Feuille d'exercices n°6 : Espaces probabilisés sur un univers fini ou infini

Notion de tribu

Exercice 1

Soit $\Omega = [\![1, 5]\!]$.

a. L'ensemble $\mathscr{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ est-il une tribu ?

b. Quelle est la plus petite tribu contenant $\mathscr{B}$?

Exercice 2

Notons $\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ fini ou } \bar{A} \text{ fini}\}$.
Démontrer que $\mathscr{A}$ n'est pas une tribu.

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et (A_n) une suite d'événements.

1) ***a.*** Démontrer que $A = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{n\geqslant p} A_n$ est un événement.

b. Exprimer le fait que A soit réalisé en fonction de la réalisation des éléments de la suite (A_n).

2) ***a.*** Démontrer que $B = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n\geqslant p} A_n$ est un événement.

b. Exprimer le fait que B soit réalisé en fonction de la réalisation des éléments de la suite (A_n).

Probabilité et propriété de σ-additivité

Exercice 4

Notons $\Omega = [\![1, n]\!]$.
Déterminer une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisable $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\big)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}\big([\![1, k]\!]\big)$ soit proportionnel à k^2.

Exercice 5

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles.

a. Montrer que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

b. En déduire la limite de la suite $(\mathbb{P}(A_n))$.

Exercice 6

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Montrer que : $\mathbb{P}(\{n\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dénombrement ou cas de l'équiprobabilité

Exercice 7

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

a. Aucune condition.

b. Il y a au moins un pique parmi les cinq cartes.

c. Il y a exactement deux valets.

d. Il y a exactement un as et deux carreaux.

e. Il n'y a pas de carte en dessous de 9.

f. Les cinq cartes forment deux paires (mais pas de brelan).

g. Les cinq cartes sont de la même couleur.

h. Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

Exercice 8

On tire 5 atouts dans un jeu de tarot.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

a. Au moins un atout est multiple de 5.

b. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3 (différent du multiple de 5).

c. On a tiré le 1 ou le 21.

Exercice 9
Combien y a-t-il d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPI ? de ABRACADABRA ?

Exercice 10
On joue à pile ou face quatre fois de suite. On considère les événements :
- × A : « on obtient deux fois pile et deux fois face »,
- × B : « les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ».

a. Décrire l'univers Ω et l'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$.
On calculera notamment le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 11
On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 2$).
On prélève ces jetons au hasard, un par un et sans remise.
On note $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ la liste des numéros tirés.
- Pour $2 \leqslant i \leqslant n$, on dit qu'il y a record à l'instant i si u_i est plus grand que tous les numéros précédemment tirés, c'est-à-dire si $u_i > \max(u_1, \ldots, u_{i-1})$.
- D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement record à l'instant 1.

Calculer les probabilités que durant la totalité des tirages on assiste exactement à :

a) un seul record. ***b)*** n records. ***c)*** deux records.

Formule des probabilités composées

Exercice 12
On considère deux urnes.

La première contient 4 boules noires et 2 blanches, la deuxième 2 noires et 4 blanches. On choisit une urne au hasard, on tire successivement 3 boules sans remise.

Donner la probabilité de tirer une troisième boule noire sachant que l'on a déjà tiré 2 boules noires avant.

Exercice 13
Une puce se déplace par sauts successifs sur le centre de gravité O et les sommets A, B, C d'un triangle équilatéral.

Au temps $t = 0$, elle se trouve en O, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle saute entre les instants $t = n$ et $t = n + 1$ du point où elle se trouve sur l'un des trois autres points, de façon équiprobable.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que la puce revienne en O pour la première fois au temps $t = n$?

2. Quelle est la probabilité pour que la puce ne revienne jamais en O ?

Exercice 14
On effectue, dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires, une suite de tirages de la façon suivante :
- × si la boule tirée est blanche, on la replace dans l'urne avec b autres boules blanches, et on procède à un nouveau tirage.
- × si la boule tirée est noire, on arrête les tirages.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité p_n que la $n^{\text{ème}}$ boule tirée soit noire.

2. Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n+1}$.

3. Quelle est la probabilité de continuer les tirages indéfiniment ?

Exercice 15
Une urne contient initialement 1 boule blanche et 1 boule rouge.

On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur. On répète ensuite cette opération.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?

2. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

3. Le résultat précédent reste-t-il vrai si on rajoute trois boules de la même couleur au lieu de deux ?

Exercice 16

Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que la première tentative réussie soit la $k^{\text{ème}}$?

On répondra à cette question sous chacune des trois hypothèses suivantes.

- (H_1) le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,
- (H_2) le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,
- (H_3) le rat se souvient des deux expériences précédentes.

Exercice 17

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.

On tire successivement des boules dans cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule supplémentaire de la même couleur.

On note A_n l'événement : « la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche ».

a. Exprimer en fonction des événements A_n l'événement A : « toutes les boules tirées sont blanches ».

b. Déterminer $\mathbb{P}(A)$.

c. Montrer que la boule rouge initiale sera tirée, de manière presque sûre, au cours de l'expérience.

Exercice 18

Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires.
L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules.

a. Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?

b. Quelle est la probabilité qu'une boule noire apparaisse pour la première fois au deuxième tirage ?

Formule des probabilités totales (ou presque ...)

Exercice 19

Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré :

× s'il obtient 6, il tire une boule dans l'urne et le jeu s'arrête.

× sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation.

On note B l'événement : « la boule tirée est rouge ».
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : « le jeu s'arrête au $n^{\text{ème}}$ tour ».
Enfin, on note A l'événement : « on obtient un 6 au cours de la partie ».

a. Exrpimer A en fonction des événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. Démontrer que $\mathbb{P}(A) = 1$ *(l'événement A est presque certain).*

c. Déterminer la probabilité de l'événement B.
On pourra utiliser le résultat de l'exercice 31.
(on donne la formule : $\forall x \in]-1,1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$)

Formule des probabilités totales

Exercice 20

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p.

Chaque urne contient p boules et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ l'urne numéro i contient i boules noires et $p-i$ boules blanches. On effectue l'expérience suivante : choisir au hasard une urne puis effectuer des tirages avec remise dans l'urne choisie.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « on a effectué $2n$ tirages et obtenu le même nombre de boules blanches que de noires ».

1. Calculer la probabilité de A_n sachant que les tirages se font dans l'urne i.

2. Exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ sous forme d'une somme.

3. Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Indication : on donne $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

4. Pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer l'intégrale $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q \, dx$ par intégration par parties.

En déduire la formule donnée en indication dans la question précédente.

Exercice 21

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n.

Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

a. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

b. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

c. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 22

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse dans ce problème à l'apparition de deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$ ».

On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

× pour tout entier naturel n non nul : $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

× avec la convention $a_0 = 0$.

a. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} - q\, a_{n+1} - pq\, a_n = 0$.

c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n)$.

d. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Formule des probabilités totales / formule de Bayes

Exercice 23

Deux joueurs X et Y s'entraînent au tir à la cible.

Le joueur X est adroit : lorsqu'il tire, il atteint la cible 9 fois sur 10.
Le joueur Y est débutant : il n'atteint la cible que 6 fois sur 10.

Le joueur X laisse Y s'entraîner et n'effectue qu'un tir sur trois.

Un des joueurs tire et atteint la cible. Quelle est la probabilité que ce soit Y qui ait tiré ?

Exercice 24

On dispose de 100 dés dont 25 pipés.

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

1. On choisit un dé au hasard parmi les 100 dés, on le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit un dé au hasard parmi les 100 dés, on le lance n fois et on obtient n fois le chiffre 6.

  a) Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

  b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter.

Exercice 25

Deux urnes sont remplies de boules.

La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires et 20 boules blanches.

On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche.

Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

Indépendance d'événements

Exercice 26

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n, où $n \geqslant 2$.

On effectue dans cette urne un tirage de p jetons, où $p \geqslant n$, les jetons étant tirés successivement et avec remise.

On dit que le tirage est complet si au cours du tirage, tous les numéros sont sortis. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_k l'événement « le jeton numéro k est sorti au cours du tirage ».

1. Calculer, pour tous j, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les probabilités $\mathbb{P}(\overline{A_k})$ et $\mathbb{P}(\overline{A_j} \cap \overline{A_k})$.

2. Les événements A_1, A_2, ..., A_n sont-ils deux à deux indépendants ? mutuellement indépendants ?

3. Exprimer l'événement C : « le tirage est complet » à l'aide des événements de la famille $\left(A_k\right)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

4. On suppose $n = 2$. Calculer $\mathbb{P}(C)$.

Exercice 27

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.

On munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$.

