Feuille d'exercices n°5 : Espaces probabilisés sur un univers fini ou infini

Notion de tribu

Exercice 2. (★★)
Notons $\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ fini ou } \overline{A} \text{ fini}\}$.
Démontrer que $\mathscr{A}$ n'est pas une tribu.

Démonstration.
Supposons par l'absurde que $\mathscr{A}$ est une tribu. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $A_n = \{2n\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. C'est donc un élément de $\mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ étant une tribu, $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un élément de $\mathscr{A}$.

Or A, ensemble des entiers naturels pairs ne peut être un élément de $\mathscr{A}$.
En effet :

× A est un ensemble infini.

× $\overline{A}$, ensemble des entiers naturels impairs, est un ensemble infini.

Ceci contredit l'hypothèse. $\mathscr{A}$ n'est donc pas une tribu. □

Dénombrement ou cas de l'équiprobabilité

Exercice 6. (★)
On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

a. Aucune condition.
b. Il y a au moins un pique parmi les cinq cartes.
c. Il y a exactement deux valets.
d. Il y a exactement un as et deux carreaux.
e. Il n'y a pas de carte en dessous de 9.
f. Les cinq cartes forment deux paires (mais pas de brelan).
g. Les cinq cartes sont de la même couleur.
h. Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

Démonstration.
Notons E l'ensemble des cartes du paquet et M l'ensemble de toutes les mains constituées d'éléments de E.

a. L'ensemble M contient toutes les 5-combinaisons d'éléments de E (ensemble à 32 éléments). Ainsi : $\text{Card}(M) \; = \; \binom{32}{5}$. Or :

$$\begin{aligned}
\binom{32}{5} \; &= \; \frac{32!}{5!\;(32-5)!} \; = \; \frac{32!}{5!\;27!} \; = \; \frac{32\times31\times30\times29\times28\times(\cancel{27!})}{5!\;\cancel{27!}} \\
&= \; \frac{32\times31\times\cancel{30}\times29\times28}{\cancel{5}\times4\times\cancel{3}\times\cancel{2}} \; = \; \frac{32\times31\times29\times28}{4} \\
&= \; 32\times31\times29\times7
\end{aligned}$$

Il y a donc $32\times31\times29\times7$ mains différentes.

b. Il y a deux méthodes pour traiter cette question.

(i) Par application directe du principe additif :
Notons $M_{\geqslant 1-p}$ l'ensemble des mains contenant au moins un pique.
On a alors : $M_{\geqslant 1-p} \; = \; M_{1-p} \cup M_{2-p} \cup M_{3-p} \cup M_{4-p} \cup M_{5-p}$.

- Une main contenant un seul pique est entièrement déterminée par :
  × le choix de la carte pique : $\binom{8}{1}$ possibilités.
  × le choix des autres cartes : $\binom{24}{4}$ possibilités.
  (nombre de parties à 4 éléments dans E privé des cartes pique)

  Ainsi : $\text{Card}(M_{1-p}) \; = \; \binom{8}{1} \times \binom{24}{4}$.

- Une main contenant exactement deux piques est entièrement déterminée par :
  - × le choix des deux cartes pique : $\binom{8}{2}$ possibilités.
  - × le choix des autres cartes : $\binom{24}{3}$ possibilités.

  Ainsi : $\mathrm{Card}(M_{2-p}) = \binom{8}{2} \times \binom{24}{3}$.
- Une main contenant exactement trois piques est entièrement déterminée par :
  - × le choix des trois cartes pique : $\binom{8}{3}$ possibilités.
  - × le choix des autres cartes : $\binom{24}{2}$ possibilités.

  Ainsi : $\mathrm{Card}(M_{3-p}) = \binom{8}{3} \times \binom{24}{2}$.
- Une main contenant exactement quatre piques est entièrement déterminée par :
  - × le choix des quatre cartes pique : $\binom{8}{4}$ possibilités.
  - × le choix des autres cartes : $\binom{24}{1}$ possibilités.

  Ainsi : $\mathrm{Card}(M_{4-p}) = \binom{8}{4} \times \binom{24}{1}$.
- Une main contenant exactement cinq piques est entièrement déterminée par :
  - × le choix des cinq cartes pique : $\binom{8}{5}$ possibilités.

  Ainsi : $\mathrm{Card}(M_{5-p}) = \binom{8}{5}$.

On en conclut que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(M_{\geqslant 1-p}) &= \binom{8}{1} \times \binom{24}{4} + \binom{8}{2} \times \binom{24}{3} + \binom{8}{3} \times \binom{24}{2} + \binom{8}{4} \times \binom{24}{1} + \binom{8}{5} \\ &= \sum_{k=1}^{5} \binom{8}{k} \times \binom{24}{5-k}\end{aligned}$$

(en remarquant que $\binom{8}{5} = \binom{8}{5} \times 1 = \binom{8}{5} \times \binom{24}{0}$)
Or, d'après la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{8}{k} \times \binom{24}{5-k} = \binom{32}{5}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(M_{\geqslant 1-p}) &= \left(\sum_{k=0}^{5} \binom{8}{k} \times \binom{24}{5-k}\right) - \binom{8}{0} \times \binom{24}{5} \\ &= \binom{32}{5} - \binom{24}{5}\end{aligned}$$

(ii) Par application directe du principe soustractif :
Le résultat précédent peut être obtenu de manière plus rapide.
Pour cela, on commence par dénombrer $\overline{M_{\geqslant 1-p}}$ l'ensemble des mains qui ne contiennent pas de pique. On a :

$$\mathrm{Card}(\overline{M_{\geqslant 1-p}}) = \binom{24}{5}$$

Le cardinal de $M_{\geqslant 1-p}$ est alors obtenu grâce au principe soustractif. Comme :

$$\overline{M_{\geqslant 1-p}} = M \setminus M_{\geqslant 1-p}$$

on a : $\mathrm{Card}(\overline{M_{\geqslant 1-p}}) = \mathrm{Card}(M) - \mathrm{Card}(M_{\geqslant 1-p}) = \binom{32}{5} - \binom{24}{5}$.

c. Une main contenant deux valets est entièrement déterminée par :
- × le choix des deux valets : $\binom{4}{2}$ possibilités.
  (on choisit les couleurs des deux valets dans l'ensemble contenant les quatre couleurs)

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{\cancel{4} \times 3 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2}} = 3 \times 2 = 6 \text{ possibilités}$$

- × le choix des trois autres cartes : $\binom{28}{3}$ possibilités.
  (à piocher dans un paquet qui ne contient plus de valet)

$$\begin{aligned}\binom{28}{3} &= \frac{28!}{3!\ (28-3)!} = \frac{28!}{3!\ 25!} = \frac{28 \times 27 \times 26 \times (\cancel{25!})}{3!\ \cancel{25!}} \\ &= \frac{28 \times 27 \times 26}{3 \times 2} = 28\ \frac{27}{3}\ \frac{26}{2} = 28 \times 9 \times 13\end{aligned}$$

Il y a donc en tout : $30 \times 28 \times 27 \times 26$ mains contenant deux valets.

d. L'énoncé ne précise pas si l'as choisi peut être de carreau. Sans plus d'information, il convient de prendre cette possibilité en compte.

