

Feuille d'exercices n°1 : Séries numériques

Nature d'une série

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

$$\begin{array}{lll}
 a. \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2} & j. \sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) & r. \sum \frac{1}{e^n + e^{-n}} \\
 b. \sum \frac{n+1}{(n+3)^2} & k. \sum \frac{n}{\ln(n)} & s. \sum \frac{1}{n^4 - 3^n} \\
 c. \sum n^4 e^{-n} & l. \sum \frac{\ln(n)}{n} & t. \sum \ln\left(\frac{n^2 + n^4}{2n^4}\right) \\
 d. \sum n^n e^{-n} & m. \sum \frac{\ln(n)}{n^2} & u. \sum \sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}} \\
 e. \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} & n. \sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^3}\right) & v. \sum \frac{\ln(n)}{2^n} \\
 f. \sum \frac{1}{n 2^n} & o. \sum \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{n} & w. \sum \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} \\
 g. \sum e^{\frac{1}{n^2}} & p. \sum \frac{1}{\sqrt{n!}} & x. \sum \left(\frac{5n+1}{6n+2}\right)^n \\
 h. \sum \frac{1}{3^n - 2^n} & q. \sum \frac{1}{n^2 - n} &
 \end{array}$$

Exercice 2

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

$$\begin{array}{ll}
 a. \sum \frac{n!}{n^n} & d. \sum \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n) \\
 b. \sum \frac{a^n + 1}{b^n}, \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & e. \sum \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}} \\
 c. \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}, \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^* & f. \sum \sin(\pi(1 + \sqrt{2})^n)
 \end{array}$$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

$$\begin{array}{lll}
 a. \sum \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} & c. \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} & e. \sum \frac{\sin(n^3)}{n^2} \\
 b. \sum \frac{(n!)^3}{(3n)!} & d. \sum \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} & f. \sum \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{array}$$

Nature d'une série à l'aide d'un développement asymptotique

Exercice 4

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

$$\begin{array}{lll}
 a. \sum \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) & c. \sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) & e. \sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \\
 b. \sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) & d. \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} & f. \sum \frac{(\ln(n))^n}{n!}
 \end{array}$$

Calcul de sommes à vue (sommes usuelles)

Exercice 5

Étudier la nature et calculer la somme (si elle existe) des séries suivantes (on pourra discuter selon la valeur de x , dans les questions où un x intervient).

$$a. \sum \frac{7}{2^{2n-5}} \quad g. \sum \frac{4n^2 + 5n}{5^n} \quad m. \sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$$

$$b. \sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad h. \sum \frac{n-1}{3^n} \quad n. \sum \frac{n^2 8^n}{n!}$$

$$c. \sum \frac{n}{2^n} \quad i. \sum \frac{2n^2}{n^3 - 1} \quad o. \sum \frac{(-1)^n}{4^n}$$

$$d. \sum n^2 x^n \quad j. \sum \frac{3(-2)^n}{n!} \quad p. \sum \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$$

$$e. \sum \frac{n}{3^{2n+1}} \quad k. \sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) \quad q. \sum \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$$

$$f. \sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n} \quad l. \sum \frac{n+7}{2^n n!} \quad r. \sum \frac{n^2 - n}{(n+3)!}$$

Exercice 6

Justifier la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

$$a. \sum \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) \quad b. \sum \frac{1}{n(n+1)} \quad c. \sum \frac{1}{(3n)!}$$

Pour la question *c.*, on pourra déterminer la valeur de $1 + j^n + j^{2n}$ pour n congru à 0, 1 ou 2 modulo 3.

Suites adjacentes

Exercice 7

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

1) *a.* Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes.

b. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une suite (α_n) de limite nulle tels que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \alpha_n$$

(le réel γ est appelé constante d'Euler)

2) *a.* Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \gamma \leq u_n$.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\gamma - u_n| \leq |v_n - u_n|$.

c. Écrire un programme **Python** qui affiche une valeur approchée de γ à 10^{-4} près.

Critère spécial des séries alternées

Exercice 8 (d'après INP)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n(X) = X^n + \sqrt{n}X - 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine réelle positive, notée u_n dans la suite.

2. Déterminer la limite de (u_n) .

3. Étudier les séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 9

Étudier la convergence des séries $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$ dans les cas où la suite (a_n) est définie par :

$$1. \begin{cases} a_0 \in]0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^2}{2} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} a_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \end{cases}$$

Exercice 10 (d'après Centrale)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note respectivement S_n et S la somme partielle d'ordre n et la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

- Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$.
En déduire un entier n tel que : $S_n \leq S < S_n + 10^{-4}$.
- Écrire les instructions **Python** permettant de tracer les 200 premiers termes de la suite (S_n) .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on permute les termes de S_n , alternant, dans l'ordre d'apparition, un terme positif, deux termes négatifs et on note :

$$T_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$$

la somme partielle d'ordre n associée.

- Écrire les instructions **Python** permettant de tracer les 200 premiers termes de la suite (T_n) .
 - Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (T_n) ?
 - Démontrer cette conjecture.
4. Même question en alternant deux termes positifs, puis un terme négatif, dans l'ordre.

Exercice 11

Soit $\alpha \in]0, \pi]$.