Démontrer :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \\ A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ ne sont pas} \\ \text{indépendants pour } \mathbb{P} \end{array}$$

Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, deux événements incompatibles et tous deux différents de $\varnothing$ ne sont jamais indépendants.

Exercice 28

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Existe-t-il deux événements A et B à la fois incompatibles et indépendants ?

Exercice 29

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$.

Démontrer que tout événement $B \in \mathscr{A}$ est indépendant de A pour $\mathbb{P}$.

Exercice 30

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient A, B et C des événements mutuellement indépendants.
Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.

Exercice 31

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

a. Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ tels que A et B sont indépendants.
Démontrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

b. Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$.
Démontrer que : $\forall B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants.

c. Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 1$.
Démontrer que : $\forall B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants.

Exercice 32

Une urne contient deux boules vertes et trois boules jaunes. On effectue quatre tirages avec remise dans cette urne.

On considère les événements suivants :

- A : « les deux premiers tirages donnent des boules vertes »
- B : « les deux derniers tirages donnent des boules vertes »
- C : « les deuxième et troisième tirages donnent des boules jaunes »
- D : « les quatre tirages donnent des boules de la même couleur »

a. Parmi ces événements, dire lesquels sont indépendants.

b. Ces quatre événements sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 33

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6.

- On note A : « le premier chiffre est pair ».
- On note B : « le second chiffre est impair ».
- On note C : « la somme des chiffres est paire ».

a. Démontrer que A, B et C sont deux à deux indépendants.

b. Démontrer que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 34

On considère une urne U contenant 9 boules blanches et 1 boule noire, et une urne V contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.
On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 :

× si on obtient 1, on effectue 2 tirages (avec remise) dans l'urne U,

× si on n'obtient pas 1, on effectue 2 tirages (avec remise) dans l'urne V.

On considère les événements U : « on tire dans l'urne U », V : « on tire dans l'urne V », B_i : « la $i^{\text{ème}}$ boule est blanche » et N_i : « la $i^{\text{ème}}$ boule est noire » pour $i \in \{1, 2\}$.

a. Les événements B_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

b. Sachant que l'on a obtenu une boule blanche puis une boule noire, de quelle urne est-il plus probable qu'on les ait tirées ?

Exercice 35

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de $0,52$. Par ailleurs, on sait que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

a. On note F l'événement « naissance d'une fille » et L l'événement « avoir une luxation de la hanche ». Les événements F et L sont-ils indépendants ?

b. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille ?

Théorème de la limite monotone

Exercice 36

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $m = (m_1, \ldots, m_p) \in [\![0, 1]\!]^p$.

On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, les résultats Pile et Face étant encodés par 0 et 1 respectivement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note B_n l'événement « le lancer numéro $np + k$ a pour résultat m_k, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Justifier que les événements B_0, ..., B_N sont mutuellement indépendants.

3. Interpréter l'événement $B = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} B_k \right)$ en terme de nombre d'événements B_k réalisés.

4. Justifier que $\bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} \overline{B_k} = \bigcap\limits_{N=n}^{+\infty} \left(\bigcap\limits_{k=n}^{N} \overline{B_k} \right)$. En déduire : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} \overline{B_k} \right) = 0$.

5. Calculer $\mathbb{P}(\overline{B})$ et en déduire $\mathbb{P}(B)$. Interpréter.

Exercice 37

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements. Montrer les propriétés suivantes.

a. S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A_k est presque sûr, alors $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ est presque sûr.

b. S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A_k est négligeable, alors $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ est négligeable.

c. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = 1$.

d. Si les événements A_n sont mutuellement indépendants et de même probabilité $p \in]0, 1[$, alors on a $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = 0$.

Exercice 38

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\geqslant m}$ une suite d'événements (où $m \in \mathbb{N}$).

Démontrer :

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n) = 0$$

(en s'inspirant de la démonstration vue en cours, on pourra introduire une suite (B_n) afin d'utiliser la σ-additivité de $\mathbb{P}$)

Exercice 39

On effectue une infinité de lancers d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0,1[$. Pour $n \geqslant 2$, on note A_n l'événement :

A_n : « au cours des n premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile »

a. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Montrer que : $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{n+1}{2^n}$.

b. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que : $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1}$.

c. Est-il possible que face ne soit jamais suivi de pile ?

