Feuille d'exercices n°14 : Espaces vectoriels normés

Exercice 1 *(d'après* `E3A 2020 MP`*)*

1. On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes aX^2+bX+c dont on note s_1 et s_2 les racines.

Donner, sans démonstration, les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ à l'aide des coefficients a, b et c.

2. Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

On note r_1 et r_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1, r_2 et n.
On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1.

* * * * **

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E.

On définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\begin{array}{lll} & \forall x \in \mathscr{C},\ S(x) = z, & \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n} \\ \text{et} & \forall x \in \mathscr{C},\ T(x) = y, & \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1} \end{array}$$

3. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.

4. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

5. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, elle est bornée.

6. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même de S.

7. Soient $F = \{x \in \mathscr{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathscr{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = -x_{-n}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}$.

8. <u>Étude de l'endomorphisme S</u>
Prouver que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

9. <u>Étude de l'endomorphisme T</u>
On rappelle qu'une suite x est dans $\mathscr{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

- ***a)*** Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$ où $0_{\mathscr{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathscr{C}$.
On pourra utiliser les questions de cours.
- ***b)*** L'endomorphisme T est-il injectif ?
- ***c)*** Déterminer $\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $\mathrm{Ker}(T + 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.
- ***d)*** Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T.

10. On munit $\mathscr{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathscr{C}$, $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.
Soit N l'application qui, à tout élément x de $\mathscr{C}$, associe $N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.

- ***a)*** Vérifier que, pour tout x de $\mathscr{C}$, $N(x)$ existe.
- ***b)*** Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathscr{C}$.
- ***c)*** Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}, N)$. Est-elle continue ?
- ***d)*** Prouver que, dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.
- ***e)*** Les deux normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 *(d'après* `E3A 2022 MP`*)*

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ dont la norme est notée $\| \cdot \|$.

1. **Questions de cours**

a) Soient x et y deux vecteurs de E. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.

On pourra utiliser la fonction $t \mapsto \|x+ty\|^2$.

b) Démontrer qu'on a l'égalité $|\langle x \mid y \rangle| = \|x\| \, \|y\|$ **si, et seulement si,** les vecteurs x et y sont colinéaires.

c) On considère $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique $\langle X \mid Y \rangle = X^\top Y$.

Écrire cette inégalité pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

* * * * * **

$\boxed{\text{Pour toute la suite de l'exercice, on identifie } \mathbb{R}^n \text{ et } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\| \leqslant 1\}$.
On considère l'application F de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \; F(X) = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} x_i \, x_j$$

Par exemple, pour $n = 3$:

$$F(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

2. Exprimer alors $F(X)$ à l'aide de $S_1(n) = \sum_{i=1}^n x_i$ et de $S_2(n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

3. Montrer que F possède un maximum sur B que l'on notera M.

4. Montrer en utilisant la question 1. que $M = n - 1$.

5. Déterminer tous les $X \in B$ tels que $F(X) = M$.

Partie 2

- On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique orthonormale pour le produit scalaire $\langle X \mid Y \rangle = X^\top Y$ de $\mathbb{R}^n$.
- Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\mathbb{R}^n$ décomposés dans la base $\mathscr{B}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose : $\varphi(X,Y) = \dfrac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \left(x_i \, y_j + x_j \, y_i\right)$.
- Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi(X,Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.

6. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ exprimer $F(X)$ à l'aide de φ.

7. écrire la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ par $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

8. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

9. Vérifier que pour tout couple de vecteurs (X,Y) de $(\mathbb{R}^n)^2$, on a $\varphi(X,Y) = Y^\top A\,X = X^\top A\,Y$.

10. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 .

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice J.

b) En déduire une matrice diagonale Δ semblable à la matrice A.

11. Donner l'expression de $\varphi(X,Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans la base $\mathcal{U}$.

12. Retrouver alors le résultat établi à la question 4.

Exercice 3 *(d'après* `CCINP 2023 - MPI-1`*)*

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$N(A) \;=\; \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{i,j}\,|$$

1. Démontrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie, par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\; \|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\, x_i\,|$$

On note S la sphère unité définie par : $S = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,|\, \|X\|_\infty = 1\}$.