- Une main contenant exactement un as de carreau, un autre carreau et trois autres cartes est entièrement déterminée par :
  - × le choix de la carte carreau : $\binom{7}{1} = 7$ possibilités.
  - × le choix des trois autres cartes : $\binom{21}{3}$ possibilités.
    (à piocher dans un paquet qui ne contient aucun carreau et aucun as)

$$\begin{aligned}\binom{21}{3} &= \frac{21!}{3!\ (21-3)!} = \frac{21!}{3!\ 18!} = \frac{21 \times 20 \times 19 \times \cancel{(18!)}}{3!\ \cancel{18!}} \\ &= \frac{21 \times 20 \times 19}{3 \times 2} = \frac{21}{3}\ \frac{20}{2}\ 19 = 7 \times 10 \times 19\end{aligned}$$

  Il y a donc en tout : $7 \times 7 \times 10 \times 19$ mains contenant l'as de carreau, et un autre carreau.

- Une main contenant exactement un as (qui n'est pas de carreau) et deux carreaux (qui ne sont pas des as) est entièrement déterminée par :
  - × le choix de l'as : $\binom{3}{1} = 3$ possibilités.
  - × le choix des deux carreaux : $\binom{7}{2}$ possibilités.

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\ (7-2)!} = \frac{7!}{2!\ 5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{(5!)}}{2 \times \cancel{5!}} = 3 \times 7$$

  - × le choix des deux autres cartes : $\binom{21}{2}$ possibilités.
    (à piocher dans un paquet qui ne contient aucun carreau et aucun as)

$$\begin{aligned}\binom{21}{2} &= \frac{21!}{2!\ (21-2)!} = \frac{21!}{2!\ 19!} = \frac{21 \times 20 \times \cancel{(19!)}}{2!\ \cancel{19!}} \\ &= \frac{21 \times 20}{2} = 21\ \frac{20}{2} = 21 \times 10\end{aligned}$$

  Il y a donc en tout : $3 \times 3 \times 7 \times 21 \times 10$ mains contenant un as (qui n'est pas de carreau) et deux carreaux (qui ne sont pas des as).

Il y a donc en tout : $7 \times 7 \times 10 \times 19\ +\ 3 \times 3 \times 7 \times 21 \times 10$ mains contenant un as et deux carreaux.

e. L'énoncé est ici ambigu. Nous dénombrons ici l'ensemble des mains dont toutes les cartes sont de hauteur égale ou supérieure à 10.
Une telle main est entièrement déterminée par :

- × le choix des cinq cartes : $\binom{20}{5}$ possibilités.
  (il y a 4 cartes 7, 4 cartes 8 et 4 cartes 9 ; il s'agit donc de tirer 5 cartes dans un paquet de $32 - 4 \times 3 = 20$ cartes)

$$\begin{aligned}\binom{20}{5} &= \frac{20!}{5!(20-5)!} = \frac{20!}{5!\ 15!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times \cancel{(15!)}}{5! \times \cancel{15!}} \\ &= \frac{\cancel{20} \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{\cancel{5 \times 4} \times 3 \times 2} = 19 \times \frac{18}{3 \times 2} \times 17 \times 16 \\ &= 19 \times 3 \times 17 \times 16\end{aligned}$$

Il y a donc en tout : $19 \times 3 \times 17 \times 16$ mains dont toutes les cartes sont de hauteur égale ou supérieure à 10.

f. Une main dont les cartes forment une double paire est entièrement déterminée par :

- × les hauteurs de chaque paire : $\binom{8}{2}$ possibilités.
- × les couleurs des 2 cartes de la première paire : $\binom{4}{2}$ possibilités.
- × les couleurs des 2 cartes de la seconde paire : $\binom{4}{2}$ possibilités.
- × la dernière carte : $\binom{24}{1}$ possibilités.

(la dernière carte ne doit pas être de la même hauteur que l'une ou l'autre des paires)
Il y a donc $N = \binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1}$ mains vérifiant ce critère.

$$\begin{aligned}N &= \binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1} = \frac{8!}{2!\ 6!}\ \frac{4!}{2!\ 2!}\ \frac{4!}{2!\ 2!}\ 24 \\ &= \frac{8 \times 7 \times \cancel{(6!)}}{2!\ \cancel{6!}}\ \frac{4 \times 3 \times \cancel{(2!)}}{2!\ \cancel{2!}}\ \frac{4 \times 3 \times \cancel{(2!)}}{2!\ \cancel{2!}} \times 24 \\ &= \frac{\cancel{8} \times 7}{\cancel{2}}\ \frac{4 \times 3}{\cancel{2}}\ \frac{4 \times 3}{\cancel{2}}\ 24 = 7 \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 24\end{aligned}$$

g. Une main dont toutes les cartes sont de la même couleur est entièrement déterminée par :

× la couleur de la main : $\binom{4}{1}$ possibilités.

× les 5 cartes (5 hauteurs) choisies dans cette couleur : $\binom{8}{5}$ possibilités.

Il y a donc $N = \binom{4}{1}\binom{8}{5}$ mains vérifiant ce critère.

$$N \;=\; \binom{4}{1}\binom{8}{5} \;=\; 4\,\frac{8!}{5!\;3!} \;=\; 4\,\frac{8\times 7\times \cancel{6}}{\cancel{3}\times\cancel{2}} \;=\; 4\times 8\times 7\times 6 \;=\; 224$$

(dans ce calcul, sont aussi comptées les mains qui sont des quintes flushs !)

h. Une main dont les cinq cartes forment une quinte flush est entièrement déterminée par :

× la couleur de la main : $\binom{4}{1}$ possibilités.

× la hauteur de la plus petite carte de la main : $\binom{4}{1}$ possibilités.
(cette carte ne peut être qu'un 7, 8, 9 *ou un* 10*)*

Il y a donc $N = \binom{4}{1}\binom{4}{1}$ mains vérifiant ce critère.

$$N \;=\; \binom{4}{1}\binom{4}{1} \;=\; 4\times 4 \;=\; 16$$

(ainsi, il y a $224 - 16 = 208$ *mains qui ne sont que des « couleurs »)* □

Exercice 7. (★★)
Combien y a-t-il d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPI ? de ABRACADABRA ?

Démonstration.
Une (*oui, c'est un mot féminin !*) anagramme d'un mot m est un mot composé des mêmes lettres, apparaissant le même nombre de fois que dans le mot initial m.