On souhaite démontrer la convergence et calculer la somme des séries :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

a. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
Calculer I_0 , et $I_n + I_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

c. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. On pose, pour $t \in [\alpha, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{e^{it} - 1} \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^n e^{ikt}$$

a. Montrer : $S_n(t) = \varphi(t) (e^{i(n+1)t} - e^{it})$.

Exprimer $\varphi(t) e^{it}$ en fonction de $\frac{e^{it/2}}{\sin(t/2)}$.

b. Montrer : $\int_{\alpha}^{\pi} \varphi(t) e^{i(n+1)t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(indication : on pourra utiliser une intégration par parties)

c. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n}$ converge, et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n} = -\ln(2) + i \int_{\alpha}^{\pi} \varphi(t) e^{it} dt$$

d. En déduire la convergence et la somme des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$.

Séries de Bertrand

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- Cas $\alpha \neq 1$. Comparer asymptotiquement u_n à $\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$.
En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
(indication : on distinguera les cas $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$)
- Traiter le cas $\alpha = 1$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Produit de Cauchy

Exercice 13

On considère la série $\sum u_n$ dont le terme général est défini par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

- Montrer que la série $\sum u_n$ converge, et qu'elle ne converge pas absolument.
- Soit $\sum w_n$ le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ avec elle-même.
 - Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

b. Justifier :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, 0 < k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$$

En déduire que le produit de Cauchy $\sum w_n$ diverge grossièrement.

- Ce résultat est-il en contradiction avec le théorème de convergence des produits de Cauchy ?

Reste d'une série convergente

Exercice 14 (d'après INP)

Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

- Encadrer R_n et en déduire un équivalent de R_n .
- Étudier la convergence de la série $\sum \frac{R_n}{S_n}$ selon α .
- Soit $x_n = R_{n^2}/R_n$. Discuter la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum (-1)^n x_n$.

Formule de Stirling

Exercice 15

Le but est de prouver l'équivalent suivant (à connaître) :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}$ et $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
 - Déterminer la nature de la série $\sum v_n$, puis de la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.
- Intégrales de Wallis**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$.

- Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$$

- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ et $(n+1) w_{n+1} w_n = \frac{\pi}{2}$.
- Déduire des questions précédentes deux équivalents de w_{2n} , et conclure.

Séries à termes positifs et critères de convergence des séries

Exercice 16 (d'après INP)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$b_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{a_n}{b_n}$$

1. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = 1 - \frac{1}{b_n}$.

b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Étudier la convergence de la suite (b_n) .

Exercice 17

1. a) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que : $0 \leq x^2 \leq x$.

b) On considère (x_n) une suite de réels positifs.

Montrer que : $\sum x_n$ converge $\Rightarrow \sum x_n^2$ converge.

2. Exhiber un contre-exemple dans le cas où la série étudiée n'est pas à termes positifs.

Exercice 18

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On suppose que les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

1. Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, 2ab \leq a^2 + b^2$.

2. À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que la série $\sum u_n v_n$ est (absolument) convergente.

Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$

1) a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

a. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) \leq t$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} u_n}$.

c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

d. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

3) a. Montrer, à l'aide de la question 2b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$$

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \ell - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.

c. En déduire : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$.

Règle de Raabe-Duhamel

Exercice 20 (d'après TPE - écrit E3A 2009)

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ telle que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que, à partir d'un certain rang :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

Montrer : $x_n = O_{n \rightarrow +\infty}(y_n)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \neq \beta$.

Trouver un équivalent de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{w_{n+1}}{w_n}$, où $w_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

3. Montrer que si $\beta > 1$ (resp. $\beta < 1$), alors la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge).

4. Montrer que pour $\beta = 1$, on ne peut pas conclure a priori sur la nature de la série $\sum u_n$.

(indication : on pourra considérer les cas des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n \ln^2(n)}$)

Sommes télescopiques

Exercice 21

On considère la suite (a_n) est définie par : $\begin{cases} a_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = e^{-a_n} a_n \end{cases}$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$.

b. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

d. On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de a_n .

e. En déduire la nature de $\sum a_n$.

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

1) a. Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

b. Montrer que (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.

c. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

2) a. Montrer que (v_n) est strictement négatif.

b. Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.

d. En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra :

$$\forall x \in [0, 1], \frac{x^2}{4} \leq 1 - \frac{2}{e^x + e^{-x}} \leq x^2$$

3) a. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

b. En utilisant le résultat de l'exercice 17, déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 23

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1]$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.
4. Prouver que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Comparaison séries intégrales**Exercice 24**

On définit la fonction :

$$f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 2$ on a : $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
2. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit l'intégrale : $I_n = \int_2^n f(x) dx$.
 - a. En utilisant l'inégalité de la question 1., démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$$

- b. On définit la fonction F suivante :

$$F : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Calculer la dérivée de F .

En déduire une expression de I_n en fonction de n .

- c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

- a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$$

- b. En déduire : $\forall n \geq 3, I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

- c. Démontrer : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit, pour tout entier $n \geq 2$:

$$T_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k^2 - 1)^\alpha}$$

- a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

- b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Exercice 25

On note f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2) Montrer : $\forall k \geq 3$, on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note : $S_n = \sum_{k=2}^n f(k)$.

3) a. Montrer que : $\forall n \geq 3$, $S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \int_2^n f(t) dt \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}$$

c. Établir que : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4) À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5) a. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$: $0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}$.

(indication : on pourra commencer par démontrer que $v_n - \ell \leq v_n - u_n$)

b. En déduire une fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.