Feuille d'exercices n°8 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Exercice 1 *(d'après* `CCINP 2014 - MP-2`*)*
Soit les suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4v_n + w_n \end{cases} \quad \text{et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)$$

1. ***a)*** Justifier sans calcul que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

b) Diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

c) Déterminer la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Expliciter les termes u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Exercice 2 *(d'après* `CCINP 2014 - MP-2`*)*
Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.
On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

1. Soit p un projecteur de E.

a) Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.

b) En déduire que la trace de p (notée $\mathrm{tr}(p)$) est égale au rang de p (noté $\mathrm{rg}(p)$).

c) Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$ est il nécessairement un projecteur de E ?

2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

3. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

a) Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_\beta(u)$ de u dans β soit de la forme :

$$\mathrm{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

où $a_1, \cdots, a_n$ sont n nombres réels.

b) Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

c) On suppose que $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{rg}(u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

d) Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

Exercice 3 *(d'après* `CCINP 2017 - MP-2`*)*

Notations

- Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p désigne un entier supérieur ou égale à 2. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note I_p la matrice unité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.
- Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, on note $\|x\|_\infty$ sa norme « infinie » définie par :
$$\|x\|_\infty = \max\{\, |x_i| \mid i \in [\![1, p]\!]\}.$$
- On dit que x est un vecteur stochastique si ses coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut 1 :
$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \geqslant 0 \ \text{ et } \sum_{i=1}^{p} x_i = 1.$$

- Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune des ses lignes vaut 1, c'est à dire si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ a_{i,j} \ \geqslant\ 0 \ \text{ et } \ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1.$$

- Une matrice A est dite strictement positive si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.
- Si $b_1, b_2, \ldots, b_k$ sont des nombres complexes (respectivement des matrices carrées), on note $\operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ la matrice diagonale (respectivement diagonale par blocs) dont les coefficients diagonaux (respectivement diagonaux par blocs) sont $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2 et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps $n+1$ qui dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

× si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$.

× si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$ elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$.

On suppose que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

1. Déterminer en justifiant la loi de X_1.

On pose $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ le vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de X_n.

2. Justifier la relation matricielle suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

3. En déduire, à l'aide de la calculatrice, la loi de X_5 (on demande les résultats arrondis au centième).

4. Temps de premier accès à l'état 1 : on note T la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$.
Déterminer $P(T = 1)$, puis $P(T = k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

5. Justifier que A est diagonalisable, puis donner, sans détailler les calculs, une matrice Q inversible à coefficients entiers telle que

$$A = Q \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{4}\right) Q^{-1}.$$

6. Justifier que les applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0\ M$ définies sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ sont continues.

7. En déduire la convergence de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis la suite des vecteurs lignes $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser les coefficients du vecteur ligne obtenu comme limite.

- La suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un cas particulier de variables aléatoires dont l'état à l'instant $n+1$ ne dépend que de son état à l'instant n et pas des précédents. On dit alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Plus généralement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans $[\![1,p]\!]$, la loi des variables X_n est entièrement déterminée par la donnée de la loi X_0 et d'une matrice stochastique A de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
- Si on pose maintenant $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2), \ldots, P(X_n = p))$, l'étude du comportement de la loi de X_n lorsque n est grand, se ramène alors à l'étude de la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Cela conduit à l'étude de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
C'est l'objet des parties suivantes.

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Soit A une matrice stochastique de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

8. Justifier que 1 est valeur propre de A (on pourra considérer le vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les coordonnées valent 1).

9. Soit x un vecteur colonne de $\mathbb{C}^p$. Démontrer que $\|Ax\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$.

10. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

Localisation des valeurs propres

Soit λ une valeur propre de A.

11. Justifier l'existence d'un vecteur colonne $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$.

12. Soit $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_i| = 1$. Démontrer que :

$$|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}.$$

Étude d'un exemple

13. Dans cette question uniquement, on prend :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Déduire de la question précédente que les valeurs propres de A sont contenues dans la réunion de trois disques, que l'on représentera en précisant leurs centres et leurs rayons.

On constate en particulier que 1 est la seule valeur propre de A de module 1. On admettra, dans la suite du problème, que cette propriété reste vraie pour toute matrice stochastique **strictement positive**.

