Feuille d'exercices n°8 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Réduction de matrices carrées d'ordre $n \leqslant 4$

Exercice 1

Déterminer les éléments propres et réduire les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ***2.*** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ***3.*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ***4.*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 3

Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 4

Étudier, en fonction des paramètres, la diagonalisabilité des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$ ***2.*** $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ***3.*** $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser K.

2. Exprimer M à l'aide des puissances de K et en déduire une diagonalisation de M.

Exercice 6

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 3 de A.

2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3. Montrer que les valeurs propres de A^2 sont négatives ou nulles.

Réduction d'une matrice carrée de taille n

Exercice 7

Déterminer les éléments propres et étudier la diagonalisabilité des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ suivantes.

a) La matrice A dont tous les coefficients valent 1.

b) La matrice B dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si $i+j$ est pair, et 0 sinon.

c) La matrice N dont les coefficients de la première colonne, de la dernière colonne et de la diagonale sont égaux à 1, et les autres à 0.

Exercice 8

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 (où $n \geqslant 2$).

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que A soit diagonalisable.

Exercice 9

Étudier, en fonction des paramètres, la diagonalisabilité des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ suivantes, et expliciter leurs éléments propres.

a) La matrice $A = \left(a^{i+j-2}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $a \in \mathbb{C}$.

b) La matrice B dont la première ligne est $(a, 0, \ldots, 0)$, la seconde est $(1, 1, \ldots, 1)$, et toutes les autres sont $(1, 0, \ldots, 0)$, où $a \in \mathbb{C}$.

c) La matrice C dont chaque élément diagonal vaut a et tout autre coefficient vaut b, où a et b sont des nombres complexes.

Exercice 10

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} P & P \\ -P & P \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si P est inversible, alors Q l'est, et donner alors Q^{-1} en fonction de P^{-1}.

2. Étudier la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

Exercice 11

Le but de l'exercice est de caractériser les matrices carrées de même taille ayant une valeur propre commune.

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que A et B ont au moins une valeur propre commune.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nuls, tels que ${}^tAX = \alpha X$ et $BY = \alpha Y$.

b) En déduire qu'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MA = BM$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MA = BM$.

a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $M\,P(A) = P(B)\,M$.

b) En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Exercice 12

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ un couple de matrices qui commutent.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

2. Montrer que si A est diagonalisable et B est nulle, alors M est diagonalisable.

3. Démontrer la réciproque.

Exercice 13

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs et telle que la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A, et que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

Indication. Considérer un coefficient de module maximal dans X tel que $AX = \lambda X$.

2. On suppose les coefficients de A strictement positifs. Montrer que le sous-espace propre de A associé à 1 est une droite, et que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

Éléments propres et réduction des endomorphismes

Exercice 14

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ qui à tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par :

$$\varphi(P)(X) = P(1 - iX)$$

où $i^2 = -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer φ^4.
Montrer que φ est diagonalisable et donner les valeurs propres possibles de φ.

2. Montrer que 1 est vraiment valeur propre de φ.

3. Préciser le spectre de φ en fonction de n.

Exercice 15

Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.

Pour $f \in E$, on définit $\varphi(f)$ par :

$$\varphi \quad : \quad \begin{array}{ccc} x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & si\ x \neq 0 \end{cases} \\ [0,1] & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

2. Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de φ.

3. Montrer que 1 est une valeur propre de φ et trouver l'espace propre associé.

4. Trouver les autres valeurs propres.

Exercice 16

Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $T \in \mathscr{L}(E)$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 17

Soit l'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' - XP''$.

1. Monter que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Trouver la seule valeur propre possible λ de u.

3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? inversible ?

4. Calculer le sous espace propre associé à λ.

Exercice 18

Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : E \to E,\ P \mapsto X(X-1)P' - XP$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.

2. Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 19

Soit n un entier $\geqslant 4$.

On définit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto XP'' + (X-4)P' - 3P$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Est-il diagonalisable ?

3. Déterminer la dimension puis une base du noyau de Φ.

Exercice 20

Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les éléments propres de f.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? inversible ?

Exercice 21

Soit $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M)I_n$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Trouver un polynôme annulateur de ϕ de degré 2.

3. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

4. Donner le polynôme caractéristique et la trace de ϕ.

Exercice 22

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit f_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$f_A : M \mapsto AM$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(f_A) = f_{P(A)}$.

2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

3. Montrer que $\mathrm{Sp}(f_A) = \mathrm{Sp}(A)$.

4. Expliciter χ_{f_A} en fonction de χ_A.

Exercice 23

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie.

Soit s est une symétrie vectorielle de E.

On pose pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\varphi(u) = \dfrac{1}{2}\,(s \circ u + u \circ s)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$

2. Calculer φ^3 et en déduire un polynôme annulateur de φ.

3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Réduction et équations matricielles

Exercice 24

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

2. Montrer que A est inversible et que $\det(A) > 0$.

Exercice 25

Soit $A \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 6$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 26

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de A et trouver une matrice diagonale D semblable à A.