- Nombre d'anagrammes de MAISON :
  Il s'agit de dénombrer le nombre de manières de ranger 6 lettres distinctes à 6 places différentes. Autrement dit, on dénombre les permutations de l'ensemble { M, A, I, S, O, N }.

  Il y a $6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2 = 720$ anagrammes de MAISON.

- Nombre d'anagrammes de RADAR :
  Les lettres A et R apparaissent deux fois dans ce mot. Il y a deux méthodes permettant d'obtenir le résultat.

  (i) En commençant par distinguer les lettres « doubles ».
  On procède comme suit :

  × on différencie les deux lettres R en les nommant R_1 et R_2.

  × on différencie les deux lettres A en les nommant A_1 et A_2.

  × on dénombre les anagrammes de $R_1A_1DA_2R_2$.
  Ce mot étant composé de lettres distinctes, il s'agit de dénombrer les permutations de l'ensemble $\{ R_1, A_1, D, A_2, R_2 \}$.
  Il y a $5! = 5\times 4\times 3\times 2 = 120$ anagrammes de $R_1A_1DA_2R_2$.

  × on dénombre alors les anagrammes de RA_1DA_2R. Autrement dit, on ne distingue plus les lettres R. À chaque anagramme de RA_1DA_2R (par exemple A_2RA_1DR) correspond 2 anagrammes composées des lettres de l'ensemble $\{ R_1, A_1, D, A_2, R_2 \}$:

  1) $A_2R_1A_1DR_2$, anagramme où la lettre R_1 apparaît avant R_2.

  2) $A_2R_2A_1DR_1$, anagramme où la lettre R_2 apparaît avant R_1.

  Ainsi, il y a 2 fois plus d'anagrammes de $R_1A_1DA_2R_2$ que d'anagrammes de RA_1DA_2R. Le nombre 2 correspond aux différentes manières de positionner R_1 et R_1 à deux places fixées. Autrement dit, au nombre de permutations ($= 2!$) de l'ensemble $\{ R_1, R_2 \}$.
  Il y a $5!/2! = 120/2 = 60$ anagrammes de RA_1DA_2R.

  × on dénombre alors les anagrammes de RADAR. Autrement dit, on ne distingue plus les lettres A. Comme précédemment, à chaque anagramme de RADAR correspond 2 anagrammes composées des lettres de l'ensemble $\{ R, A_1, D, A_2, R \}$.
  Ainsi, il y a 2 fois plus d'anagrammes de RA_1DA_2R que d'anagrammes de RADAR.
  Il y a donc $\dfrac{\frac{5!}{2!}}{2!} = \dfrac{5!}{2!\;2!} = \dfrac{120}{2\times 2} = 30$ anagrammes de RADAR.

(ii) Par un dénombrement direct.
Une anagramme de RADAR est entièrement déterminée par :

× le choix des positions des R : $\binom{5}{2}$ possibilités.

× le choix des positions des A : $\binom{3}{2}$ possibilités.
(les R étant placés, il ne reste que 3 *places)*

La position de D s'en déduit.

Ainsi, il y a $\binom{5}{2}\binom{3}{2} = \dfrac{5!}{2!\ \cancel{3!}} \times \dfrac{\cancel{3!}}{2!\ 1!} = \dfrac{5!}{2!\ 2!}$ anagrammes de RADAR.

- Nombre d'anagrammes de MISSISSIPI :
Les lettres I et S apparaissent chacune quatre fois. Encore une fois, il y a deux méthodes permettant d'obtenir le résultat.

(i) En commençant par distinguer les lettres apparaissant plusieurs fois.
On procède comme suit :

× on dénombre les anagrammes de $\text{MI}_1\text{S}_1\text{S}_2\text{I}_2\text{S}_3\text{S}_4\text{I}_3\text{PI}_4$. Ce mot étant composé de lettres distinctes, il s'agit de dénombrer les permutations de l'ensemble $\{ \text{M}, \text{I}_1, \text{S}_1, \text{S}_2, \text{I}_2, \text{S}_3, \text{S}_4, \text{I}_3, \text{P}, \text{I}_4 \}$.
Il y a $10!$ anagrammes de $\text{MI}_1\text{S}_1\text{S}_2\text{I}_2\text{S}_3\text{S}_4\text{I}_3\text{PI}_4$.

× on dénombre alors les anagrammes de $\text{MIS}_1\text{S}_2\text{IS}_3\text{S}_4\text{IPI}$. Autrement dit, on ne distingue plus les lettres I. À chaque anagramme du mot $\text{MIS}_1\text{S}_2\text{IS}_3\text{S}_4\text{IPI}$ correspond $4!$ anagrammes composées des lettres de l'ensemble $\{ \text{M}, \text{I}_1, \text{S}_1, \text{S}_2, \text{I}_2, \text{S}_3, \text{S}_4, \text{I}_3, \text{P}, \text{I}_4 \}$.
($4!$ est le nombre de permutations de l'ensemble $\{ I_1, I_2, I_3, I_4 \}$)
Il y a $10!/4!$ anagrammes de $\text{MIS}_1\text{S}_2\text{IS}_3\text{S}_4\text{IPI}$.

× on dénombre alors les anagrammes de MISSISSIPI. Autrement dit, on ne distingue plus les lettres S. À chaque anagramme de MISSISSIPI correspond $4!$ anagrammes composées des lettres de l'ensemble $\{ \text{M}, \text{I}, \text{S}_1, \text{S}_2, \text{I}, \text{S}_3, \text{S}_4, \text{I}, \text{P}, \text{I} \}$.
($4!$ est le nombre de permutations de l'ensemble $\{ S_1, S_2, S_3, S_4 \}$)

Il y a $\dfrac{\frac{10!}{4!}}{4!} = \dfrac{10!}{4!\ 4!}$ anagrammes de MISSISSIPI. Or :

$$\begin{aligned} \frac{10!}{4!\ 4!} &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \cancel{(4!)}}{4!\ \cancel{4!}} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6} \times 5}{4 \times \cancel{3 \times 2}} \\ &= 10 \times 9 \times 2 \times 7 \times 5 \ = \ 6300 \end{aligned}$$

(ii) Par un dénombrement direct.
Une anagramme de MISSISSIPI est entièrement déterminée par :

× le choix des positions des I : $\binom{10}{4}$ possibilités.

× le choix des positions des S : $\binom{6}{4}$ possibilités.

× la manière de positionner M et P dans les deux places restantes : $2!$ possibilités.
(2 éléments à positionner dans deux places)

Ainsi, il y a $\binom{10}{4}\binom{6}{4}2! = \dfrac{10!}{4!\ \cancel{6!}} \times \dfrac{\cancel{6!}}{4!\ \cancel{2!}} \times \cancel{2!} = \dfrac{10!}{4!\ 4!}$ tels anagrammes.

