Feuille d'exercices n°3 : Intégration

Techniques de calcul d'intégrales

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^2 t\,e^{2t}\,dt$

b) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2t+1}\,dt$

f) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

A l'aide d'un changement de variables, montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:

$$\int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt = g\left(e^x\right)+2\ln(2)$$

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales suivantes, et donner leur valeur en cas de convergence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ ***2.*** $\displaystyle\int_1^2\frac{x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\,dx$ ***3.*** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

4. $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ puis $J=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx$.

Exercice 4

Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Étudier la convergence de l'intégrale $I_n(x)=\displaystyle\int_{-\ln(x)}^{+\infty} e^{-nt}dt$.

2. Étudier suivant les valeurs de x, la convergence de la série de terme général $I_n(x)$.

3. On pose $J_n(x)=\displaystyle\int_{-\ln(x)}^{+\infty} e^{-t}\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}}dt$.

a) Justifier la convergence de l'intégrale $J_n(x)$.
On distinguera les cas $0<x<1$ et $x>1$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}=J_n(x)$.

4. On suppose ici que $0<x<1$.

a) Étudier la fonction g définie sur $[-\ln(x),+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_{-\ln(x)}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$.

Changement de variable affine

Exercice 5

Pour tout couple d'entiers naturels (p,q), on pose $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$.

1. Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Montrer que : $B(p,q)=B(q,p)$.

2. Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$. Établir la relation : $B(p,q)=\dfrac{p}{q+1}\,B(p-1,q+1)$.

3. Calculer, pour tout entier naturel n, $B(0,n)$.

4. En déduire la valeur de $B(p,q)$, pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

5. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{p+k+1}$, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 6

Soient a et b deux réels strictement positifs et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

1. Montrer que, pour $\alpha > 0$, on a : $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int_{b\alpha}^{a\alpha} \frac{f(t)}{t}dt.$

2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx$ existe et vaut $f(0)\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

3. Montrer l'existence $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,dx$ et donner sa valeur.

4. Déduire de la question précédente la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt.$

Intégrale fonction de ses bornes

Exercice 7

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt.$

1. ***a)*** Démontrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.
Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et calculer f'.

b) En déduire $f(x)$ pour tout $x \in\,]0,+\infty[$.

2. Retrouver ce résultat en posant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 8

On considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,dt.$

1. Montrer que H est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $H'(x)$, pour tout $x \geqslant 0$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xH(x) = 0$.

4. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)\,dt$ est convergente et calculer sa valeur en fonction de $H(0)$.

Exercice 9

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \displaystyle\int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}\,dt \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de F et préciser son domaine d'étude.

2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

3. Donner l'allure du graphe de F.

Exercice 10

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl} F & : & [-2\pi, 2\pi] \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt \end{array}$$

1. Montrer que F est paire.

2. ***a)*** Démontrer : $F(\pi) = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{1}{(u+2\pi)^2} - \frac{1}{(u+\pi)^2}\right)\sin(u)\,du.$

b) En déduire le signe de $F(\pi)$.

3. En s'inspirant de la question précédente, déterminer le signe de $F(2\pi)$.

4. ***a)*** Montrer que F est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

b) Montrer alors que F s'annule exactement quatre fois et isoler chacun de ses points d'annulation.

5. ***a)*** Vérifier : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\sin(t) - t\right| \leqslant \dfrac{t^3}{6}$.

b) En déduire que F se prolonge par continuité en 0 en une fonction G.

c) Préciser la valeur prise par la fonction G en 0, puis montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Sommes de Riemann

Exercice 11

Calculer les limites des suites dont on donne le terme général ci-dessous.

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^3}{n^4}$

2. $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3+k^3}$

3. $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

4. $z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+k)(\ln(2n+k)-\ln(n))}$

5. $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

6. $t_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n\ n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 12

Étudions l'erreur commise lorsque l'on approche une intégrale par une somme de Riemann.

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

1. Justifier l'existence d'un réel M tel que $\forall x \in [0,1]\,,\ |f'(x)| \leqslant M$.
Déterminer un tel réel M.

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)\ dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right|\ dt$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)\ dt\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. Vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\left|\sin(x) - x\right| \leqslant \frac{x^3}{6}$.

2. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|u_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{6n^2}$.

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Minkowski

Exercice 14

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur $[a,b]$.

1. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \displaystyle\int_a^b \big(f(t) + x\,g(t)\big)^2\ dt \end{array}$$

Montrer que φ est une fonction polynomiale positive et que, sauf dans un cas particulier que l'on identifiera, son degré est 2.

2. Établir, dans tous les cas, la formule :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\ dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2\ dt \int_a^b \big(g(t)\big)^2\ dt}$$

3. Démontrer : $\sqrt{\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)^2\ dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2\ dt} + \sqrt{\int_a^b \big(g(t)\big)^2\ dt}$.