2. Montrer que toute matrice commutant avec D est nécessairement diagonale.

3. Soit $P = X^7 + X + 1$.
Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = A$.

Exercice 27

Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 28

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, où $a_{i,j} = 1$ si $i + j$ est pair, $a_{i,j} = 2$ sinon.

1. Trouver les éléments propres de A.

2. Résoudre $X^2 + 2X = A$ dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 29

Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^5 = M^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(M) = 3$$

Exercice 30

On cherche les matrices symétriques M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation :

$$M^3 + 4M^2 + 5M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \tag{1}$$

1. Justifier que ces matrices sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont racines du polynôme $P(X) = X^3 + 4X^2 + 5X$.

2. En déduire toutes les solutions symétriques de (1).

Exercice 31
Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^3 - 4M^2 - 4M = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(M) = 0$$

Exercice 32
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = S^2 + S + I_n$.

2. À quelle condition supplémentaire y a-t-il unicité d'une telle matrice S ?

Exercices théoriques

Exercice 33
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si u est diagonalisable, alors :
   × u^2 est diagonalisable,
   × $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

2. Montrer la réciproque.
   Indication : montrer que si un polynôme $XP(X)$ annule u^2, alors $XP(X^2)$ annule u.

Exercice 34
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme admettant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que u est diagonalisable et que si $f \in \mathscr{L}(E)$ commute avec u, alors toute base de diagonalisation de u est une base de diagonalisation de f.
   En déduire la dimension du sous-espace $\mathcal{C}(u) = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ u = u \circ f\}$ de $\mathscr{L}(E)$.

2. Dénombrer les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Exercice 35
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E.

1. Montrer que si u et v sont *simultanément diagonalisables*, c'est-à-dire s'il existe une base de diagonalisation commune à u et v, alors u et v commutent.

2. On suppose dans cette question que u et v commutent.
   Montrer que v stabilise chaque sous-espace propre de u, et que l'endomorphisme qu'il y induit est diagonalisable. En déduire que u et v sont simultanément diagonalisables.

Exercice 36
Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que :

$$g \circ f = f \circ g$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

2. On suppose que f possède trois valeurs propres distinctes. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

3. On suppose que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

4. Trouver f tel que $\mathcal{C}$ soit de dimension 5.

Réduction et suites récurrentes

Exercice 37
Déterminer le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 5u_n + v_n - w_n, \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n - 2w_n, \\ w_{n+1} & = & u_n - v_n + 3w_n. \end{array} \right.$$

Exercice 38

Déterminer le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

a) $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+3} = -(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $v_0 = 1$, $v_1 = v_2 = 0$ et $v_{n+3} = 3v_{n+2} - 4v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication : raisonner matriciellement pour ramener le problème au calcul des puissances d'une matrice carrée de taille 3, et procéder par trigonalisation.

Exercice 39

On note : $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -4\,u_n & + & 2\,v_n & - & 2\,w_n \\ v_{n+1} & = & -6\,u_n & + & 4\,v_n & - & 6\,w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n & + & v_n & - & 3\,w_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}\,X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

Énoncés de concours

Exercice 40 *(d'après* `E3A 2024 MPI`*)*

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que A est équitable si : $\forall (i,j,k) \in [\![1,\eta]\!]^3,\ a_{i,j} = a_{i,k}\ a_{k,j}$.

1. Donner deux exemples de matrices équitables pour $n = 3$.

2. Déterminer l'ensemble des matrices A pour lesquelles : A est équitable et $-A$ est équitable.

3. Démontrer que si A est équitable, alors sa transposée $A^\top$ est aussi équitable.

4. On suppose que A est équitable. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $a_{k,k}$.

2. Soit B une matrice équitable non nulle. Montrer que $A + B$ n'est pas équitable.

3. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \neq 0$.

4. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer $a_{i,j}$ à l'aide de $a_{i,1}$ et $a_{j,1}$.

5. Quelques résultats remarquables.

a) Montrer que A est de rang 1.

b) Calculer A^2.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) Montrer que la matrice A est semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$.

e) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.

6. Démontrer que A est symétrique si, et seulement si, A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

7. Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles.

8. Si G est un sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables à coefficients dans G.

9. Déterminer toutes les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2$.

Exercice 41 *(d'après* `E3A 2024 PSI`*)*

Soit n un entier naturel non nul. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. **Calcul d'une somme**

a) Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.

b) En remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n\,(1+X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.

c) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

3. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$.
On utilisera la question ***1.c)*** pour simplifier le résultat.

4. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est inversible}\}$.

Exercice 42 *(d'après* `E3A 2020 PC`*)*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 43 *(d'après* `E3A 2023 PSI`*)*

Soit n un entier naturel non nul.

On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ p_{ij} = \mathbb{P}\big(\ \{X = i\} \cap \{Y = j\}\ \big) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Déterminer la valeur du réel α.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.