Exercice 40

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer indéfiniment un dé équilibré à 6 faces. On note A_n l'événement :

A_n : « on n'a pas obtenu 6 lors des n premiers lancers »

a. Exprimer l'événement A : « on n'obtient jamais 6 » en fonction des A_n.

b. En déduire la probabilité de A.

c. Démontrer que l'événement B : « obtenir au moins une fois un numéro pair » est un événement presque sûr.

Exercice 41

a. Un tirage au Loto est une combinaison (l'ordre ne compte pas) de 6 numéros distincts compris entre 1 et 49. Quelle est la probabilité (on donne : $\binom{49}{6} = 13983816$), notée p dans la suite, de gagner (c-à-d d'avoir les 6 bons numéros) au Loto ?

b. On joue au loto indéfiniment et on définit l'événement A suivant.
A : « on gagne au moins une fois ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: A_n = « on gagne pour la première fois au n-ème tirage »,
B_n = « on gagne au n-ème tirage ».
Exprimer A_n à l'aide des B_k. En déduire $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de p.

c. En déduire $\mathbb{P}(A)$ en exprimant A à l'aide des A_n.

Exercice 42

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire.
On considère les événements suivants :

× A : « on effectue un nombre fini de tirages »,

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n : « le jeu s'arrête au $n^{\text{ème}}$ tirage »,

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n : « on tire une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage ».

a. Démontrer que les événements F_n sont deux à deux incompatibles.

b. Exprimer l'événement F_n en fonction des événements B_i ($i \in [\![1, n]\!]$).

c. Exprimer A en fonction des événements F_n et déterminer $\mathbb{P}(A)$.

Indépendance d'événements et encore limite monotone ...

Exercice 43

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On note $B = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$. On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité de } A_n\}$$

Enfin, on note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et on suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \neq 1$.

Dans la suite, on suppose :

× les événements de la suite (A_n) sont mutuellement indépendants,

× la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

a. Montrer que : $\overline{B} = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}$.

b. Exprimer $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.

c. Montrer que la série $\sum \ln(1-p_k)$ diverge.
(on pourra distinguer le cas où $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et le cas $p_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$)

Quelle est la limite de $\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1-p_k)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

d. Simplifier $\ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)\right)$ et en déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right) = 0$.

e. Démontrer que la suite $\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

f. En déduire une écriture simplifiée de $\bigcup\limits_{n=1}^{m} \bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}$.

g. Démontrer enfin que B est un événement presque sûr.
(on pourra utiliser le résultat de l'exercice 38)

Exercice 44

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

2) On dispose d'une urne vide au départ.

× Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!).

× Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment ...

a. Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{i\in[\![1,\ell]\!]}$ une famille de ℓ événements indépendants.

Montrer : $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant \ell} \overline{E_i}) \leqslant \exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(E_i)\right)$.

b. On note A_k : « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ».
Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$.

c. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage » (où $n \in \mathbb{N}$).
Déterminer la probabilité de cet événement en considérant son contraire.

d. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort une infinité de fois ».
Déterminer la probabilité de cet événement.

e. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort une infinité de fois **de suite** ».
Déterminer la probabilité de cet événement.

Évolution d'une grandeur aléatoire dans le temps (discret) - chaînes de Markov

Exercice 45

Stéphane possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel il a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieux de bien gérer ses dépenses, il étudie l'évolution de ses consommations.

Il a constaté :

× si un mois donné il a dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant est égale à $\frac{1}{5}$.

× si un mois donné il n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant est égale à $\frac{2}{5}$.

On suppose que la probabilité qu'il ait dépassé son forfait le premier mois est égale à $\frac{1}{2}$. Dans la suite, on considère A_n l'événement suivant.

$$A_n : \text{« Stéphane dépasse son forfait le } n^{\text{ème}} \text{ mois »}$$

et on note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

a. Soit $n \geqslant 1$. Établir une relation entre p_{n+1} et p_n.

b. En déduire l'expression explicite de p_n.

Exercice 46

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise.

On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

a. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

b. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

c. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 47

Soit $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable ou baisser.

- Le premier jour, le titre est stable.
- Si un jour n, le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1-2a$, restera stable avec probabilité a, et baissera avec la probabilité a.
- Si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité $1-2a$, et baissera avec probabilité a.
- Si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité a, et baissera avec probabilité $1-2a$.

On note M_n (resp. S_n, resp B_n) l'événement : « le titre donné monte le jour n (resp. reste stable, resp. baisse) ».