Intégrales définies par une relation de récurrence

Exercice 15

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1. Montrer que I_n existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}\,I_{n-1}$.

b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n}\,I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}\,I_n$.

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$.

5. ***a)*** Calculer I_n en fonction de n.

b) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) Déterminer la valeur de α.

Exercice 16

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,u^n\,du$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 (t\,\ln(t))^n\,dt$.

1. Montrer que J_0 est convergente, et calculer sa valeur.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n existe.
À l'aide d'une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1}, déterminer la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

4. Soit $x \in \,]0,1[$. En posant $u = -(n+1)\ln(t)$, calculer $\displaystyle\int_x^1 (t\ln(t))^n\,dt$.

5. En déduire la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n\,dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ et $u_n = \sqrt{n}\,I_n$.

On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n est convergente.
Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et étudier sa convergence.

3. Calculer I_n, pour tout $n \geqslant 1$.

4. ***a)*** Montrer que, pour tout réel x : $\ln(1+x^2) \leqslant x^2$.

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$: $I_n \geqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,dx$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire une minoration de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\dbinom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha\,4^n}{\sqrt{n}}$.

Lien séries intégrales

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$.

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$?

2. Déterminer le tableau de variations de f.

3. En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$.

4. Généraliser ce résultat en déterminant la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$ où $\beta > 1$.

Exercice 19

On note f la fonction définie, pour tout $x > 0$, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. *a)* Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\ dx$. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

b) En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. *a)* Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$.

b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Critères de comparaison (fonctions continues positives)

Exercice 20

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f_n(x) = \frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par :

$$\forall x > 0,\ h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.

2. *a)* Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\ dx$ est convergente.

Dans toute la suite de l'exercice, on note K l'intégrale impropre :

$$K = \int_1^{+\infty} h(x)\ dx$$

3. *a)* Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x)\ dx$ est convergente.

b) En posant $u = \dfrac{1}{x}$, montrer que : $K = -\displaystyle\int_0^1 h(u)\,du$.

c) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\,dx$ converge et est égale à $2K$.

d) En déduire également que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ converge et vaut 0.

4. *a)* Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$: $h(x) - f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

c) En déduire successivement : $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant \frac{K}{n+1}$, et : $-\dfrac{K}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^1 (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant 0$.

d) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 0$.

5. Calculer, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ dx$?

Exercice 21

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier les variations de f et déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. Montrer que l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes est finie.

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\, dx$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = f(x)\mathrm{e}^{-nx} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x\,\mathrm{e}^{-kx}$.

En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

4. On pose pour tout $u > 0$, $J_u = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{ux} - 1}\, dx$ et $K_u = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{ux} + 1}\, dx$.

a) Montrer que, pour tout $u > 0$, les intégrales J_u et K_u sont convergentes.

b) Calculer, pour tout $u > 0$, J_u et K_u en fonction de J_1 et K_1.

c) Etablir que $J_1 - K_1 = 2J_2$.

d) Déduire des questions précédentes une relation simple entre J_1 et K_1, puis entre J_u et K_u.

Exercice 22

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\, dt$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$ *(avec $n \in \mathbb{N}$)*

d) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-1}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\, dx$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+\mathrm{e}^{-x}}\, dx$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$ *(avec $n \in \mathbb{N}$)*

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^n}\, dt$ *(avec $n \in \mathbb{N}$)*

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^n\, dt$ *(avec $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$)*

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\, dt$ *(avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$)*

2. Déterminer un équivalent de $\dfrac{x^3\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\, dx$.

Intégrales à paramètre (avant d'avoir traité le chapitre)

Exercice 23

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

1. Vérifier que pour $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

2. Donner le sens de variation de f.
(indication : pour tout $0 < a < b$, montrer que $f(b) < f(a)$)

3. En utilisant la question *1*, déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. *a)* Démontrer que : $\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) \leqslant 2\, f(x)$.

b) Démontrer que : $\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) \geqslant 2\, f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 24

Étude de la fonction Γ

On rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente, et calculer sa valeur.

2. ***a)*** Déterminer, pour tout réel x, la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$, pour tout réel x.

c) Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma : x \mapsto \int_{0}^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$$

est définie sur $]0,+\infty[$.

3. ***a)*** Calculer $\Gamma(1)$.

b) Etablir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, pour tout réel strictement postif x. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Démontrer : $\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$

En déduire : $\displaystyle\forall p \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\sqrt{\pi}.$

Exercice 25

Soit f la fonction définie par $\displaystyle f(x) = \int_{1}^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\, dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Quel est le sens de variation de f ?