- Nombre d'anagrammes de ABRACADABRA :
La lettre A apparaît 5 fois, la lettre B apparaît 2 fois, la lettre R apparaît 2 fois, les lettres C et D apparaissent une seule fois. Présentons rapidement les résultas issus des deux méthodes.

(i) En commençant par distinguer les lettres apparaissant plusieurs fois.
Il y a $\dfrac{11!}{5!\ 2!\ 2!}$ anagrammes de ABRACADABRA. Or :

$$\begin{aligned} \frac{11!}{5!\ 2!\ 2!} &= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \cancel{(5!)}}{\cancel{5!}\ 2!\ 2!} \\ &= 11 \times 10 \times 9 \times 2 \times 7 \times 6 \ = \ 83160 \end{aligned}$$

(ii) Par un dénombrement direct.
Une anagramme de ABRACADABRA est entièrement déterminée par :

× le choix des positions des A : $\binom{11}{5}$ possibilités.

× le choix des positions des B : $\binom{6}{2}$ possibilités.

× le choix des positions des R : $\binom{4}{2}$ possibilités.

× la manière de positionner C et D dans les deux places restantes : $2!$ possibilités. *(2 éléments à positionner dans deux places)*

Ainsi, il y a $\binom{11}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{2}2! = \dfrac{11!}{5!\ \cancel{6!}} \times \dfrac{\cancel{6!}}{2!\ \cancel{4!}} \times \dfrac{\cancel{4!}}{2!\ \cancel{2!}} \times \cancel{2!} = \dfrac{11!}{5!\ 2!\ 2!}$ anagrammes de ABRACADABRA. □

Exercice 8. (★)
On tire 5 atouts dans un jeu de tarot.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

a. Au moins un atout est multiple de 5.

b. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3 (différent du multiple de 5).

c. On a tiré le 1 ou le 21.

Démonstration.
D'après l'énoncé, on ne considère que les mains composées d'atouts du jeu de tarot *i.e.* de cartes numérotées 1 à 21 (on laisse de côté « l'excuse »).
Notons E l'ensemble de ces atouts et M l'ensemble des mains constituées uniquement de cartes de E.

a. Il y a deux méthodes pour traiter cette question.

(i) Par application directe du principe additif :
Remarquons tout d'abord qu'il y a 4 multiples de 5 : 5, 10, 15 et 20.
Notons $M_{\geqslant 1-m5}$ l'ensemble des mains contenant au moins un multiple de 5. On a alors : $M_{\geqslant 1-m5} = M_{1-m5} \cup M_{2-m5} \cup M_{3-m5} \cup M_{4-m5}$.

- Une main contenant exactement un multiple de 5 est entièrement déterminée par :

  × le choix de ce multiple : $\binom{4}{1}$ possibilités.

  × le choix des autres cartes : $\binom{17}{4}$ possibilités.

  Ainsi : $\text{Card}(M_{1-m5}) = \binom{4}{1} \times \binom{17}{4}$.

- Une main contenant exactement deux multiples de 5 est entièrement déterminée par :

  × le choix des deux multiples de 5 : $\binom{4}{2}$ possibilités.

  × le choix des autres cartes : $\binom{17}{3}$ possibilités.

  Ainsi : $\text{Card}(M_{2-m5}) = \binom{4}{2} \times \binom{17}{3}$.

- Une main contenant exactement trois multiples de 5 est entièrement déterminée par :
  - × le choix des trois multiples de 5 : $\binom{4}{3}$ possibilités.
  - × le choix des autres cartes : $\binom{17}{2}$ possibilités.

  Ainsi : $\text{Card}(M_{3-m5}) \;=\; \binom{4}{3} \times \binom{17}{2}$.
- Une main contenant exactement quatre multiples de 5 est entièrement déterminée par :
  - × le choix des quatre multiples de 5 : $\binom{4}{4}$ possibilités.
  - × le choix des autres cartes : $\binom{17}{1}$ possibilités.

  Ainsi : $\text{Card}(M_{4-m5}) \;=\; \binom{4}{4} \times \binom{17}{1}$.

On en conclut que :

$$\begin{aligned}\text{Card}(M_{\geqslant 1-m5}) &= \binom{4}{1} \times \binom{17}{4} + \binom{4}{2} \times \binom{17}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{17}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{17}{1} \\ &= \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \times \binom{17}{5-k}\end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{4}{k} \times \binom{17}{5-k} \;=\; \binom{21}{5}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}&\text{Card}(M_{\geqslant 1-m5}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{5} \binom{4}{k} \times \binom{17}{5-k}\right) - \binom{4}{0} \times \binom{17}{5} - \binom{4}{5} \times \binom{17}{0} \\ &= \binom{21}{5} - \binom{17}{5}\end{aligned}$$

(on rappelle que $\binom{4}{5} = 0$*)*

(ii) Par application directe du principe soustractif :
Le résultat précédent peut être obtenu de manière plus rapide.
Pour cela, on commence par dénombrer $\overline{M_{\geqslant 1-m5}}$ l'ensemble des mains qui ne contiennent pas de multiple de 5. On a :

$$\text{Card}(\overline{M_{\geqslant 1-p}}) \;=\; \binom{17}{5}$$

Le cardinal de $M_{\geqslant 1-m5}$ est alors obtenu grâce au principe soustractif. Comme :

$$\overline{M_{\geqslant 1-m5}} \;=\; M \;\setminus\; M_{\geqslant 1-m5}$$

on a : $\text{Card}(\overline{M_{\geqslant 1-m5}}) \;=\; \text{Card}(M) - \text{Card}(M_{\geqslant 1-m5}) \;=\; \binom{21}{5} - \binom{17}{5}$.

b. Une main contenant exactement un multiple de 5 et un multiple de 3 (différent de la carte précédente) est entièrement déterminée par :
- × le choix du multiple de 5 : $\binom{4}{1}$ possibilités.
- × le choix du multiple de 3 qui n'est pas un multiple de 5 : $\binom{6}{1}$ possibilités.
- × le choix des trois autres cartes : $\binom{11}{3}$ possibilités.

Il y a donc $N = \binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{11}{3}$ mains vérifiant ce critère.

$$N = \binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{11}{3} = 4 \times 6 \times \frac{11!}{3!\ 8!} = 4 \times \cancel{6} \times \frac{11 \times 10 \times 9}{\cancel{3 \times 2}} = 3960$$

c. On considère ici que le « ou » est exclusif. Une main contenant soit le 1, soit le 21 (mais pas les deux) est entièrement déterminée par :
- × le choix du 1 ou du 21 : $\binom{2}{1}$ possibilités.
- × le choix des quatre autres cartes : $\binom{19}{4}$ possibilités.