3. Les deux variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

5. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{\{X=j\}}\big(\ \{Y = i\}\ \big)$$

Calculer les b_{ij}.

6. Déterminer $\operatorname{rg}(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(B)$ et $\operatorname{Ker}(B)$.

7. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ telles que $B = CL$.

8. Démontrer que $B^2 = \operatorname{tr}(B)\ B$.

9. Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 44 *(d'après* `E3A 2023 PC`*)*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3\,u + 2\,\mathrm{id}_E = 0$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira α inférieure à β.

3. On pose alors $v = u - \alpha\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\mathrm{id}_E$.

- ***a)*** Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.
- ***b)*** Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.
- ***c)*** Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.
- ***d)*** Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

4. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

5. **Application**
Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- ***a)*** Vérifier que u satisfait à la relation ($\star$). On fera apparaûtre les calculs sur la copie.
- ***b)*** Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question 3.
- ***c)*** Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.
- ***d)*** Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

Exercice 45 *(d'après* `E3A 2023 MP`*)*

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, \ldots, (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n.
Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.

3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
Déterminer le quotient et le reste de la division cuclidienne de P par $(X-\alpha)^r$.

* * * * *

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}\left(X^2 - 1\right)P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T\left(P_k\right)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.

3. écrire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E_n.

4. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.

- ***a)*** Montrer que P est de degré n.
- ***b)*** Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.
- ***c)*** En déduire une expression de P.

5. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T.
L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Exercice 46 *(d'après* `E3A 2022 PSI`*)*

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient q un réel et r un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\sum_{k=0}^{r} q^k$.

2. Soit p un entier naturel non nul.

Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.

3. Soit $P \in E_n$.

Montrer qu'il existe un polynôme Q de E_n tel que :

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t)\, dt.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.

2. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.

3. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.

Déterminer A et A^{-1}.

4. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.

5. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

6. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'un polynôme Q de E_n.

À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?

On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.

7. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.

8. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Exercices d'oraux CCINP

Exercice 47 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.

On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

a) sans utiliser de matrice f,

b) en utilisant une matrice f.

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 48 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$f : M \mapsto AM$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. A-t-on : $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 49 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. ***a)*** Prouver que : $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.

b) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que : $\mathrm{Im}(f + \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.

Exercice 50 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer : $\forall (P,Q)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X],\ \big(PQ\big)(u)=P(u)\circ Q(u)$.

2. ***a)*** Démontrer : $\forall (P,Q)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X],\ P(u)\circ Q(u)=Q(u)\circ P(u)$.

b) Démontrer que, pour tout $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]$:

$$P \text{ polynôme annulateur de } u \quad\Rightarrow\quad PQ \text{ polynôme annulateur de } u$$

3. Soit $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R=X^4+2X^3+X^2-4X$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice 51 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Démontrer : $E=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f)\ \Rightarrow\ \mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

2. ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}\left(f^2\right)\ \Leftrightarrow\ \mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

b) Démontrer : $E=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f)\ \Rightarrow\ \mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

Exercice 52 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

1. ***a)*** sans calcul,

b) en calculant directement le déterminant $\det\big(\lambda I_3-A\big)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

c) en utilisant le rang de la matrice,

d) en calculant A^2.

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 53 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit la matrice $M=\begin{pmatrix}0 & a & c\\ b & 0 & c\\ b & -a & 0\end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 54 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & a & 1\\ a & 0 & 1\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.

2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 55 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ et $B=a\,I_3+b\,A+c\,A^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question ***1.*** les éléments propres de B.

Exercice 56 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit n un entier naturel non nul.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

On suppose : $f(e_1)=\ldots=f(e_n)=v$, où v est un vecteur donnée de E.

1. Donner le rang de f.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
(discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 57 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(I_2, A)$.

Exercice 58 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base des vecteurs propres associés.

2 On considère le système différentiel $\begin{cases} x' &= x + 2\,z \\ y' &= y \\ z' &= 2\,x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.

En utilisant la question ***1.*** et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice 59 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.

Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question ***1.*** reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.

Indication : penser à utiliser le déterminant.

Exercice 60 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\Big(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\Big)$.

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire :

$$a \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre de multiplicité } r \iff \begin{cases} P^{(r)}(a) \neq 0 \\ \forall k \in [\![0, r-1]\!], P^{(k)}(a) = 0 \end{cases}$$

2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + a\,X^2 + b\,X$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 61 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient a_0, a_1, …, a_n, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si b_0, b_1, …, b_n sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant :

$$\deg(P) \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i$$

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ b_i = \begin{cases} 0 & si\ i \neq k \\ 1 & si\ i = k \end{cases}$$

Exercice 62 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 63 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i = j \\ 1 & si\ i \neq j \end{cases}$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E,\ u(M) = M + \mathrm{tr}(M)\ A$.

a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
Justifier vorte réponse en utilisant deux méthodes (avec ou sans la question ***1.***).

Exercice 64 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaire distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ & & P & \mapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose : $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.