2. Démontrer :

$$\forall X \in S, \forall A \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leqslant N(A)$$

En déduire, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'existence de $\sup\limits_{X\in S} \|AX\|_\infty$.

On pose alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \sup\limits_{X\in S} \|AX\|_\infty$.

3. Démontrer :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leqslant |||A|||\, \|X\|_\infty$$

4. Démontrer :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\; |||A||| = N(A)$$

5. **Application**. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $|||A|||$.

Exercice 4 *(d'après* `CCINP 2012 - MP-1`*)*

- On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2\,|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
De même, $\|\cdot\|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.

2. ***a)*** Donner la définition de deux normes équivalentes.

b) Démontrer que les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes sur E.

3. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|$?

Exercice 5 *(d'après* `CCINP 2020 - MP-1`*)*

- On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0,1,2\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\; t_n \in \{0,1,2\}$$

- On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \big(|u_n|\big)$.
- On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y.

1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞.

2. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{3^n}$ est convergente.
On note alros :

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}$$

3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Exercice 6 *(d'après* `Centrale 2021 - MP2`*)*

Dans la suite, on note :

- × on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- × pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$;
- × on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$;
- × pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$.

On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $\big(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x\, \xi}\, dx$$

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire continue de l'espace vectoriel normé $\big(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(\lambda x)$$

Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ, exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ.

Exercice 7 *(d'après* `Centrale 2017 - PSI-2`*)* **Notations**

- On identifie $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ représente l'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\mathrm{tr}(M)$ est la trace de la matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrice triangulaires supérieures d'ordre n.
- $0_{1,n}$ est la matrice ligne de taille n dont tous les coefficients sont nuls.
- Pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\|Y\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i|$.
- Pour toute matrice $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|C\|_0 = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |c_{i,j}|$.

On rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$ et que $\|\cdot\|_0$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

- Si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont deux matrices colonnes de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$, on note $[A, B]$ la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Préliminaire

1. Une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite périodique s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ z_{k+p} = z_k$$

L'entier p est alors une période de la suite (z_k) qui est dite p-périodique.

a) Vérifier qu'une suite périodique est bornée.

b) Que peut-on dire des suites 1-périodiques ?

c) Vérifier que, si (z_k) est p-périodique, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_{n+kp} = z_n$.

d) Que peut-on dire des suites qui sont à la fois périodiques et convergentes ?

2. Vérifier les deux propriétés suivantes.

a) $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\|_0 \leqslant n\, \|A\|_0 \times \|B\|_0$.

b) $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall Y \in \mathbb{C}^n$, $\|AY\|_\infty \leqslant n\, \|A\|_0 \times \|Y\|_\infty$.

Exercice 8

- Soit $(\mathscr{A},+,\times,.)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, c'est-à-dire $(\mathscr{A},+,\times)$ est un anneau et $(\mathscr{A},+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, tel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in \mathscr{A}^2,\ (\alpha \cdot x) \times y = x \times (\alpha \cdot y) = \alpha \cdot (x \times y)$$

où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

- Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathscr{A}$, $\|\cdot\|$ est appelée une norme sous-multiplicative de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{A}$, si :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{A}^2,\ \|x \times y\| \ \leqslant\ \|x\|\ \|y\|$$

- Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels non nuls.
- On rappelle que, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes.
- Si $n=p$, alors $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on rappelle aussi que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, muni de ses opérations usuelles, est une $\mathbb{K}$-algèbre.
- Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^0=I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ A^{n+1}=AA^n$, où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Étude de quelques normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On définit sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la norme notée $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \|A\|_\infty = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \left(|a_{i,j}| \right)$$

1. Montrer : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \|A\,B\|_\infty \leqslant n\,\|A\|_\infty\ \|B\|_\infty$.

2. Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a) On pose $\left(E_i^j\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $X=(x_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer : $N(X) \leqslant \left(\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}} N\left(E_i^j\right) \right) \|X\|_\infty$.

b) (i) Montrer que N est une fonction continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.

(ii) On pose $S_\infty = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \|X\|_\infty = 1\}$.
Montrer qu'il existe $X_0 \in S_\infty$ tel que : $\forall X \in S_\infty, N(X_0) \leqslant N(X)$.