Cas des matrices stochastiques strictement positives

14. On suppose en plus pour cette question et la question suivante que la matrice A est strictement positive.
On pose $B = A - I_p$ et on note B' la matrice de $\mathscr{M}_{p-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de B.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B'.
On admet qu'il existe un entier de $i \in [\![1, p-1]\!]$ tel que :

$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}.$$

La démonstration (non demandée) de cette inégalité est similaire à celle de la question ***12***.
Déduire de cette inégalité que B' est inversible.

15. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(A - I_p) = 1$.

On admet sans démonstration que 1 est racine simple du polynôme caractéristique de A. On dit alors que 1 est une valeur propre de simple de A. Nous pouvons résumer les résultats de cette partie par la **Proposition 1** ci-dessous.

Proposition 1.
Soit A une matrice stochastique de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ strictement positive.
Alors 1 est valeur propre simple et les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1.

Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

On démontre dans cette partie la proposition suivante :

Proposition 2.
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, stochastique et strictement positive, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Un contre-exemple

16. On considère s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donner, sans justification, la matrice B de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

17. La **Proposition 2** reste-t-elle vraie si la matrice stochastique n'est pas strictement positive ?

Résultat préliminaire

Soit λ un nombre complexe avec $|\lambda| < 1$ et N une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

18. Démontrer que $N^p = 0$.

19. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Justifier que pour n au voisinage de $+\infty$, $\dbinom{n}{k}$ est équivalent à $\dfrac{n^k}{k!}$.
En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dbinom{n}{k}\lambda^{n-k}$.

20. En déduire que la suite de matrices $\big((\lambda I_p+N)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Convergence d'une suite de matrice

Soit A une matrice stochastique et strictement positive de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
On sait, d'après la **Proposition 1**, que 1 est valeur propre simple de A.
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les autres valeurs propres complexes de A, un théorème du cours montre que A est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale par blocs du type

$$\operatorname{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{p_r} + N_r)$$

avec $p_1, \ldots, p_r$ des entiers et $N_1, \ldots, N_r$ des matrices nilpotentes à coefficients complexes.

21. Déduire des questions ***18*** à ***20*** que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

Définition.
Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.
On dit que A admet une probabilité invariante s'il existe un vecteur ligne stochastique $\mu \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mu A = \mu$ (on dit alors que μ est une probabilité invariante de A).

Le but de cette partie est de démontrer la **Proposition 3** ci-dessous.

Proposition 3.
Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique.
On note $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteur ligne de $\mathbb{R}^p$ définie par la relation de récurrence $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Alors, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur stochastique μ_∞ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$. De plus, le vecteur μ_∞ est l'unique probabilité invariante par A (il ne dépend donc pas du choix de μ_0).

Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie ci-dessus.

22. Démontrer que l'ensemble des vecteurs stochastiques de $\mathbb{R}^n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

Convergence de la suite

23. Démontrer que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur μ_∞ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$.

24. Soit $\mu = (m_1, \ldots, m_p)$ un vecteur ligne stochastique. Démontrer que μA est encore un vecteur stochastique.

25. En déduire que μ_∞ est une probabilité invariante par A.

Unicité de la probabilité invariante

26. Lien avec le spectre de la transposée de A : soit $\mu \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. Justifier que μ est une probabilité invariante pour A, si et seulement si le vecteur colonne ${}^t\mu$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.

27. Justifier, en utilisant la **question 15**, que $\dim \operatorname{Ker}\left({}^tA - I_p\right) = 1$.

28. En déduire que A admet une unique probabilité invariante.

Exercice 4 *(d'après* `CCINP 2019 - MP-2`*)*
On s'intéresse dans ce problème, à tracers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Partie I – Étude de quelques exemples

1. Justifier que deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

2. On donne deux matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).

3. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes.

- *Première méthode* : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E.
- *Deuxième méthode* : en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

4. Démontrer que toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

5. *Application* : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $u \circ u \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.

6. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

7. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α, β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.

Déterminer le rang de A et en déduire que 0 est valeur propre de A.

Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A.

Préciser une base de vecteurs propres de A.

Dans cette question, il est [vivement] déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de A.

8. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ, les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$.
Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

9. Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

10. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynômiale non identiquement nulle [sur $\mathbb{C}$] et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $Q = R + xS$ soit inversible.

11. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

12. *Application* : démontrer que toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 *(d'après* `CCINP 2021 - MP-2`*)*
Notations pour l'ensemble du sujet :

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note, pour n entier naturel, $n \geqslant 2$:

- $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE

1. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\left(\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tA.B\right)\right)$, déterminer $(\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^{\perp}$, l'orthogonal de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

PROBLÈME : Théorème de décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D,N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
>
> *(1)* $A = D + N$;
>
> *(2)* D est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) :
>
> *(3)* N est nilpotente :
>
> *(4)* $DN = ND$.
>
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D,N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

2. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

3. Donner un exemple d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

5. **Application**

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A.

Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie en Q4. On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, $\exp(M+N) = (\exp M)(\exp N)$.

6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2. Démontrer que le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

7. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})^2$.

8. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

- $\times$ $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$,
- $\times$ $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(e_2)$,
- $\times$ $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{Vect}\,(e_2, e_3)$.

Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

9. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

10. Décomposer en elements simples la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1 \text{ avec } \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1$$

11. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$.
Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Démontrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\left((u - 2id)^2\right)$ et q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}\left((u - 2\mathrm{id})^2\right)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$.

12. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question Q8).
Determiner le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé a la valeur propre λ_i.
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

14. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

15. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

16. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont a la fois diagonalisables et nilpotentes.

17. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions $(1), (2), (3), (4)$ et tel que D et N soient des polynômes en A.
Établir l'unicite du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Exercice 6 *(d'après* `CCINP 2022 - PC`*)*

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)) \ .$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.
Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.
Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X\,,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2\,.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1\,.$$

3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})\,.$$

4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

6. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})\,.$$

7. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}.$$

IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

9. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

10. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

11. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

12. En utilisant 9, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.

13. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Exercice 7 *(d'après* `CCINP 2012 - PSI-2`*)*

Notations

- On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Etant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (resp. des matrices colonnes à n lignes), à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de A. On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A.
- Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A, $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A ; on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A et si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifient $AX = \lambda X$.
  Soit I_n la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
- On note $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.
- Pour tout nombre complexe z, on note $|z|$ le module de z.
- On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(ST > 0)$ lorsque :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ a_{i,j} > 0 \tag{1}$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \tag{2}$$

Objectifs

Dans ce problème, on considère les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la propriété $(ST > 0)$.
Dans la première partie, on démontre une caractérisation géométrique d'une classe de matrices vérifiant la propriété $(ST > 0)$.
Dans la deuxième partie, on fait établir des propriétés sur les éléments propres des matrices vérifiant la propriété $(ST > 0)$.

Partie 1

- Dans cette partie, on suppose $n = 3$. etant donné un nombre complexe z, on note $M(z)$ le point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, c'est à dire le point de coordonnées (x, y).
- On considère le triangle du plan complexe dont les sommets sont les points $P(1)$, $Q(j)$, $R(j^2)$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- On note T l'intérieur de ce triangle, bords non compris.
- Soit D le disque ouvert du plan complexe de centre O (origine du repère) et de rayon 1, c'est à dire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| < 1$.

1. Dessiner les ensembles T et D sur un même dessin.
En notant x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan complexe, donner les équations cartésiennes des côtés du triangle PQR.
Déterminer les équations cartésiennes des droites (PQ), (QR) et (RP). Montrer qu'un point $M(x + iy)$ appartient à T si et seulement si x et y vérifient les trois inégalités :

$$2x + 1 > 0,\ x - \sqrt{3}y - 1 < 0,\ x + \sqrt{3}y - 1 < 0$$

2. Dans cette question, on considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(ST > 0)$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

Dans la suite de la question ***2***, on suppose que les autres valeurs propres de A sont des nombres complexes conjugués distincts λ et $\overline{\lambda}$, avec $0 < |\lambda| < 1$. On note $\lambda = a + ib$.

b) Exprimer $\mathrm{Tr}(A)$ ainsi que $\mathrm{Tr}(A^2)$ en fonction de λ et $\overline{\lambda}$, puis en fonction de a et b.

c) Montrer les inégalités $\mathrm{Tr}(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^3$.

