Feuille d'exercices n°9 : Espaces vectoriels préhilbertiens réels

Exercice 1

- L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.
- On pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = y - z + t = 0\}$.

1. Déterminer la dimension et une base orthonormale de F. $F^\perp$.

2. Déterminer les matrices, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 2

Soient $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.
Déterminer la distance de M à E.

Exercice 3

- Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que les sous-espaces $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E, et exprimer la distance d'une matrice M à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ en fonction de M et ${}^tM$.

2. Soit H l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle. Calculer la distance d'une matrice M à H.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.

Exercice 5

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

Exercice 6

Sur $\mathbb{R}_n[X]$ on définit l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer que c'est un produit scalaire.

2. Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa dimension. Calculer $\mathrm{d}(1, E)$.

Exercice 7

Soit $E = \mathscr{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que la formule :

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 (fg + f'g')$$

définit un produit scalaire sur E.

2. On considère les sous-espaces $V = \{f \in E \mid f'' = f\}$ et $W = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ de E.

a) Soient $f \in V$ et $g \in E$. Montrer que $\langle f|g\rangle = f'(1)\, g(1) - f'(0)\, g(0)$.
En déduire que V et W sont supplémentaires orthogonaux relativement à $\langle \cdot|\cdot \rangle$.

b) Montrer que les fonctions exp et $\dfrac{1}{\exp}$ forment une base orthogonale de V.
En déduire une expression explicite de la projection orthogonale sur V.

Exercice 8

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ pour que la formule : $\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\ Q(a_k)$ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

2. Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$.
Déterminer $F^\perp$ et calculer la distance de X^n à F.

Exercice 9

Soient u et v deux vecteurs distincts d'un espace euclidien E.

1. Montrer que s'il existe une symétrie orthogonale s échangeant u et v, alors $\|u\| = \|v\|$.

2. Montrer la réciproque, et expliciter une telle symétrie orthogonale s en fonction de u et v.

Généralités

Exercice 10

Soient E un espace préhilbertien réel, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, et $x \in E$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$, alors : $\forall y \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n - x|y\rangle = 0$.

2. Montrer que la réciproque est vraie si E est de dimension finie, mais fausse en général.

Exercice 11

- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
- On considère $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|a\| = 1$
  et on pose $A = (a_i a_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à A est un projecteur orthogonal.

2. Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $2A - I_n$.

Exercice 12

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$$

1. Montrer que pour tout couple $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E, et que la matrice de u dans toute base orthonormale de E est antisymétrique.

Exercice 13

On considère une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!],\ i \neq j\ \Rightarrow\ \langle e_i|e_j\rangle < 0$$

Une telle famille est dite *strictement obtusangle.*

1. Trouver une telle famille lorsque $n = 2$ et $p = 3$.

2. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^p$.
On pose $x = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{p} |x_k| \cdot e_k$. Montrer : $\|x\| \geqslant \|y\|$.

3. Montrer que si $x = 0$, alors soit tous les x_k sont nuls, soit tous les x_k sont non nuls.

4. Montrer : $p \leqslant n + 1$.

Exercice 14

- Soit E un espace euclidien.
- Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
- Pour tout $f \in (E)$, on pose $\alpha(f) = \mathrm{tr}({}^tMM)$, où $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1. Montrer que $\alpha(f)$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

2. Soit p un projecteur de E.
Montrer que $\alpha(p) \geqslant \mathrm{rg}(p)$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 15

On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rcccccl} \varphi & : & \mathbb{R}[X] & \times & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P & , & Q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,Q(x)\ \mathrm{e}^{-x^2}\ dx \end{array}$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = H_n(x)\ \mathrm{e}^{-x^2}$$

b. Montrer que H_n est de degré n, et est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ si $n \geqslant 1$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

- Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E.

Montrer : p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 17

- Soit E un espace euclidien.
- Pour une famille $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$, on note $G(u_1, \dots, u_p) = (\langle u_i \mid u_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ la *matrice de Gram* de la famille $(u_1, \dots, u_p)$.

1. Soit M la matrice des coordonnées de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans une base orthonormale de E. Montrer que $G(u_1, \dots, u_p) = {}^tMM$.

2. Montrer que $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{rg}(G(u_1, \dots, u_p))$.

3. Montrer que $\det(G(u_1, \dots, u_p))$ n'est pas modifié si l'on ajoute à l'un des vecteurs de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

4. Soient $x \in E$ et $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p)$.
Montrer que $\det\big(G(x, u_1, \dots, u_p)\big) = \mathrm{d}(x, F)^2 \times \det\big(G(u_1, \dots, u_p)\big)$.