On pose $p_n = \mathbb{P}(M_n)$, $q_n = \mathbb{P}(S_n)$ et $r_n = \mathbb{P}(B_n)$.

a. Expliciter p_{n+1} (resp. q_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n.

b. Que vaut $p_n + q_n + r_n$?
En déduire l'expression de r_n en fonction de p_n et q_n.

c. Montrer que les suites p et q sont arithmético-géométriques.

d. En déduire p_n, q_n puis r_n en fonction de n.

Exercice 48

1. On joue à pile ou face avec une pièce truquée tombant sur pile avec une probabilité p. On lance la pièce n fois.

Pour $k \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité d'obtenir k piles lors de ces n lancers ?

2. On considère maintenant deux pièces M_1 et M_2 donnant pile avec des probabilités p_1 et p_2. On joue de la manière suivante : à chaque lancer, on joue avec la pièce M_1 si le lancer précédent a donné pile, avec M_2 sinon. Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard.

Soit A_n l'événement : on obtient pile au n-ième lancer » et $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

a) Exprimer a_n en fonction de a_{n-1}.

b) Déterminer le comportement asymptotique de la suite (a_n).

Exercice 49

Un jeu entre deux joueurs A et B est divisé en parties indépendantes.

À chaque partie, celui qui perd donne un euro au gagnant. La probabilité que A gagne est $p \in]0,1[$ et la probabilité que B gagne est $q = 1 - p$.

1. Les joueurs A et B possèdent au total une somme de N euros. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux joueurs est ruiné, c'est-à-dire possède une somme nulle. On note p_k la probabilité qu'a le joueur A, en partant de la somme k supposée entière, d'être ruiné par la suite.

   a) Calculer p_0 et p_N.

   b) Montrer que $p_k = p\,p_{k+1} + q\,p_{k-1}$, pour tout k tel que : $1 \leqslant k \leqslant N-1$.

   c) On suppose $p = \frac{1}{2}$. Montrer que $p_k = \frac{N-k}{N}$.

   d) On suppose $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que $p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$.

   e) Déduire de ce qui précède la probabilité q_k qu'a le joueur B, en partant de la somme $N-k$, d'être ruiné par la suite.
   Calculer $p_k + q_k$. Interpréter le résultat.

2. Le joueur B est infiniment riche et le joueur A dispose d'une somme k.

   a) On suppose $p \leqslant \frac{1}{2}$.
   Montrer que la probabilité que le joueur A se ruine est 1.

   b) On suppose $p > \frac{1}{2}$.
   Montrer que la probabilité que le joueur A se ruine est : $\left(\frac{q}{p}\right)^k$.

Exercice 50

Deux joueurs A et B jouent aux échecs sans discontinuer.

- Le joueur B gagne la première partie.
- La probabilité que A remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,6$.
- La probabilité que B remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,5$.

On note p_n la probabilité que B remporte la $n^{\text{ème}}$ partie.

Montrer que (p_n) est arithmético-géométrique et donner sa formule explicite.

Exercice 51

On s'intéresse à un tournoi de pile ou face comportant une infinité de joueurs A_0, A_1, ...

La première partie, A_0 joue contre A_1.

À la deuxième partie, le vainqueur de la première partie joue contre A_2.

À la troisième partie, le vainqueur de la deuxième partie joue contre A_3, etc.

Le premier joueur qui gagne trois parties de suite remporte le jeu.

La pièce utilisée est équilibrée. On note q_n la probabilité que le joueur A_n joue au moins une partie et p_n la probabilité qu'il gagne le jeu.

1. Donner une relation entre p_n et q_n.

2. Déterminer p_n et q_n pour $1 \leqslant n \leqslant 3$.

3. Trouver une relation de récurrence pour la suite (q_n).

4. Montrer que le jeu se termine presque sûrement après un nombre fini de parties.

Exercice 52

Soit a et b deux entiers strictement positifs.

On place b boules blanches et b boules noires dans une urne.

On effectue une succession de tirages avec remise et chaque fois que l'on tire une boule blanche, on rajoute a boules blanches supplémentaires dans l'urne. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note A_n l'événement : « on n'a tiré que des boules blanches au cours des n premiers tirages » et on pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \dfrac{b + a\,n}{2b + a\,n}\, p_n$.

2. Déterminer la limite de la suite (p_n).