En déduire l'inégalité $(\mathrm{Tr}(A))^2 < 3\mathrm{Tr}(A^2)$ (on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $u = (a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3})$ et $v = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$).

d) Déduire de ***2.b)*** et ***2.c)*** le inégalités

$$2a + 1 > 0 \ \text{ et } \ (a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) > 0$$

e) Déduire des questions précédentes que le point $M(\lambda)$ appartient à T (on pourra considérer les régions de D délimitées par les côtés du triangle PQR).

3. Dans cette question, on note $\lambda = re^{i\theta}$ avec $0 < r < 1$ et $0 < \theta < \pi$ et on suppose que le point $M(\lambda)$ appartient à T. On note

$$\alpha = \frac{1 + 2r\cos(\theta)}{3},\ \beta = \frac{1 + 2r\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{3},\ \gamma = \frac{1 - 2r\cos(\theta + \frac{\pi}{3})}{3}$$

a) Montrer les égalités $\alpha = \dfrac{1 + \lambda + \overline{\lambda}}{3}$, $\beta = \dfrac{1 + j\lambda + j^2\overline{\lambda}}{3}$, $\gamma = \dfrac{1 + j^2\lambda + j\overline{\lambda}}{3}$.

Dans la suite de la question ***3***, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

b) Montrer que la matrice A vérifie la propriété $(ST > 0)$.

c) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et J^3. Déterminer les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice J.

d) Exprimer la matrice A en fonction de I_3, J et J^2.

Déterminer un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que $A = P(J)$.

e) En déduire que $1, \lambda$ et $\overline{\lambda}$ sont les valeurs propres de A.

Partie 2

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(ST > 0)$.

4. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer AU et en déduire que 1 est valeur propre de A.

5. **Précision sur** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$

a) Soient une matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$ et un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tel que $BX = 0$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_i|,\ i \in [\![1,n]\!]\}$. Justifier l'inégalité :

$$|b_{k,k}| \leqslant \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
En appliquant ***5.a)*** à la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer que $|a_{k,k} - \lambda| \leqslant 1 - a_{k,k}$, où k est l'entier défini en ***5.a)***. En déduire $|\lambda| \leqslant 1$.

c) On suppose que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déduire de l'inégalité $|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leqslant 1 - a_{k,k}$ de ***5.b)*** que $\cos(\theta) = 1$, puis en déduire λ.

6. **Dimension de $E_1(A)$**

a) Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA)$. En comparant le rang de $A - I_n$ et celui de ${}^tA - I_n$, montrer que les sous-espaces $E_1(A)$ et $E_1({}^tA)$ ont même dimension.

b) Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $V \neq 0$, tel que ${}^tAV = V$. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $|v_i| \leqslant \sum\limits_{j \in [\![1,n]\!]} a_{j,i}|v_j|$. En calculant $\sum\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$. Montrer que ${}^tA|V| = |V|$, puis que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $|v_i| > 0$.

c) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des matrices non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $E_1({}^tA)$. En considérant la matrice $X - \frac{x_1}{y_1}Y$, déterminer la dimension de $E_1({}^tA)$.

Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $E_1({}^tA)$, tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on ait $\omega_i > 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$.

d) **Bilan des propriétés spectrales de A et de ${}^tA$.**
Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de A et de ${}^tA$ qui ont été démontrées dans les questions précédentes de la deuxième partie.

7. À l'aide la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ définie en ***6.c)***, on considère l'application N définie de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ N(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i|$$

Montrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $N(AX) \leqslant N(X)$.

Retrouver le résultat de ***5.b)*** : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leqslant 1$.

8. **Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A.**

À l'aide la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, on considère la forme linéaire Φ : $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\ x_i$$

On note $\mathrm{Ker}(\Phi)$ le noyau de Φ.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

b) Justifier que $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$.

c) Soit $X \in E_\lambda(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

d) En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la la valeur propre 1 de la matrice A.