(iii) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \alpha\|X\|_\infty \leqslant N(X)$.

c) En déduire que toutes les normes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

3. Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif β tel que

$$N(AB) \leqslant n\,\beta\,\|A\|_\infty\ \|B\|_\infty$$

b) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que

$$N(AB) \leqslant n\,\frac{\beta}{\alpha^2}\ N(A)\ N(B)$$

c) En déduire qu'il existe un réel strictement positif γ tel que γN soit une norme sousmultiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Soit N une norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$\|A\| = \sup\ \left\{ \frac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ \setminus\ \{0\} \right\}$$

a) (i) Justifier, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'existence de $\|A\|$.

(ii) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\|A\| = \sup\ \{N(AX) \mid X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ N(X)=1\}$$

(iii) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b) (i) Montrer : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ N(AX) \leqslant \|A\|\ N(X)$.

(ii) En déduire : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \|A\,B\| \ \leqslant\ \|A\|\ \|B\|$.

Suites de matrices

On rappelle que si $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si A est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers A si la suite réelle $\Big(\|A_m - A\|\Big)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, où $\|\cdot\|$ est une norme donnée sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on écrit dans ce cas $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = A$.

5. Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m\in\mathbb{N}$, $A_m = \left(a_{i,j}^{(m)}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

6. Montrer que la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers A si, et seulement si, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant p$, la suite $\left(a_{i,j}^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.

En cas de convergence, on écrit $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = \left(\lim\limits_{m\to+\infty} a_{i,j}^{(m)}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

7. Soit α un réel, on pose pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $A_m = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, il existe $C_m\in\mathbb{R}$ et $\theta_m \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$$A_m = C_m \begin{pmatrix} \cos(\theta_m) & -\sin(\theta_m) \\ \sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix}$$

b) Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m^m$.

Séries de matrices

Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On pose pour $m\in\mathbb{N}$, $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} A_k$. On dit que la série de terme général A_m converge si la suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge, sinon la série est dite divergente. En cas de convergence, la limite de la suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ se note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.

On dit que la série de terme général A_m est absolument convergente, si la série numérique de terme général $N(A_m)$ converge, avec N une norme définie sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

8. Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m\in\mathbb{N}$, $A_m = \left(a_{i,j}^{(m)}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Montrer que la série de terme général A_m converge si, et seulement si, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant p$, la série de terme général $a_{i,j}^{(m)}$ converge.

En cas de convergence, on écrit $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} A_m = \left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{i,j}^{(m)}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

9. Montrer que toute série absolument convergente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est convergente.

10. Soit A une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} A^m$ converge.

Montrer que $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} A^m$ est inversible et déterminer son inverse.

11. On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} B^m$ est convergente et déterminer sa valeur.

b) En déduire l'inverse de $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} B^m$.

Exponentielle d'une matrice

12. Montrer que, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série de terme général $\dfrac{1}{m!}A^m$, $m \in \mathbb{N}$, est convergente.

Par la suite, on appelle l'exponentielle d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice notée $\exp(A)$, telle que $\exp(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{1}{m!}\ A^m$.

Dans toute la suite du problème, on note exp l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

13. Soit S une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $S^2 = I_n$.

Déterminer $\exp(S)$ en fonction de I_n et de S.

14. ***a)*** Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = BA$.

Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\ \exp(B)$.

b) En déduire que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ est une matrice inversible et déterminer son inverse en fonction de A.

15. On note, pour tout $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, $\mathrm{Diag}\,(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, la matrice diagonale $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = \beta_i$.

a) Montrer : $\forall\,(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, $\exp\left(\mathrm{Diag}\,(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right) = \mathrm{Diag}\,(e^{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

b) Montrer : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P$.

c) Soit $T = (t_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure.

Montrer : $\exp(T) = \left(t'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est aussi une matrice triangulaire supérieure telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t'_{i,i} = \mathrm{e}^{t_{i,i}}$.

d) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer : $\det(\exp(A)) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$, où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice A.

e) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, pour tout réel t, déterminer $\exp(tA)$.

