!}{p!n!(n-1)!}\, b_1$.

6. On pose $g_p(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}$. Justifier que $g_p^{(p)}$ est développable en série entière et déduire de la question 5 que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = Cx\ \mathrm{e}^x\ g_p^{(p)}(x)$$

où C est une constante réelle dont on précisera l'expression en fonction de b_1 et de p.

IV.B - Solutions développables en séries entières non polynomiales

- Dans toute cette sous-partie, on fixe un réel $p \neq 0$ et on suppose que $p \notin \mathbb{N}^*$.

7. Justifier l'existence de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non identiquement nulles telles que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence infini et telles que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E_p).

On fixe une telle série entière et on pose pour $x > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

8. Montrer qu'il existe un entier naturel $q > p$ tel que, pour tout entier $n \geqslant q$,

$$|a_{n+1}| \geqslant \frac{|a_n|}{2(n+1)}$$

9. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant q$, $|\,a_n\,| \ \geqslant\ \dfrac{q!\ |\,a_q\,|}{2^{n-q}n!}$.

10. Montrer que la fonction $\psi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=q}^{+\infty} |a_n|\ x^n \end{array}\right.$ n'est pas un élément de E.

11. En déduire enfin que la fonction f n'est pas un élément de E.

Exercice 34 *(d'après* `Centrale 2019 - PSI-1`*)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $f_\alpha : x \mapsto (1-x)^{-\alpha}$.

1. Préciser le domaine de définition D de f_α. Justifier que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et donner une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f_α sur D.

2. Énoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre et démontrer que, pour tout $x \in\,]-1,1[$:

$$f_\alpha(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\ \frac{x^n}{n!}$$

3. Rappeler la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et énoncer le théorème qui s'y rapporte.

4. En déduire que, pour tout entier n et tous réels α et β :

$$L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ L_k(\alpha)\ L_{n-k}(\beta)$$

Exercice 35 *(d'après* `Centrale 2020 - PSI-2`*)*

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1,+\infty[$ sur l'intervalle $\left[-\mathrm{e}^{-1},+\infty\right[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}, W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1,+\infty[$).

On définit une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ en posant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}$$

On définit, lorsque c'est possible, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n$.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

3. Justifier que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

4. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R,R]$.

5. Démontrer que :

$$\forall x \in\,]-R,R[,\ x\,(1+S(x))\,S'(x) = S(x)$$

On pourra utiliser le résultat suivant (qu'on ne demande pas de démontrer) :

$$\forall (a,y)\in\mathbb{C}^2,\ n\,y^{n-1} \;=\; \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\big(-k\,a\big)^{k-1}\,\big(y+ka\big)^{n-k}$$

On considère la fonction $h : \left|\begin{array}{ccc}]-R,R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & S(x)\mathrm{e}^{S(x)} \end{array}\right.$

6. Démontrer que h est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle :

$$xy' - y = 0$$

7. Résoudre l'équation différentielle $xy'-y=0$ sur chacun des intervalles $]0,R[$, $]-R,0[$ puis sur l'intervalle $]-R,R[$.

8. En déduire : $\forall x\in\,]-R,R[,\ S(x) = W(x)$.

9. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R,R]$?

Exercice 36 *(d'après* `CCINP 2011 - MP`*)*

On considère l'équation différentielle (E) : $2\,xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1. Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Exercice 37 *(d'après* `CNM 2022 - MP-1`*)*

Pour tout $(\alpha,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, on pose $\binom{\alpha}{n} = 1$ si $n=0$, et, si $n\geqslant 1$:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-n+1)}{n!}$$

On considère un nombre réel α, qui n'est pas un entier naturel, et on note f_α la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x > -1,\ f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

1. Vérifier que la fonction f_α est solution sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(1+x)\,y' - \alpha y = 0 \tag{1}$$

2. On se propose de chercher les solutions de l'équation différentielle (1) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Pour cela, on considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\,z^n$ de rayon de convergence $R>0$ et on suppose que sa somme, notée $\psi : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$, est solution de (1) sur l'intervalle $]-r,r[$, avec $r=\min(R,1)$.

a) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)\,a_{n+1} = (\alpha-n)\,a_n$.

b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = \binom{\alpha}{n} a_0$.

c) Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0=1$, puis vérifier que sa somme est bien solution de (1) sur l'intervalle $]-\rho,\rho[$.