Exercice 8 *(d'après* `CCINP 2014 - PSI-2`*)*

Notations

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $[0, n]$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} / \ 0 \leqslant p \leqslant n\}$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Pour tout entier n, $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note encore P la fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

Objectifs

On se propose d'étudier une famille de polynômes et leurs racines. Dans une première partie, on introduit une famille de polynômes (P_n) vectuers propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. L'objet de la seconde partie est l'étude, dans un cas particulier, d'une famille de polynômes orthogonaux. Enfin, dans la dernière partie, on étudie les valeurs propres d'une matrice pour démontrer une propriété des racines de ces polynômes.

Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, on pose

$$A(X) = X^2 - 1 \ ; \ B(X) = 2X$$

1. **Une application linéaire**
On considère l'application $\Phi \ : \ \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par

$$\Phi(P) = AP'' + BP'$$

a) Montrer que pour tout entier n, la restriction, notée Φ_n, de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer brièvement :

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$$

définit un produit scalaire. Vérifier : $\langle XP, Q\rangle = \langle P, XQ\rangle$.

2. **Une base de vecteurs propres**

a) Soient P, Q deux polynômes. Déterminer deux polynômes U, V tels que

$$\langle \Phi(P), Q\rangle - \langle P, \Phi(Q)\rangle = \int_{-1}^{1} (A(t)U(t) + A'(t)V(t))\ dt$$

En déduire que pour tout entier n, l'endomorphisme Φ_n est auto-adjoint.

b) Écrire la matrice de $\Phi_n \ : \ \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ et en déduire les valeurs propres de Φ_n.

c) Montrer qu'il existe une base $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ_n unitaires tels que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in [0, n]$.

d) Montrer que si $i \neq k$ alors $\langle P_i, P_k\rangle = 0$. En déduire que P_n est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

e) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 et déterminer leurs racines.

Étude des racines de ces polynômes

3. **Une relation de récurrence**
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Justifier l'existence d'un réel λ_n tel que

$$P_n - XP_{n-1} + \lambda_n P_{n-1} = S_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

4. **Dans cette question on suppose** $n \geqslant 3$
En calculant $\langle XP_{n-1}, P_k\rangle$ pour tout polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ (avec $k \leqslant n-3$), montrer que $\langle S_n, P_k\rangle = 0$.

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\mu_n > 0$ tels que

$$P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$$

Calculer de façon directe $\lambda_2, \mu_2, \lambda_3$ et μ_3.

6. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{-1}^{1} P_k(t)\, dt = 0$$

En déduire que P_k admet au moins une racine d'ordre impair dans $]-1,1[$.

7. Soient $x_1, \dots, x_k$ les racines distinctes d'ordre impair de P_n dans $]-1,1[$ et soit Q le polynôme $\prod_{i=1}^{k} (X - x_i)$.

En considérant QP_n, montrer que P_n a n racines simples dans $]-1,1[$ (on pourra raisonner par l'absurde et calculer $\int_{-1}^{1} Q(t)P_n(t)\, dt$ en supposant $k < n$).

Étude d'une matrice

8. **Etude d'un déterminant.**

Pour tout entier $n > 0$, on considère la matrice :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\mu_2} & \lambda_2 & \sqrt{\mu_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_3} & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \sqrt{\mu_n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\mu_n} & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

a) On pose $Q_0(X) = 1$ et, pour tout entier $n > 0$, $Q_n(X) = \det(XI_n - M_n)$. Calculer $Q_1(X)$. Exprimer $Q_n(X)$ en fonction de $Q_{n-1}(X)$ et de $Q_{n-2}(X)$ pour $n = 2$ et $n = 3$.

b) Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 3$, une relation entre $Q_n(X)$, $Q_{n-1}(X)$ et $Q_{n-2}(X)$.

c) En déduire que toutes les racines de P_n sont réelles (résultat déjà montré en **II.5**).

9. **Valeurs propres de M_n**

On considère M_n comme la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel (noté $(x, y) \mapsto (x|y)$) dans la base canonique. On note $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \alpha_n$ les valeurs propres de M_n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de M_n tels que $u(e_i) = \alpha_i e_i$.

a) Soit F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_1, \dots, e_i)$. Montrer que sur la sphère unité de F_i, l'application $x \mapsto (u(x)|x)$ atteint un maximum et le calculer.

b) Soit G_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_i, \dots, e_n)$. Montrer que sur la sphère unité de G_i, l'application $x \mapsto (u(x)|x)$ atteint un minimum que l'on calculera.