Énoncés de concours

Exercice 18 *(d'après* `CCINP 2015 - MP1`*)*

- Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.
- On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a, b]$: si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui conerge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_a^b x^k\, f(x)\ dx = 0$.

1. Si P est une fonction polynomiale, que vaut l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(x)\, f(x)\ dx$?

2. ***a)***
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Soit (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur I.
- Soit f est une fonction bornée sur I.

Démontrer que la suite de fonctions $(f \times g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $f \times g$.

b) Démontrer alors, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle.

3. **Application**

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple (f, g) d'éléments de E par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\ dx$$

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a, b]$ et $F^\perp$ l'orthogonal de F.

a) Déterminer $F^\perp$.

b) A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

Exercice 19 *(d'après* `EDHEC S 2019`*)*

- Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
- On se place dans un espace euclidien E de dimension n.
  On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
- Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E
Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté $u^\star$, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^\star(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

1. ***a)*** Montrer que si $u^\star$ existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle\ e_i$$

b) En déduire que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.

2. ***a)*** Vérifier que l'application $u^\star$ définie par l'égalité établie à la question ***1.a)*** est effectivement un endomorphisme de E.

b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux
On dit que u est un endomorphisme normale quand on a l'égalité :

$$u \circ u^\star = u^\star \circ u$$

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(u^\star)$.

5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.

6. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.

a) Montrer que E_λ est stable par $u^\star$.

b) Établir que $(u^\star)^\star = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Exercice 20 *(d'après* `CCINP 2019 - MP2`*)*

- Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- Pour tout $x \in E$, on note : $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$$

est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Étant donné un endomorphisme u de E, on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle\ =\ \langle x, v(y)\rangle$$

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $u \circ v = v \circ u$

(ii) $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle\ =\ \langle v(x), v(y)\rangle$

(iii) $\forall x \in E,\ \|\,u(x)\,\|\ =\ \|\,v(x)\,\|$.

(on pourra par exemple, successivement prouver les implications : (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (i))

Exercice 21 *(d'après* `EDHEC S 2018`*)*

- On désigne par n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
- On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$.
- Le produit scalaire canonique des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$ est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme du vecteur x est notée $\|x\|$.

1. • Dans cette question, on considère n vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^p$, tous de norme égale à 1.

- À tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on associe le vecteur $w_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot u_k$.
- On se propose de montrer qu'il existe des n-uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dont les coordonnées sont éléments de $\{-1, 1\}$, pour lesquels $\|w_x\| \leqslant \sqrt{n}$ et d'autres pour lesquels $\|w_x\| \geqslant \sqrt{n}$.
- À cet effet, on considère n variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \dots, X_n$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, et telles que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on ait :

$$\mathbb{P}\big(\{X_k = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_k = -1\}\big) = \frac{1}{2}$$

- On considère l'application X suivante :

$$\begin{array}{rccl} X & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(\omega) \cdot u_k \right\|^2 \end{array}$$

- On admet que X est une variable aléatoire réelle définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Calculer, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $\mathbb{E}(X_i X_j)$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

2. • Dans cette question, on considère n réels $p_1, p_2, \dots, p_n$, tous éléments de $]0, 1[$, ainsi que n vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^p$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \|v_k\| \leqslant 1$$

- On pose $z = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \cdot v_k$ et on se propose de montrer qu'il existe un n-uplet $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dont les coordonnées sont dans $\{0, 1\}$, tel que, en notant $y_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k$, on ait :

$$\|z - y_x\| \ \leqslant \ \frac{\sqrt{n}}{2}$$

- À cet effet, on considère n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, et telles que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$.
- On considère l'application Y suivante :

$$\begin{array}{rccl} Y & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} (p_k - Y_k(\omega)) \cdot v_k \right\|^2 \end{array}$$

- On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Calculer, pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $\mathbb{E}\Big((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\Big)$.

b) Justifier que Y possède une espérance et montrer :

$$\mathbb{E}(Y) \leqslant \frac{n}{4}$$

c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

Exercice 22 *(d'après* `EDHEC S 2021`*)*

- On considère un espace euclidien E pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y\rangle$, tandis que la norme du vecteur x est notée $\|x\|$. Le vecteur nul de E est noté 0_E.
- On considère aussi un endomorphisme f de E, différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$$

1. Montrer que : $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = 0$.

2. Établir l'égalité : $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.