3. Montrer soigneusement que pour tout $x\in\,]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}\,x^n$.

On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $b_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\,dt = \int_0^1 \binom{t}{n}\,dt$$

4. Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$ et tout entier naturel n, $\left|\binom{t}{n}\right| \leqslant 1$.

Que peut-on en déduire ?

5. Soit $x \in]-1,1[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1],\ u_n(t) = \binom{t}{n} x^n$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur le segment $[0,1]$.

b) En déduire :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

Exercice 38 *(d'après* `Centrale 2024 - PSI-1`*)*

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$xy'' + y' + xy \ = \ 0 \tag{II.1}$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de II.1 sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Démontrer qu'il existe une unique solution développable en série entière, notée S, telle que $S(0) = 1$.

On définit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) \ = \ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,dt$.

3. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que G est solution de II. 1 sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que $G = S$.

Exercice 39 *(d'après* `E3A 2022 MP`*)*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ.

b) Démontrer que pour tout $x \in \Delta$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

c) On admet que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Calculer $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\exp\left(-t^2\right)\,dt$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) En utilisant la question 1 calculer I_n.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela est possible :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp\left(-t^2\right)\,dt$$

a) Donner le développement en série entière de la fonction cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.

b) Justifier que H est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question **3.b)** par une autre méthode.

a) Démontrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

c) Retrouver l'expression de H obtenue à la question **3.b)**

Exercice 40 *(d'après* `CNM 2018 - MP-1`*)*

- Si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et φ, ψ deux fonctions réelles définies et continues sur I, on note $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$ l'équation différentielle :

$$y'' + \varphi y' + \psi y = 0 \qquad (\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$$

- Si φ est la fonction nulle, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$ se notera simplement $(\mathcal{E}_{\psi})$.
- Dans cette partie, n désigne un entier naturel.
  On note $(\mathscr{B}_n)$ l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 \qquad (\mathscr{B}_n)$$

- On note également σ_n la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, par :

$$\sigma_n(t) = 1 + \frac{1 - 4n^2}{4t^2}$$

1. Soit u une solution, non identiquement nulle, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathscr{B}_n)$. On note v la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par :

$$\forall t > 0,\ v(t) = \sqrt{t}\ u(t)$$

Montrer que la fonction v est une solution, non identiquement nulle, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{\sigma_n})$.

2. Si $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k z^k$ est une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$, on pose :

$$\forall t \in\ ]-R, R[,\ y_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\ t^{n+k}$$

et on suppose que y_n est solution, sur l'intervalle $]-R, R[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{B}_n)$.

a) Montrer : $a_1 = 0$ et : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+2)(2n+k+2)\ a_{k+2} + a_k = 0$.

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k} = a_0\, n!\ \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}\, k!\,(n+k)!}$.

3. Calculer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!\,(n+k)!}\ z^k \quad \text{et} \quad \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,k!\,(n+k)!}\ z^{2k}$$

4. Justifier que la fonction de Bessel d'indice n, notée J_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,k!\,(n+k)!}\ t^{2k}$$

est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\mathscr{B}_n$.

Exercice 41 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit l'équation différentielle : $x\,(x-1)\ y'' + 3\,x\ y' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2. Est-ce que toutes les solutions de $x\,(x-1)\ y'' + 3\,x\ y' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

Exercice 42 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \big(\cos(x)\big)^4$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \big(\cos(x)\big)^3$ en utilisant la méthode de variation des constantes.