10. **Une expression des valeurs propres.**

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension i. Montrer que $G_i \cap F \neq \{0\}$ et que si $x \in G_i \cap F$ vérifie $\|x\| = 1$ alors $(u(x)|x) \geqslant \alpha_i$. En déduire que

$$\alpha_i = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \right\}$$

11. Une démonstration analogue montre, ce que l'on admettra, que

$$\alpha_i = \max_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=n+1-i}} \left\{ \min_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \right\}$$

a) On note $\beta_1 \leqslant \dots \leqslant \beta_{n-1}$ les valeurs propres de M_{n-1}. En utilisant ce qui précède, montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ on a $\beta_i \geqslant \alpha_i$ et $\alpha_{i+1} \geqslant \beta_i$.

b) En déduire que

$$\alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \beta_{n-1} \leqslant \alpha_n$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que P_n admet n racines distinctes $(x_1, \dots, x_n)$ rangées par ordre croissant dans l'intervalle $]-1,1[$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, le polynôme P_{n-1} admet une racine dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Exercice 9 *(d'après* `CCINP 2019 - PSI`*)*

Notations et définitions

- soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$;
- $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$; si $P \in \mathbb{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée ;
- $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, et $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$;
- on note I_p la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et 0_p la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ ne comportant que des 0 ;
- on note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$;
- étant donnée une matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Objectifs

Dans la **partie I**, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la **partie I** pour résoudre, dans la **partie II**, un système différentiel.

Partie I – Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres

On considère une matrice $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\lambda x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

2. Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{j \in [\![1,n]\!]} |x_j|$. Montrer : $|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

En déduire :

$$|\lambda| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha,\beta) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

3. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ sont réelles.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer :

$$|\lambda| \leqslant |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$

5. En utilisant la question 4, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

6. Établir, pour $n \geqslant 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.
En déduire, pour $n \geqslant 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

7. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0,\pi[$:

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

8. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in [\![1,n]\!]\right\}$. Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Considérons $j \in [\![1,n]\!]$ et posons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.

9. Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 & = & 0, \\ \forall k \in [\![2,n-1]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} & = & 0, \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n & = & 0. \end{array} \right.$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

10. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la dimension.

11. Déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

12. En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.

13. En déduire, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II – Système différentiel

II.1 – Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

14. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC). \tag{1}$$

15. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

16. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p}I_n$ soit inversible.

17. En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

18. Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C}; \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

19. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

20. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

II.2 – Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'' &= -2x_1 + x_2, \\ x_2'' &= x_1 - 2x_2. \end{cases} \tag{2}$$

21. Déterminer $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que le système (2) soit équivalent au système différentiel du premier ordre $X' = BX$, où :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(\alpha,\beta) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$$

Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de ce système ?

22. En utilisant la question 18, déterminer les valeurs propres de B et en déduire que B est diagonalisable.

On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

23. En utilisant la question 19, déterminer une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $B = PDP^{-1}$.

24. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = DY$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

25. Déterminer la solution du système différentiel (2) avec conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1, 0, 0, 0)$.

Exercice 10 *(d'après* `CCINP 2020 - PSI`*)*
Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonne.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$. On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs
Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX$^{\text{e}}$ siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Éric Kostlan au début des années 2 000.

Partie I – La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*

3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).$$

5. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

6. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$.
En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Partie II – Étude d'un endomorphisme

Objectifs
Dans cette **partie**, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \mid (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

7. Montrer que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.

8. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que $f'_k \in V_n$. En déduire :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & V_n & \to & V_n \\ & f & \mapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

9. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k}$.

10. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $g_k \in V_n$.

11. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, calculer g'_k. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

12. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

13. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire :

$$\mathrm{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$.

Partie III – Les matrices de Kac de taille $n+1$

Objectifs

Dans cette **partie**, on introduit la matrice A_n. On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général a_{kl} de la matrice A_n vérifie donc :

× $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,

× $a_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,

× $a_{kl} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1,n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k^{e} terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

14. Soient $M = (m_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl}, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl}.

15. Montrer que $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n.

16. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k-n$ pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\mathrm{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \text{ où pour tout } k \in [\![0,n]\!], \text{ on note } p_k = \binom{n}{k}$$