Il y a donc $N = \binom{2}{1}\binom{19}{4}$ mains vérifiant ce critère.

$$N = \binom{2}{1}\binom{19}{4} = 2 \times \frac{19!}{4!\ 15!} = \cancel{2} \times \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16}{4 \times 3 \times \cancel{2}} = 19 \times 6 \times 17 \times 4 = 7752$$

□

Exercice 9. (☆)
On joue à pile ou face quatre fois de suite.

- On note A l'événement : « on obtient deux fois pile et deux fois face »
- On note B l'événement : « les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ».

a. Décrire l'univers Ω et l'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$.
On calculera notamment le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Démonstration.

a. $\Omega = \{P, F\}^4$, ensemble des 4-listes d'éléments de $\{P, F\}$.

$\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de $\{P, F\}^4$.

On a : $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\text{Card}(\Omega)} = 2^{2^4} = 2^{16}$

b. L'univers Ω est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.

- Un tirage contenant exactement deux piles (et donc deux faces) est entièrement déterminé par :
  - × le choix des places des piles : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités.

  Ainsi : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{6}{2^4} = \dfrac{3}{2^3} = \dfrac{3}{8}$
- Un tirage dont les deux premiers lancers sont différents est entièrement déterminé par :
  - × le résultat du premier lancer : 2 possibilités,
  - × le résultat du troisième lancer : 2 possibilités,
  - × le résultat du quatrième lancer : 2 possibilités.

  Ainsi : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{2^3}{2^4} = \dfrac{1}{2}$
- $A \cap B$ regroupe tous les tirages dont les deux premiers lancers sont différents et les deux suivants aussi (de sorte que chaque tirage contient deux piles et deux faces). Un tel tirage est entièrement déterminé par :
  - × le résultat du premier lancer : 2 possibilités,
  - × le résultat du troisième lancer : 2 possibilités.

  Ainsi : $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{2^2}{2^4} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{8}$ □

Exercice 16. (★★)
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n - k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

a. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

b. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

c. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Démonstration.
On note A_k : « le tirage s'effectue dans l'urne k » (pour $k \in [\![1, n]\!]$).
On note B : « on tire deux boules blanches ».

a. La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.
De plus, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n} \neq 0$ *(ne pas oublier cette hypothèse)*.
On en déduit, par la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B) \quad \textit{(car : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(A_k) \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_k}(B) = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = \frac{k!}{\cancel{2}!(k-2)!} \times \frac{\cancel{2}!(n-2)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)} = \frac{1}{n^2\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k\,(k-1) \\
&= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)} \left((2n+1)-3\right) = \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)}\, 2(n-1) \\
&= \frac{\cancel{n}(n+1)}{6\,n^{\cancel{2}}\,\cancel{(n-1)}}\, 2\cancel{(n-1)} = \frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

b. On raisonne de la même manière que précédemment.
Dans le cas d'un tirage successif avec remise, on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_k}(B) = \frac{k \times k}{n \times n}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{\cancel{k} \times k}{n \times n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\, \frac{n+1}{n}\, \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{3}\, \frac{n+1}{n}\, \frac{n+\frac{1}{2}}{n}
\end{aligned}$$

c. $\dfrac{1}{3}\,\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3}\,\dfrac{n+1}{n}\,\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{n}{n}\,\dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{3}$

Dans les deux cas, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{3}$. □

Indépendance d'événements

Exercice 20. (★)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
On munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \\ A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ ne sont pas} \\ \text{indépendants pour } \mathbb{P} \end{array}$$

Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, deux événements incompatibles et tous deux différents de $\varnothing$ ne sont jamais indépendants.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que :

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\,\Omega} \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{Card}\, B}{\text{Card}\,\Omega} \neq 0$.

Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. □

Exercice 22. (★)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$.

Démontrer que tout événement $B \in \mathscr{A}$ est indépendant de A pour $\mathbb{P}$.

Démonstration.
Remarquons que : $A \cap B \subset A$.
On en déduit donc : $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) = 0$.
Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
Ce qui démontre que A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$. □

Indépendance d'événements et encore limite monotone ...

Exercice 35. (★★★) *(adapté de* `oraux - ESCP 2012 - voie S`*)*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note $B = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$. On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité de } A_n\}$$

Enfin, on note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et on suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \neq 0$.
Dans la suite, on suppose que :

× les événements de la suite (A_n) sont mutuellement indépendants,

× la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

a. Montrer que : $\overline{B} = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}$.

b. Exprimer $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.

c. Montrer que la série $\sum \ln(1-p_k)$ diverge vers $-\infty$.
(on pourra distinguer le cas où $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et le cas* $p_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$*)*

Quelle est la limite de $\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1-p_k)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

d. Simplifier $\ln\left(\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k})\right)$ et en déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right) = 0$.

e. Démontrer que la suite $\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

f. En déduire une écriture simplifiée de $\bigcup\limits_{n=1}^{m} \bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}$.

g. Démontrer enfin que B est un événement presque sûr.

Démonstration.

a. D'après les règles de de Morgan :

$$\left(\overline{\bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k}\right) = \bigcup_{n\geqslant 1} \left(\overline{\bigcup_{k\geqslant n} A_k}\right) = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}$$

b. Par indépendance des événements (A_n) et donc de leurs complémentaires :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{m} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{m} (1-p_k)$$

c. Deux cas se présentent.

1) Si $p_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$: alors $\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
Ainsi, la série $\sum \ln(1-p_n)$ est (grossièrement) divergente.

2) Si $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: alors, $\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -p_n$ $(\leqslant 0)$.

× Or, par hypothèse, la série $\sum p_n$ diverge.

× Ainsi, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum \ln(1-p_n)$ diverge.
(la série est à termes de signe constant, négatif ici)

Dans les deux cas, la série $\sum \ln(1-p_n)$ diverge.
Notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1-p_k)$.

- Comme $p_n \in [0,1[$, la série $\sum \ln(1-p_n)$ est à termes négatifs.
- On en déduit que (S_n) est décroissante. Elle n'est pas minorée car sinon (S_n) et donc $\sum \ln(1-p_n)$ serait convergente.