Exercice 9

- Dans ce problème, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$. Le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se notera $<,>$ et la norme associée sera notée $\|\cdot\|$; il est défini par $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle = {}^t yx$.
- On considère une application continue $A : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle A(t)\ x, x\rangle = {}^t xA(t)x \geqslant 0$$

- On note Σ_A l'ensemble des applications $F : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux fois dérivables et vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F''(t) = A(t)F(t) \tag{1}$$

Structure de l'ensemble Σ_A

On considère l'application $B : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A(t) & 0 \end{pmatrix}$

L'application B est continue puisque l'application A l'est aussi. On note alors Σ_B l'espace vectoriel réel des solutions sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle :

$$x' = B(t)\ x \tag{2}$$

Si $F : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une application deux fois dérivable, on lui associe l'application $x_F : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, x_F(t) = \begin{pmatrix} F(t) \\ F'(t) \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que Σ_A est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Détermination de la dimension de Σ_A

a) Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une application deux fois dérivable.

Montrer que $F \in \Sigma_A$ si, et seulement si, $x_F \in \Sigma_B$.

b) Montrer que l'application $\Phi : \Sigma_A \to \Sigma_B, F \mapsto x_F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

c) En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel Σ_A.

3. Montrer que, pour tout triplet $(s,u,w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique application F, élément de Σ_A, telle que $F(s) = v$ et $F'(s) = w$.

Quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle (1)

4. Soit $F \in \Sigma_A$; on lui associe l'application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \geqslant 0,\ f(t) = \|f'(t)\|^2$$

a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer sa dérivée seconde.

b) En déduire que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

5. On conserve les hypothèses et les notations de la question *2.1.* précédente ; on suppose de plus qu'il existe un couple $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant t_1 < t_2$ et $F(t_1) = F(t_2) = 0$.

a) Montrer que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $f(t) = 0$.

b) Montrer que la fonction F est nulle.

6. **Une famille de solutions non bornées de** (1)

Soit $v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note F_v l'élément de Σ_A tel que $F_v(0) = F_v'(0) = v$.

Montrer que si $v \neq 0$ alors la fonction $t \mapsto \|F_v(t)\|$ admet une limite infinie en $+\infty$.

7. **Des normes sur** Σ_A

Soit b un réel strictement positif.

a) Montrer que l'application $\Psi : \Sigma_A \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $F \mapsto (F(0), F(b))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

b) Montrer que l'application $\|.\|_b : F \mapsto \|f(0)\| + \|F(b)\|$ est une norme sur Σ_A.

c) Montrer également que l'application $\|\cdot\|_{\infty,b} : F \mapsto \sup\limits_{0<t<b} \|F(t)\|$ est une norme sur Σ_A.

d) Justifier que les normes $\|\cdot\|_{\infty,b}$ et $\|\cdot\|_b$, sur Σ_A, sont équivalentes.

Exercice 10 *(d'après* `Mines 2023 - MP1`*)*

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $k \in \mathbb{N}^*$, u^k désigne l'application $u \circ \ldots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1. Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|$$

2. On note : $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

3. Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire :

$$\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E))^2,\ |||uv||| \leqslant |||u||| \times |||v|||$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $|||u|||$ et de l'entier k.

Exercice 11 *(d'après* `CCINP 2015 - MP-1`*)*

- Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.
- On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.
- Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

Partie 1. Exemples et contre-exemples

1. On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,1]$.

Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

2. Soit N entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[a,b]$, de degré inférieur ou égal à N. Justifier que $\mathscr{P}_n$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

3. Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ N_1(P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x\in[1,2]} |P(x)|$$

a) Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
On admettra que N_2 en est également une.

b) On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ ainsi :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & si\ x \in [-1,1] \\ x^3 & si\ x \in [1,2] \end{cases}$$

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.

Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.

Exercice 12 *(d'après* `CCINP 2014 - PSI-1`*)*

- On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

- On note $E_1 = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

1. **Comparaison des normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$**

a) Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1.

b) Montrer :

$$\forall f \in E_1,\ \|f\|_\infty \leqslant \|f\|$$

c) Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?

2. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$

a) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

b) On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$

c) L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|_\infty)$?

d) L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|)$?

