Feuille d'exercices n°5 : Intégrales à paramètre

Régularité des intégrales à paramètre

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.

2. Justifier que f tend vers 0 en $+\infty$.

3. Démontrer que f est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2 *(d'après* `CCINP 2019 - PSI`*)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\,dt$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.

4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Exercice 3 *(d'après* `oraux CCINP MP`*)*

1. Énoncer le théorème sous le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

b) Résoudre (E).

Exercice 4 *(d'après* `oraux CCINP MP`*)*

On pose : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = e^{-t}\,t^{x-1}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$.

2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3. Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 5 *(d'après* `CCINP 2016 - MP`*)*

1. Soit $x \in]0,+\infty[$.
Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}\,t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. On note alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

(fonction Gamma d'Euler)

Démontrer : $\forall x \in]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0$.

3. Démontrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 6 *(d'après* `CCINP 2015 - PSI`*)*

1. **L'intégrale de Gauss**

a) Montrer que l'intégrale de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est convergente sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ dt\right)^2,\ G(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2\,(t^2+1)}}{t^2+1}\ dt$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, puis préciser les dérivées d'ordre 1 de F et de G.

c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F'(x) + G'(x) = 0$$

et en déduire la valeur de $F + G$.

d) Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

e) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt\ =\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. **Les fonctions u et v**

a) Montrer que les fonctions :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\ \cos(t\,x)}{\sqrt{x}}\ dx \quad \text{et} \quad v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\ \sin(t\,x)}{\sqrt{x}}\ dx$$

sont bien définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *(d'après* `CCINP 2020 - PSI`*)*

Pour $x > 0$, on note : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\ dt$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\ dt$ et $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(t)\ dt$.

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de G.

5. Trouver une expression simple pour G et pour H.
(on pourra calculer $H(x) + iG(x)$)

En déduire, pour $\alpha \in\ ]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \cos(\alpha t)\ dt$.

6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Exercice 8 *(d'après* `Centrale 2023 - PSI`*)*

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2}}{t^2+1}\ dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$$

2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

4. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\,g'(x)\ g(x)$$

6. Vérifier : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \big(g(x)\big)^2$.

7. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}\, dt$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et étudier les variations de f.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 10

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et démontrer que f est continue sur ce domaine de définition.

2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x > 1$:

$$f'(x) \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{t^x\ \ln(t)}{\left(1+t^x\right)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt$$

En déduire le sens de variation de f.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 11 *(d'après* `CCINP 2023 - PSI`*)*

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{\pi} \cos\big(x\ \sin(t)\big)\ dt$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème de convergence dominée

Exercice 12 *(d'après* `oraux CCINP MP`*)*

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\, dt$.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 13 *(d'après* `oraux CCINP MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.

2. ***a)*** Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Théorème d'intégration terme à terme

Exercice 14 *(d'après* `oraux CCINP MP`*)*

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes.

On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n\ t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

1. ***a)*** Justifier que la suite (a_n) est bornée.

b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. ***a)*** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\ dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right|\ dt$.

b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\ t^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t}\right)\ dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 15 *(d'après* `oraux CCINP MP`*)*

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto t^n\ \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\ \ln(t)\ dt$.

2. Prouver que $f : t \mapsto \mathrm{e}^t\ \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t\ \ln(t)\ dt \ = \ -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ n!}$$

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Exercice 16

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 - t^2}\ dt \ = \ -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 17

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\ \mathrm{e}^{-nt}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^n\ \ln(n)}$.

Démontrer : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} f_n(t)\ dt\right)$.

Exercice 18

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 - t^2}\ dt \ = \ -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Cas où le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas

Exercice 19

On étudie dans cet exercice deux cas où on ne peut directement appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la suite (f_n) et où il faut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n).

1. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n \, t^{n+a}$.
On souhaite démontrer :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t) \, dt \right)$$

a) Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

b) Conclure.
(on pourra appliquer le théorème de convergence dominée convenablement)

2. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n \, t^{a\,n}$.
On souhaite démontrer :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t) \, dt \right)$$

a) Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

b) Conclure.
(on pourra appliquer le théorème de convergence dominée convenablement)

Énoncés du concours E3A

Exercice 20 *(d'après* `E3A 2024 MPI`*)*

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On note, pour $f \in E$, $N_0(f) = \sup \, \{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1. Questions de cours

Rappeler l'ensemble de définition, la parité, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

2. En déduire le tableau des variations de la fonction arctan ainsi que l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant apparaître sa tangente en 0 et ses éventuelles asymptotes.

3. Justifier que arctan est élément de E et donner N_0 (arctan).

4. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan(v(t)\ )$.
On rappelle que la dérivée de la fonction composée de deux fonctions u et v dérivables est la fonction définie par $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$ *sur un intervalle correctement choisi.*

5. Déterminer une expression simple de la fonction $t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$.

6. Soit f une fonction de E.

a) Montrer que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \arctan(x\,t) \, \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(x\,t) \, \frac{f(t)}{1+t^2} \, dt$$

Montrer que $\Phi(f)$ appartient à E.

c) Montrer que l'on peut se restreindre à l'intervalle $[0, +\infty[$ pour l'étude de la fonction $\Phi(f)$.

7. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme Φ de E.

8. Montrer que pour tout $f \in E, \Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

9. Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

b) Pour tout $x > 0$, exprimer $g'(x)$ sous forme intégrale.

c) Pour tout $x > 0$, simplifier l'expression : $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 21 *(d'après* `E3A 2023 PC`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(t\,x)\,dt$.