Ainsi, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

d. D'après la question ***b.*** :

$$\ln\left(\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k})\right) = \ln(\prod_{k=n}^{m}(1-p_k)) = \sum_{k=n}^{m} \ln(1-p_k) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Or, par le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$$

Et, par continuité de la fonction exponentielle :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}) = \exp\left(\ln\left(\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k})\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=n}^{m} \ln(1-p_k)\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}) = 0$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} = A_n \cap \left(\bigcap_{k=n+1}^{+\infty} \overline{A_k}\right) \subset \bigcap_{k=n+1}^{+\infty} \overline{A_k}$$

La suite $\left(\bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

f. Notons $C_n = \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}$. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante, pour tout m :

$$\bigcup_{n=1}^{m} \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k} = \bigcup_{n=1}^{m} C_n = C_m = \bigcap_{k\geqslant m} \overline{A_k}$$

g. Par le théorème de la limite monotone :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{B}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{m} C_n\right) \\ &= \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(C_m) = \lim_{m\to+\infty} 0 = 0 \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{d.}\textit{)} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1$

□

Exercice 36. (★★★) *(adapté de* `oraux - ESCP 2012 - voie S`*)*

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 - x \leqslant e^{-x}$.

2) On dispose d'une urne vide au départ.

- × Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!).
- × Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment ...

a. Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{i\in[\![1,\ell]\!]}$ une famille de ℓ événements indépendants.

Montrer que l'on a : $\mathbb{P}(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant \ell} \overline{E_i}) \leqslant e^{-\sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(E_i)}$

b. On note A_k : « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ».
Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$.

c. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage » (où $n \in \mathbb{N}$).
Déterminer la probabilité de cet événement en considérant son contraire.

d. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort une infinité de fois ».
Déterminer la probabilité de cet événement.

e. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort une infinité de fois **de suite** ».
Déterminer la probabilité de cet événement.

Démonstration.

1) La fonction exp est convexe. Sa courbe est donc située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, droite d'équation $y = 1 + x$.
On en déduit que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \ e^u \geqslant 1 + u$$

et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geqslant 1 - x$.
(en prenant $u = -x$)

2) ***a.*** Par indépendance des événements de la suite (E_i) et donc de leurs complémentaires :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant \ell} \overline{E_i}) \;=\; \prod_1^{\ell} \mathbb{P}(\overline{E_i}) \;=\; \prod_1^{\ell}(1-\mathbb{P}(E_i)) \;\leqslant\; \prod_1^{\ell} \mathrm{e}^{-\mathbb{P}(E_i)} \;=\; \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(E_i)}$$

b. • La boule 10 ne peut être tirée avant le $10^{\text{ème}}$ jour.
Donc $\mathbb{P}(A_k) = 0$ si $1 \leqslant k < 10$.

• Le $k^{\text{ème}}$ jour, l'urne contient k boules.
Donc $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{k}$ si $k \geqslant 10$.

c. L'événement A : « le 10 sort au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage » s'écrit $A = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$. Les événements de la suite (A_k) ne sont pas 2 à 2 incompatibles. Par contre, il sont indépendants. Ainsi, on écrit :

$$\mathbb{P}(A) \;=\; 1-\mathbb{P}(\overline{A}) \;=\; 1-\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{k\geqslant n} A_k}\right) \;=\; 1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right)$$

et, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}\right) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$$

D'après la question ***2)a.***, les événements de (A_k) étant indépendants :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n\leqslant k\leqslant m} \overline{A_k}) \;\leqslant\; \exp(-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)) = \exp\left(-\sum_{k=\sup(n,10)}^{m} \frac{1}{k}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
(puisque la série harmonique est divergente et à termes positifs)
Comme $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right) \geqslant 0$, par théorème d'encadrement :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui signifie que $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

d. L'événement B : « le 10 sort une infinité de fois » s'écrit :

$$B \;=\; \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$.

$$B_n \;=\; A_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \;\supseteq\; \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \;=\; B_{n+1}$$

La suite (B_n) est donc décroissante. Ainsi, par le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{m} B_n\right) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_m\right)$$

Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(B_m) \;=\; \mathbb{P}(\bigcup_{k=m}^{+\infty} A_k) = 1$$

Et enfin $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{m\to+\infty} 1 = 1$.
Le 10 sort donc presque sûrement une infinité de fois.

e. L'événement C : « le 10 sort une infinité de fois de suite » s'écrit :

$$C \;=\; \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $C_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$.

$$C_n \;=\; A_n \cap \bigcap_{k=n+1}^{+\infty} A_k \;\subseteq\; \bigcap_{k=n+1}^{+\infty} A_k \;=\; C_{n+1}$$

La suite (C_n) est donc croissante. Ainsi, par le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(C) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{m} C_n\right) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(C_m\right)$$

Enfin : $C_m = \bigcap_{k=m}^{+\infty} A_k = A_m \cap \bigcap_{k=m+1}^{+\infty} A_k \subseteq A_m$. D'où :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(C_m) \leqslant \mathbb{P}(A_m)$$

D'après la question ***2)b.***, $\mathbb{P}(A_m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par théorème d'encadrement, $\mathbb{P}(C_m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(C) = \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(C_m) = 0$$

La probabilité que le 10 sorte une infinité de fois de suite est donc nulle. $\square$

Évolution d'une grandeur aléatoire dans le temps (discret) - chaînes de Markov

Exercice 38. (★★)
Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

a. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

b. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

c. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Démonstration.

- Nommage des événements
  Notons I_n l'événement : « l'information initiale (correcte) est transmise après n transmission ». Ainsi $\overline{I_n}$ est l'événement : « l'information contraire à l'initiale (incorrecte) est transmise après n transmission ».

- Récupération des données de l'énoncé
  Il faut bien comprendre l'énoncé. L'idée est qu'une personne transmet soit l'information telle qu'il l'a obtenue (avec une probabilité p) soit l'information contraire à celle obtenue.

  On en déduit donc :
  × $\mathbb{P}(I_1) = p$,
  × $\mathbb{P}_{\overline{I_n}}(\overline{I_{n+1}}) = p$ donc $\mathbb{P}_{\overline{I_n}}(I_{n+1}) = 1-p$,
  (ces deux quantités existent bien d'après l'énoncé)
  × $\mathbb{P}_{I_n}(I_{n+1}) = p$,
  × $\mathbb{P}(I_n) = p_n$ donc $\mathbb{P}(\overline{I_n}) = 1-p_n$.

- La famille $(I_n, \overline{I_n})$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(I_{n+1}) & = & \mathbb{P}(I_n \cap I_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{I_n} \cap I_{n+1}) \\ & = & \mathbb{P}(I_n) \times \mathbb{P}_{I_n}(I_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{I_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{I_n}}(I_{n+1}) \\ \text{donc} \quad p_{n+1} & = & p_n \times p + (1-p_n) \times (1-p) \\ & = & p\times p_n + 1 - p - p_n + p\times p_n \\ & = & (2p-1)\times p_n + (1-p) \end{array}$$

La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (p_n) est : $x = (2p-1)x + (1-p)$.
  Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

- On écrit :

$$\begin{array}{rcll} p_{n+1} & = & (2p-1) \times p_n + (1-p) & (L_1) \\ \lambda & = & (2p-1) \times \lambda + (1-p) & (L_2) \\ \text{et donc} \quad p_{n+1} - \lambda & = & (2p-1) \times (p_n - \lambda) & (L_1)-(L_2) \end{array}$$

  Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = p_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison $(2p-1)$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} v_n & = & (2p-1)^{n-1} \times v_1 = (2p-1)^{n-1} \times (p_1 - \lambda) \\ & = & (2p-1)^{n-1} \times \left(p - \dfrac{1}{2}\right) \end{array}$$

  On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $p_n = v_n + \lambda = (p - \frac{1}{2})\ (2p-1)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- Or : $0 < p < 1$ donc $0 < 2p < 2$ et $-1 < (2p-1) < 1$.
  (on écarte le cas $p = 0$ et $p = 1$ qu'on pourrait traiter à part)

  Ainsi $(2p-1)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

La probabilité que l'information initiale soit transmise à terme (après une infinité de transmission) est donc de $\frac{1}{2}$.