3. On pose $s = f \circ f$. Montrer que s est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}_-$.

4. On note g l'application qui à tout vecteur x de $\operatorname{Im}(f)$ associe $g(x) = f(x)$ et on pose $t = g \circ g$.

a) Montrer que g est un endomorphisme antisymétrique de $\operatorname{Im}(f)$.

b) En déduire que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_-^*$.

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre λ de t et on note $E_\lambda(t)$ le sous-espace propre de t associé à cette valeur propre.

5. On considère un vecteur e_1 non nul de $E_\lambda(t)$.

a) Montrer que $(e_1, g(e_1))$ est une famille d'éléments de $E_\lambda(t)$, orthogonale et libre.

b) En déduire, en considérant l'orthogonal F_2 de $\operatorname{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$, que la dimension de $E_\lambda(t)$ est paire et qu'il existe un entier naturel p non nul, ainsi que p vecteurs e_1, e_2, ..., e_p de $E_\lambda(t)$, tels que $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_p, g(e_p))$ soit une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

Exercice 23 *(d'après* `CCINP 2021 - MP2`*)*

- Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.
- On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique définit par :

$$\forall (A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left({}^t AB\right)$$

Déterminer $\left(\mathscr{D}_n(\mathbb{R})\right)^\perp$, l'orthogonal de $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

Exercice 24 *(d'après* `CCINP 2018 - MP2`*)*

- On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1, 1]$ et à valeurs réelles.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$$

2. On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$, et $F = \operatorname{Vect}(u, v)$. Déterminer une base orthonormée de F.

3. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \mapsto \mathrm{e}^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\int_{-1}^{1} \left(\mathrm{e}^t - (a + b\,t)\right)^2 dt\right)$$

On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.

Exercice 25 *(d'après* `E3A 2024 PSI`*)*

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On identifie dans tout l'exercice $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.
- Pour p et q deux entiers naturels non nuls et pour toute matrice A de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ la matrice de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, transposée de la matrice A.
- On rappelle que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X_1 et X_2 de $\mathbb{R}^n$ est : $\langle X_1 \mid X_2 \rangle = X_1^\top X_2$ et que $\|X_1\|^2 = X_1^\top X_1$.
- Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$.
- On définit la matrice $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} = \delta_{ij} + \alpha\, x_i x_j + \beta\, y_i y_j$$

où α et β sont deux réels et δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ j = i \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- Enfin, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est M.

1. Justifier que la matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note $U_X = XX^\top$.

a) Justifier que $U_X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire son terme général.
Cette matrice est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer le rang de U_X puis une base de son image.

c) Prouver que $\operatorname{Ker}(U_X)$ et $\operatorname{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

d) Prouver que $\operatorname{Ker}(U_X)$ et $\operatorname{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

e) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice U_X.

f) On note u_X l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U_X. Déterminer la matrice de u_X dans une base adaptée à la décomposition de la question

3. Dans le cas particulier où $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, déterminer les valeurs propres de la matrice M.

En déduire une matrice diagonale semblable à la matrice M.

4. On revient au cas général et on se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice $M = I_n + \alpha U_X + \beta U_Y$, quelles que soient les valeurs de α et de β.

a) On note $F = \operatorname{Vect}(X, Y)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.

(i) Déterminer MX.

(ii) En déduire que F est stable par f.

b) Justifier que $F^\perp$ est aussi stable par f et déterminer l'endomorphisme induit par f sur $F^\perp$.

c) On note $G = \begin{pmatrix} 1+\alpha\|X\|^2 & \alpha\langle X \mid Y\rangle \\ \beta\langle X \mid Y\rangle & 1+\beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$.

(i) Justifier que G est la matrice de l'endomorphisme induit sur F par f dans la base (X, Y).

(ii) Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

(iii) Justifier, sans calculer ses valeurs propres, que G est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont réelles.

(iv) Déterminer les valeurs propres de G.

d) Déterminer les valeurs propres de la matrice M.

Exercice 26 *(d'après* `E3A 2024 PC`*)*

- Soit n un entier naturel non nul.
- On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de E.
- Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2, on pose $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
- Soit L l'application définie sur E par : $\forall P \in E, L(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, dt$.

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E.