1. Étudier la parité des fonctions I_n.

2. Prouver que les fonctions I_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n'(x) = -\dfrac{x}{2(n+1)}\, I_{n+1}(x)$.

4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel k, que la fonction I_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Soit n un entier naturel fixé.

5. **Calcul de** $I_n(0)$

a Déterminer, pour tout entier naturel p, une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$.

b En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.

6. Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\; k!\; (n-k)!}$.

Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.

7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction $u \mapsto \cos(u)$.

8. Montrer que la fonction I_n est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.

Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.

9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on sur la fonction I_n ?

Exercice 22 *(d'après* `E3A 2023 PSI`*)*

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.

Questions de cours

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donner le module et un argument du nombre complexe $\mathrm{e}^{i\,\theta}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, démontrer : $\sin(n\,\pi + t) = (-1)^n\; \sin(t)$.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

a) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ converge.

b) Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant p} (-1)^n a_n$ converge.

Sa somme sera notée T_p.

c) Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

d) Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

* * * * *

5. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

On rappelle que si ϕ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{i\phi(x)}$ est la fonction $x \mapsto i\,\phi'(x)\;\mathrm{e}^{i\,\phi(x)}$.

a) Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On vérifiera les hypothèses du théorème utilisé.

b) Démontrer que pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{i\mathrm{e}^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{i\,u^2}\;du$$

Exercice 23 *(d'après* `E3A 2023 MP`*)*

Questions de cours

1. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

(A) $\mathrm{e}^{b\ln(a)}$,

(B) $\mathrm{e}^{a\ln(b)}$,

(C) $\mathrm{e}^{\ln(a)\ \ln(b)}$.

2. Soient x et y deux réels tels que $x < y$ et t un réel de $]0,1[$.
Comparer t^x et t^y.

3. Donner, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle et donner son domaine de validité.

4. On considère la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

On admet que cette fonction est définie sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

* * * * *

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x}\,dt$$

où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

5. ***a)*** Déterminer l'ensemble de définition de F.

b) Déterminer le sens de variation de F.

c) Démontrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

d) Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.

e) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

f) Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

On admettra que $F'(0) = \dfrac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

6. Soit x un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $]0,1]$ par $g_n(t) = \dfrac{t^{n\,x}\ \ln^n(t)}{n!}$.

a) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et donner sa somme.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,dt = \frac{1}{n!}\ \frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$.

7. Établir enfin :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}$$

Exercice 24 *(d'après* `E3A 2022 PSI`*)*

1. **Question de cours**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T-périodique.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,du = \int_0^T f(u)\,du.$

* * * * *

On se propose de déterminer des fonctions y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4x\,y(x) = 0 \qquad (**)$$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\big(2x\cos(t)\big)\,dt$$

1. **Quelques propriétés de la fonction F**

a) Étudier la parité de la fonction F.

On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.

b) Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp(2x\cos(t))$.

(i) Justifier que la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)$ existe et est continue sur $[0, 2\pi]$.

(iii) Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel k non nul, il existe un réel positif M_k tel que :

$$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi],\ 0 \leqslant \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leqslant M_k$$

(iv) En déduire que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(v) Donner pour tout x réel et tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) Montrer que F vérifie la relation $(**)$.

2. **Développement en série entière de F**

a) Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

b) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$

où I_n s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n\ dt$.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

c) Calculer J_0 et J_1.

d) Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}.

e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de J_n en fonction de n.

f) Comparer alors les fonctions F et g.

Exercice 25 *(d'après* `E3A 2022 PC`*)*

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ dt$.

1. **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**

a) Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

c) Prouver que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2. **Calcul de la somme de cette série**

a) Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\ dt$.

c) **Intégration terme à terme ?**

(i) Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

(ii) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

(iii) Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?

On justifiera rigoureusement la réponse.

d) On pose, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t) \quad \text{et} \quad V_n(t) = \sum_{k=0}^{n} v_k(t)$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 26 *(d'après* `E3A 2022 MP`*)*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ.

b) Démontrer que pour tout $x \in \Delta$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

c) On admet que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Calculer $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n} \exp\left(-t^2\right)\,dt$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) En utilisant la question 1. calculer I_n.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela est possible :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) \exp\left(-t^2\right)\,dt$$

a) Donner le développement en série entière de la fonction cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.

b) Justifier que H est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question **3.b)** par une autre méthode.

a) Démontrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

c) Retrouver l'expression de H obtenue à la question **3.b)**

Exercice 27 *(d'après* `E3A 2022 PC`*)*

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,dt$.

1. **Continuité de** f

a) Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ est convergente.

c) En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. **Régularité de** f

a) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$.
On considère $x \in [a, b]$.

(i) Montrer que $\forall t \geqslant 0$, $0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t$.

(ii) Montrer que $\forall t > 0$, $0 \leqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant t\,\mathrm{e}^{-at}$.

(iii) Montrer que $\forall t > 0$, $0 \leqslant \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$.

b) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout $x > 0$, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. **Une autre expression de** f''
On note i un nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

a) Montrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $|\mathrm{e}^{(i\theta - x)t}| = \mathrm{e}^{-xt}$.

b) En déduire : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} |\mathrm{e}^{(i\theta - x)t}| = 0$.

c) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2(x^2+4)}$.

On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

4. **Une autre expression de f**

a) Démontrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Démontrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

c) Calculer la dérivée de G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = t\,\ln(t^2+4) - 2t + 4\,\arctan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

d) Déterminer alors, pour tout $x > 0$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Calculer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\,dt$.