Feuille d'exercices n°11 : Intégrales à paramètre

Exercice 1 *(d'après* `CCINP 2019 - PSI`*)*

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)}\, dt$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.

4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

5. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(1-ikx)}$$

6. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.

7. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $\left| g^{(p)}(0) \right| \geqslant p^{2p}\, \mathrm{e}^{-p}$.

8. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?

Partie II – Le théorème de Borel

9. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}$$

10. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \dfrac{1}{x-i}$.

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}$$

11. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p-ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

12. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p-1}| \leqslant 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$$

En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}$$

13. Pour tout réel α, notons φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$|\alpha| \cdot \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{a_n\, x^n}{1 + n!\, a_n^2\, x^2}$$

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, tout entier $n \geqslant p$ et tout réel x, on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}\, \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$$

15. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

16. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel x, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}\, p!\, 2^n$$

17. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

18. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geqslant 1$, on a :

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!\, a_p$$

19. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle.

Exercice 2 *(d'après* `CCINP 2020 - PSI`*)*

Partie I – Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx}\, dt$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin(t)\, dt$ et $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(t)\, dt$.

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

5. Trouver une expression simple pour G et pour H.
(on pourra calculer $H(x) + iG(x)$)

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(\alpha t)\, dt$.

6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Partie II – Autour de la formule de Viète

7. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)}$$

8. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\tfrac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right)$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a)\ \cos(b) = \frac{1}{2}\ (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

9. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

10. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \mathrm{e}^{-tx}\, dt$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \,]0, +\infty[,\ f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \mathrm{e}^{-tx}$$

11. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

12. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leqslant \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

14. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question 11.

Exercice 3 *(d'après* `CCINP 2022 - PSI`*)*

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

1. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la **??** que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge et donner sa limite.

2. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

4. Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.

Exercice 4 *(d'après* `CCINP 2016 - MP`*)*

Partie préliminaire

1. ***a)*** Soit $x \in \,]0,+\infty[$.
Démontrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) On note alors, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,dt$$

(fonction Gamma d'Euler)

Démontrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0$.

c) Démontrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{n}$.

a) Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* (γ est appelée constante d'Euler).

Dans la suite de ce problème, on définit, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$:

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

3. Pour $x \in \,]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\forall t \in \,]0,+\infty[,\ f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & si\ t \in \,]0,n] \\ 0 & si\ t \in \,]n,+\infty[\end{cases}$$

a) Démontrer que, pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leqslant -x$.
En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$ et tout $t \in \,]0,+\infty[$:

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$$

b) En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \,]0,+\infty[$:

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du$$

a) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geqslant 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \,]0,+\infty[$, une expression de $I_n(x)$.

c) Démontrer que, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)} \quad \textit{(formule de Gauss)}$$

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note toujours $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \,]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \mathrm{e}^{x\, H_n} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{x}{k}\right) \mathrm{e}^{\frac{-x}{k}} \right)$$

démontrer que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma\, x} \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \tfrac{x}{k}\right) \mathrm{e}^{\frac{-x}{k}} \right)$$

(formule de Weierstrass)

6. ***a)*** En déduire que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

b) On pose, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$: $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right)$.

Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

c) En déduire que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:

$$\psi(x) = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

On rappelle que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

7. ***a)*** Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\, dt$.

b) Calculer, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $\psi(x+1) - \psi(x)$, puis démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\psi(n) = -\gamma + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$.

c) On pose, pour tout $(x, y) \in \,]0, +\infty[^2$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$j_k(y) = \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}$$

Démontrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} j_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi(x+n) - \psi(1+n)$.

8. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $\times$ $f(1) = -\gamma$,
- $\times$ pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{x}$,
- $\times$ pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

Exercice 5 *(d'après* `CCINP 2020 - PC`*)*
L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

et de calculer sa valeur.
On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \ f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-xt}$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \ u(x,t) = -\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2}\, \mathrm{e}^{-xt}$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

3. Soit $x \geqslant 0$.
Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\ dt$$

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

4. Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

5. Soit $a > 0$.
Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a,+\infty[,\ F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\ dt$$

6. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1],\ F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\ dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\ dt.$$

7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

8. Soit $x \in [0,1]$.
Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}\mathrm{e}^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\ dt$$

9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.