Cela peut paraître surprenant car ce résultat est indépendant de p. En fait, l'information initiale est transmise correctement s'il y a un nombre pair (éventuellement nul) d'erreurs. Si le nombre de transmission est infini, la probabilité que le nombre d'erreurs soit pair est la même que probabilité que le nombre d'erreurs soit impair. $\square$

Exercice 41. (★★)
Un jeu entre deux joueurs A et B est divisé en parties indépendantes.
À chaque partie, celui qui perd donne un euro au gagnant. La probabilité que A gagne est $p \in]0,1[$ et la probabilité que B gagne est $q = 1-p$.

1. Les joueurs A et B possèdent au total une somme de N euros. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux joueurs est ruiné, c'est-à-dire possède une somme nulle. On note p_k la probabilité qu'a le joueur A, en partant de la somme k supposée entière, d'être ruiné par la suite.

  a) Calculer p_0 et p_N.

  b) Montrer que $p_k = p\,p_{k+1} + q\,p_{k-1}$, pour tout k tel que : $1 \leqslant k \leqslant N-1$.

  c) On suppose $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer que $p_k = \dfrac{N-k}{N}$.

  d) On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $p_k = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$.

  e) Déduire de ce qui précède la probabilité q_k qu'a le joueur B, en partant de la somme $N-k$, d'être ruiné par la suite.
  Calculer $p_k + q_k$. Interpréter le résultat.

2. Le joueur B est infiniment riche et le joueur A dispose d'une somme k.

  a. On suppose $p \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Montrer que la probabilité que le joueur A se ruine est 1.

  b. On suppose $p > \dfrac{1}{2}$.

  Montrer que la probabilité que le joueur A se ruine est : $\left(\dfrac{q}{p}\right)^k$.

Démonstration.

1. a)
- Si le joueur A commence le jeu avec 0 euro, alors il est ruiné dès le début du jeu. Et le jeu s'arrête donc avant d'avoir commencé.
  Ainsi $p_0 = 1$.
- Si le joueur A commence le jeu avec N euros, alors le joueur B commence avec $N - 0 = N$ euros. Et le jeu s'arrête donc avant d'avoir commencé. Ainsi $p_N = 0$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \leqslant k \leqslant N-1$. Notons :
- G_A : « le joueur A gagne la première partie »
- $R_{A,k}^{i}$: « le joueur A finit par être ruiné en possédant à la $i^{\text{ème}}$ partie une somme de k euros ».
- On a notamment $R_{A,k}^{1}$: « le joueur A finit par être ruiné en possédant au départ une somme de k euros » et donc $\mathbb{P}(R_{A,k}^{1}) = p_k$.

Comme $(G_A, \overline{G_A})$ forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_k \;=\; \mathbb{P}(R_{A,k}^{1}) \;=\; \mathbb{P}(G_A \cap R_{A,k}^{1}) \;+\; \mathbb{P}(\overline{G_A} \cap R_{A,k}^{1})$$

- Remarquons tout d'abord que : $G_A \cap R_{A,k}^{1} \;=\; G_A \cap R_{A,k+1}^{2}$

  Si A gagne la première partie et se retrouve ruiné en étant parti de k euros, alors A s'est retrouvé ruiné en commençant la deuxième partie à $k+1$ euros.

  Inversement, si A gagne la première partie et se retrouve ruiné en commençant la deuxième partie à $k+1$ euros, c'est qu'il avait k euros au départ.

- D'autre part, comme $\mathbb{P}(G_A) = p \neq 0$:

$$\mathbb{P}(G_A \cap R^{\,2}_{A,k+1}) \;=\; \mathbb{P}(G_A)\; \mathbb{P}_{G_A}(R^{\,2}_{A,k+1})$$

- Enfin : $\mathbb{P}_{G_A}(R^{\,2}_{A,k+1}) \;=\; \mathbb{P}_{G_A}(R^{\,1}_{A,k+1})$
  En effet, sachant que G_A est réalisé, un jeu réalisant $R^{\,2}_{A,k+1}$:
  × commence par une victoire de A,
  × se poursuit par un jeu où A possède la somme initiale de $k+1$ euros et finit ruiné. Ceci correspond à un jeu réalisant de $R^{\,1}_{A,k+1}$.
- Par un raisonnement similaire : $\overline{G_A} \cap R^{\,1}_{A,k} \;=\; \overline{G_A} \cap R^{\,2}_{A,k-1}$
  Et comme $\mathbb{P}(\overline{G_A}) = q \neq 0$:

$$\mathbb{P}(\overline{G_A} \cap R^{\,2}_{A,k-1}) \;=\; \mathbb{P}(\overline{G_A})\; \mathbb{P}_{\overline{G_A}}(R^{\,2}_{A,k-1}) \;=\; \mathbb{P}(\overline{G_A})\; \mathbb{P}_{\overline{G_A}}(R^{\,1}_{A,k-1})$$

En combinant ces résultats, on obtient :

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{P}(R_{A,k}) & = & \mathbb{P}(G_A) & \mathbb{P}_{G_A}(R^{\,1}_{A,k+1}) & + & \mathbb{P}(\overline{G_A}) & \mathbb{P}_{\overline{G_A}}(R^{\,1}_{A,k-1}) \\ i.e. \quad p_k & = & p & p_{k+1} & + & q & p_{k-1} \end{array}$$

c) et ***d)*** La suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- L'équation caractéristique associée à la suite (p_n) est $x = p\,x^2 + q$.
  Il s'agit donc de chercher les racines du polynôme :

$$P(X) = p\,X^2 - X + q$$

  P a pour disciminant :

$$\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2$$

  Les racines de P sont donc :

$$r_1 = \frac{1-(2p-1)}{2p} = \frac{2(1-p)}{2p} = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+(2p-1)}{2p} = 1$$

  Ces racines ne sont pas forcément distinctes :

$$r_1 = r_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{q}{p} = 1 \;\Leftrightarrow\; q = p \;\Leftrightarrow\; 1-p = p \;\Leftrightarrow\; p = \frac{1}{2}$$

- Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $r_1 \neq r_2$. La formule explicite de (p_n) est donc :

$$\forall n \leqslant N,\; p_n \;=\; \alpha\, {r_1}^n + \beta\, {r_2}^n$$

  où les valeurs α et β sont données par le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcr} p_0 & = & \alpha & + & \beta \\ p_N & = & \alpha\, {r_1}^N & + & \beta\, {r_2}^N \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcrcr} 1 & = & \alpha & + & \beta \\ 0 & = & \alpha \left(\dfrac{q}{p}\right)^N & + & \beta \end{array} \right.$$

  ce qui conduit à $\alpha = \dfrac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$ et $\beta = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^N}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$.