2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

4. Prouver qu'il existe une base $\mathscr{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.

5. Montrer :

a) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,

b) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X$$

a) Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.

b) Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.

c) Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions ***4*** et ***5***.

d) Déterminer les valeurs propres de T_λ.

e) L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

f) Justifier que T_λ est un automorphisme de E.

g) Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.

h) Déterminer T_λ^{-1}.

Exercice 27 *(d'après* `E3A 2024 PC`*)*

1.
- Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Soient P et Q deux éléments de E.
- On note : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} P(n)\, Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tout $(P, Q) \in E^2$: $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, P(n)\, Q(n)$.

a) Montrer : $\langle S \mid S \rangle = 0 \Leftrightarrow S$ est le polynôme nul.

b) Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. **Quelques calculs de sommes**

a) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

b) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

c) Exprimer $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Soit $x > 0$.
Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

e) Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

Calculer S_0, S_1 et S_2.

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie. On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question *2*.

a) Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X.

b) Prouver que l'ensemble $\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \ \left(n^2 - c\,n - d\right)^2 \ \middle| \ (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$ possède un minimum.

c) En déduire la distance recherchée.

Exercice 28 *(d'après* `E3A 2023 PC`*)*

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .
- On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
- Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x \,|\, y\rangle$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x. Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \varphi_u(x) = 2\,\frac{\langle x \,|\, u\rangle}{\langle u \,|\, u\rangle} \cdot u - x$$

1. **Étude de l'application φ_u**

a) Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

b) En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.

c) Soit x appartenant à E, calculer $\langle \varphi_u(x) \,|\, \varphi_u(x)\rangle$.

d) En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle \varphi_u(x) \,|\, \varphi_u(y)\rangle = \langle x \,|\, y\rangle$$

e) On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^{\perp}$.

Déterminer l'image de D_u par φ_u.

En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.

Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

2. **Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$**

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

a) Donner la dimension et une base orthonormale de $H^{\perp}$.

b) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

c) Soit v un vecteur unitaire de $H^{\perp}$.

Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. **Étude d'une réciproque**

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant : $\forall x \in \Delta, \psi(x) = x$ et $\forall x \in \Delta^{\perp}, \psi(x) = -x$.

a) Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

b) Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

Exercice 29 *(d'après* `E3A 2020 PC`*)*

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

b) Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 30 *(d'après* `E3A 2021 PC`*)*

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
- On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \ldots, P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E. Soit $(a_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.
- Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose : $\langle P \mid Q \rangle = \sum\limits_{j=0}^{n} P(a_j)\, Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit P un polynôme de E, calculer $\langle P \mid P_0 \rangle$.

3. Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on considère le polynôme :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

a) Démontrer que, pour tout couple $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

b) Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

c) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.

d) Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathscr{B}$.

e) Déterminer $\sum\limits_{j=0}^{n} L_j$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum\limits_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer $H^\perp$ et en déduire la dimension de H.

5. Soit Q un polynôme de E.

a) Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$.

b) Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.

Exercice 31 *(d'après* `E3A 2020 MP`*)*

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose, pour tout couple $(P, Q) \in E^2$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t)\, dt$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur E un produit scalaire.
Dans la suite de cet exercice, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ muni de ce produit scalaire.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Donner sans démonstration la dimension de $F^\perp$.

3. <u>On prend dans cette question $n = 2$</u>
Déterminer une base du sous-espace $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$.

4. <u>On revient au cas général : $n \geqslant 2$</u> et soit $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ non nul.

a) Déterminer le degré de L.

b) On pose, lorsque cela est possible, pour x réel : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t) t^x\, dt$.

(i) Montrer que φ est une fonction rationnelle.

(ii) Déterminer les zéros et les pôles de φ. Donner pour chacun l'ordre de multiplicité.
On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle φ.

(iii) En déduire une expression de φ, à une constante multiplicative près, faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.

c) En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle φ, donner une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

Exercice 32 *(d'après* `E3A 2020 PSI`*)*

Soient E un plan vectoriel, $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathscr{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E. Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.

2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.

3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.

4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.

5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

Oraux MP

Exercice 33 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

1. ***a)*** Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\, dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\, dt \mid f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice 34 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 35 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\, dx = 0 \Rightarrow h = 0$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, \langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\, dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 36 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\langle f \mid g \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

Exercice 37 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

- On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par :

$$\varphi\left(A, A'\right) = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$$

  où $\operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$ est la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
- On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 38 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.

Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.

On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.

On admet que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

a) Prouver que $E = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Prouver que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.

Exercice 39 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

- Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.
- On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
- Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A \mid A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.