3. Soient a, b deux réels tels que $0 < a \leqslant b$, montrer que :

$$0 \leqslant f(a) - f(b) \leqslant \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

En déduire que f est continue.

4. Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 26

Soit f la fonction $\displaystyle x \mapsto \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\, dt.$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f est monotone.

3. Montrer que $\displaystyle f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

4. ***a)*** En utilisant les questions ***2*** et ***3***, déterminer la limite de f en 0.

b) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
(on pourra démontrer que : $\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) \leqslant 2\ f(x)$ et $f(x) + f(x+1) \geqslant 2\ f(x+1)$)

5. Calculer $f(1)$ et $\displaystyle f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exprimer $f(n+1)$ et $\displaystyle f\left(n+\frac{1}{2}\right)$ en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

6. En déduire que les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ sont convergentes et calculer leur somme respective.

Exercice 27

On pose, quand l'intégrale converge, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est $]0, +\infty[$.

2. Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

3. ***a)*** Pour $x > 0$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)}$.

b) Pour $x > 0$ et $t \geqslant 1$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis calculer $g(x)$.

c) En déduire que, pour tout $x > 0$: $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln(2)}{x}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. ***a)*** Montrer que : $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(2)}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

b) En déduire la limite et un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Autre

Exercice 28

Soit f définie par : $f(t) = \dfrac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

1. Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

Calculer I à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

En déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction ε tels que :

$$\forall x > 0,\ F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

On précisera les valeurs de a et b.

3. Montrer que $G(x) = \ln(x) + \displaystyle\int_1^x F(t)\, dt$ possède une limite finie en $+\infty$.

Intégrale faussement impropre

Exercice 29

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1-x}\, dx$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(x)\, dx$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que l'intégrale I_n est convergente.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $-1 \leqslant \dfrac{x\ln(x)}{1-x} \leqslant 0$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant I_n \leqslant 0$, puis la limite de I_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer sa valeur.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} J_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} + I_{n+1}$.

Énoncés de concours

Exercice 30 (E3A 2021)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\, dt$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n.

2. *(Question modifiée en attendant d'avoir accès au théorème de convergence dominée)*

a) Démontrer : $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $(1+u)^n \geqslant 1 + n\,u$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-1-n(t-1))\, dt$.

c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n.

Exercice 31 (CCINP 2022)

Partie I – Convergence d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose : $a_{k,n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \dbinom{2n}{k}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose : $I_m = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \, dt$.

1. Montrer que la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$: $I_{m+2} = \dfrac{m+2}{m+3} \, I_m$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)\, a_{n,n}}, \quad \text{et} \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} \, a_{n,n}$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \dfrac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$.

En déduire : $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1$.

5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n\geqslant 1}$ puis :

$$I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \textit{si } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la 5 que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

7. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite.
(Autrement dit, on cherche, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la limite de la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$)

8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$.

9. Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.
(On pourra admettre : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} u_n(t)\right) dt$)

Exercice 32 (CCINP 2021)

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in \,]0,1[$.
L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in \,]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \, dt$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \,]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

2. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$$

Pour tout $x \in \,]0,1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

3. Prouver que, pour tout $x \in \,]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. En déduire, pour tout $x \in \,]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \, dt \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \, dt$$

5. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 33 (CCINP 2020)

Pour $x > 0$, on note : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx}\, dt$,

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin(t)\, dt \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(t)\, dt$$

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.
(Question admise à ce stade de l'année. On pourra utiliser dans la suite : $\forall x > 0,\ F'(x) = -G(x)$)

5. Trouver une expression simple pour G et pour H.
(On pourra calculer $H(x) + iG(x)$)

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(\alpha t)\, dt$.

6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Exercice 34 (CCINP 2019)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)}\, dt.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.

Exercice 35 (E3A 2020)

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\, dt$, lorsque cela existe.

1. **Dans cette question, et uniquement cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$.

a) En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

b) En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

c) Donner alors un équivalent de $\displaystyle\int_a^{x} \frac{f(t)}{t}\, dt$ lorsque x tend vers l'infini.

2. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.

3. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^{x} (\lambda - f(t))\, dt$.

a) Justifier que H_λ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $H_\lambda'(x)$.

b) Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et :

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\, dt$$

4. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique ($T > 0$).

a) Démontrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\, dt$ est constante.

Montrer alors que l'on a, pour tout réel x :

$$H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^{T} f(t)\, dt$$

b) Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

c) Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

d) Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

e) Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,dt$ lorsque x tend vers l'infini.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,dt \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,dt$$

a) Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.

b) Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$$

c) Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

d) On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

(i) Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini.
On pourra utiliser les résultats établis à la question ***4***.

(ii) En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.