  Et ainsi, pour tout $k \leqslant N$, $p_k = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$.

- Si $p = \frac{1}{2}$, alors $r_1 = r_2 = 1 = r$. La formule explicite de (p_n) est donc :

$$\forall n \leqslant N,\; p_n \;=\; \alpha\, r^n + \beta\, n\, r^n \;=\; \alpha + \beta\, n$$

  où les valeurs α et β sont données par le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcr} p_0 & = & \alpha & & \\ p_N & = & \alpha & + & \beta\, N \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcrcr} 1 & = & \alpha & & \\ 0 & = & \alpha & + & \beta\, N \end{array} \right.$$

  Ainsi $\alpha = 1$ et $\beta = -\dfrac{1}{N}$.

  Et donc, pour tout $k \leqslant N$, $p_k = 1 - \dfrac{k}{N} = \dfrac{N-k}{N}$.

e) Un jeu au cours duquel le joueur A finit ruiné en partant de la somme k correspond à un jeu au cours duquel le joueur B finit ruiné en partant de la somme $N-k$.
Pour obtenir q_k, il suffit donc de reprendre l'étude précédente en remplaçant p par q et k par $N-k$.

- Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $q_k = \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^N - \left(\frac{p}{q}\right)^{N-k}}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1}$.

  Soit en multipliant numérateur et dénominateur par $\left(\dfrac{q}{p}\right)^N$:

$$q_k = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

- Si $p = \frac{1}{2}$, alors $q_k = \dfrac{k}{N}$.

  Dans les deux cas, on obtient $p_k + q_k = 1$. La probabilité que l'un des joueurs soit ruiné, c'est-à-dire que la partie s'arrête au bout d'un nombre fini de coups, est égale à 1.
  Le jeu s'arrête donc presque sûrement.

2. Étudier la situation quand le joueur B est infiniment riche, c'est étudier la limite de p_k quand N tend vers $+\infty$.

- 1^er^ cas : si $\dfrac{q}{p} > 1$ ($\Leftrightarrow\ q > p\ \Leftrightarrow\ 1 - p > p\ \Leftrightarrow\ p < \frac{1}{2}$)
  Or, on rappelle que :

$$p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{N-k}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}$$

  Or $\dfrac{q}{p} > 1$ donc $0 < \dfrac{p}{q} < 1$. On en déduit que :

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^N = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{N-k} = 0$$

  Et ainsi : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} p_k = \lim_{N \to +\infty} \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{N-k}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} = \frac{1}{1} = 1.$

- $2^{\text{ème}}$ cas : $p = \frac{1}{2}$.
  On a alors : $p_k = \dfrac{N-k}{N} \underset{N \to +\infty}{\sim} \dfrac{N}{N} = 1$.
  Ainsi, on obtient encore : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} p_k = 1$.

- $3^{\text{ème}}$ cas : $\dfrac{q}{p} < 1$, c'est-à-dire $p > \frac{1}{2}$.
  Comme $0 < \dfrac{q}{p} < 1$, $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^N = 0$. Ainsi :

$$\lim_{N \to +\infty} p_k = \lim_{N \to +\infty} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} = \left(\frac{q}{p}\right)^k$$

□

Exercice 42. (★★)
Deux joueurs A et B jouent aux échecs sans discontinuer.

- Le joueur B gagne la première partie.
- La probabilité que A remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,6$.
- La probabilité que B remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,5$.

On note p_n la probabilité que B remporte la $n^{\text{ème}}$ partie.

Montrer que (p_n) est arithmético-géométrique et donner sa formule explicite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Nommage des événements
  Notons B_n l'événement : « le joueur B remporte la $n^{\text{ème}}$ partie ».
  Ainsi $\overline{B_n}$ est l'événement : « le joueur A remporte la $n^{\text{ème}}$ partie ».

- Récupération des données de l'énoncé
  D'après l'énoncé :
  × $\mathbb{P}(B_1) = 1$,
  × $\mathbb{P}_{\overline{B_n}}\left(\overline{B_{n+1}}\right) = 0,6$ donc $\mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0,4$,
  × $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = 0,5$,
  × $\mathbb{P}(B_n) = p_n$ donc $\mathbb{P}(\overline{B_n}) = 1 - p_n$.

- La famille $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B_{n+1}) & = & \mathbb{P}(\ B_n \cap B_{n+1}\ ) \quad + \quad \mathbb{P}(\ \overline{B_n} \cap B_{n+1}\ ) \\ & = & \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{B_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ \text{donc} \quad p_{n+1} & = & p_n \times 0,5 + (1-p_n) \times 0,4 \\ & = & 0,5 \times p_n + 0,4 - 0,4 \times p_n \\ & = & 0,1\ p_n + 0,4 \ = \ \dfrac{1}{10}\ p_n + \dfrac{4}{10} \end{array}$$

La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (p_n) est : $x = \dfrac{1}{10}x + \dfrac{4}{10}$.
  Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{4}{9}$.
- On écrit :

$$\begin{array}{rcll} p_{n+1} & = & \dfrac{1}{10} \times p_n + \dfrac{4}{10} & (L_1) \\ \lambda & = & \dfrac{1}{10} \times \lambda + \dfrac{4}{10} & (L_2) \\ \text{et donc} \quad p_{n+1} - \lambda & = & \dfrac{1}{10} \times (p_n - \lambda) & (L_1) - (L_2) \end{array}$$

  Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = p_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl} v_n & = & \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} \times v_1 \ = \ \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} \times (p_1 - \lambda) \\ & = & \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} \times \left(1 - \dfrac{4}{9}\right) \ = \ \dfrac{5}{9}\ \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} \end{array}$$

  On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n \ = \ v_n + \lambda \ = \ \dfrac{5}{9}\ \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{9}$.

- Or : $-1 < \dfrac{1}{10} < 1$. Ainsi $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

  On en déduit que $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{4}{9}$.

Ainsi, la probabilité que le joueur B remporte à terme la partie est de $\dfrac{4}{9}$. □