Exercice 13 *(d'après* `CCINP 2014 - PC-1`*)*

Norme subordonnée et mesure de Lozinskiĭ

- Soit n un entier naturel non nul. Dans toute cette partie, on note $\|\cdot\|$ une certaine norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.
  On définit l'ensemble : $\mathscr{B} = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$.
- Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit : $|||A||| = \sup\limits_{x\in\mathscr{B}} (\|Ax\|)$ (l'existence de cette borne supérieure sera établie dans la question II.1.c).
- **On admet que** l'application $A \mapsto |||A|||$ définit ainsi une norme $|||\cdot|||$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui s'appelle la norme subordonnée à $\|\cdot\|$: en effet, elle dépend du choix de la norme $\|\cdot\|$.

1. ***a)*** Rappeler la définition d'une norme sur $\mathbb{K}^n$.

b) Vérifier que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

c) Montrer l'existence de $x_0 \in \mathscr{B}$ tel que : $\forall x \in \mathscr{B}, \|Ax\| \leqslant \|Ax_0\|$.
Cela justifie donc la définition de $|||A||| = \sup\limits_{x\in\mathscr{B}} (\|Ax\|)$ et on a alors $|||A||| = \|Ax_0\|$.

d) Montrer que $|||I_n||| = 1$.

e) Établir que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|Ax\| \leqslant |||A|||.\|x\|$.

f) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$|||A||| - |||B||| \leqslant |||A - B||| \qquad \text{et} \qquad |||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||.$$

2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $\mathrm{Re}(\lambda) = \lim\limits_{u\to 0^+} \left(\frac{|1+u\lambda|-1}{u}\right)$.

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose dans cette question de montrer l'existence du réel :

$$\mu(A) = \lim_{u\to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA||| - 1}{u}\right)$$

Ce réel est appelé mesure de Lozinskiĭ de A (il dépend du choix de la norme initiale). Pour $u > 0$, on note $\mu(A, u) = \dfrac{|||I_n + uA||| - 1}{u}$.

a) Montrer que pour tout u et v éléments de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) = |||u^{-1}I_n + A||| - |||v^{-1}I_n + A||| - (u^{-1} - v^{-1})$$

b) En déduire que si $0 < u \leqslant v$, alors $\mu(A, u) - \mu(A, v) \leqslant 0$.

c) Vérifier que pour tout $u > 0$, on a : $-|||A||| \leqslant \mu(A, u) \leqslant |||A|||$.

d) En déduire l'existence du réel $\mu(A) = \lim\limits_{u\to 0^+} (\mu(A, u))$.

4. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

a) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$ et puis que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\|((I_n + uA)x)\| = |1 + u\lambda|$.

b) En déduire que $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant \mu(A)$.

c) Donner une condition suffisante sur $\mu(A)$ pour que A soit stable.

Exercice 14
Étudier la convergence de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ lorsque l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

a. $\|P\| = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\, dt.$ ***b.*** $\|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|.$

Exercice 15
Étudier la continuité de l'évaluation $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$, lorsque :

a. l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|P\| = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\, dt.$

b. l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$$

Exercice 16 *(d'après* `EPITA 2024`*)*

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, son coefficient en ligne i et colonne j sera noté $(A)_{i,j}$ ou $A_{i,j}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par : $\|A\|_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |A_{i,j}|$.

On définit pour tout entier naturel k le polynôme : $E_k(X) = \sum\limits_{p=0}^{k} \dfrac{1}{p!} X^p$.

On définit l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ comme étant, lorsqu'elle existe, la limite de la suite $\left(\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} A^p\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

5. Démontrer : $\forall (A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right)^2$, $\|AB\|_\infty \leqslant n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

6. Démontrer par récurrence : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\|A^p\|_\infty \leqslant n^{p-1} \|A\|_\infty^p$.

7. Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\left(E_k(A)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

8. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Démontrer : $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

9. Soit $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right)^2$ et soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que : $A = P\,B\,P^{-1}$. Démontrer : $e^A = P\,e^B\,P^{-1}$.

10. En reprenant la matrice A de la partie I, déterminer e^A.

11. Soit A et soit B deux matrices qui commutent.

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$: $\Delta_N = \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} B^j\right) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(A+B)^k}{k!}$.

Démontrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$: $\Delta_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leqslant i \leqslant N \\ 0 \leqslant j \leqslant N}} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j$ et

en déduire : $e^{A+B} = e^A\,e^B$.

12. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que e^A est inversible et déterminer son inverse.