Feuille d'exercices n°1 : Séries numériques

Exercice 25
On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ car elle est l'inverse $f = \dfrac{1}{g}$ où $g : x \mapsto x\ln(x)$:
  - × est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
  - × `NE S'ANNULE PAS` sur $]1,+\infty[$.
- Soit $x > 1$.

$$f'(x) = -\frac{\ln(x) + \frac{x}{x}}{(x\ln(x))^2} = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$$

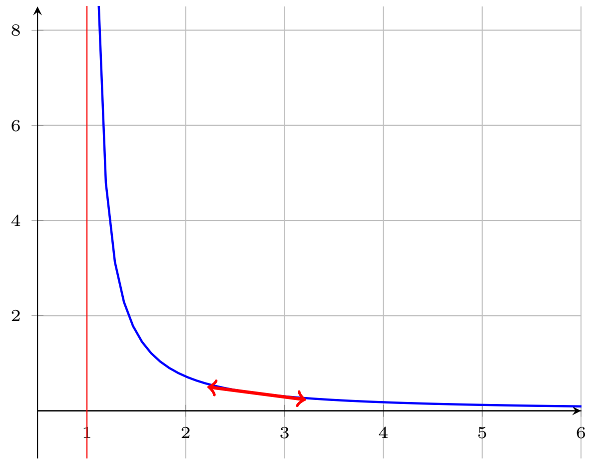
Comme $(x \ln(x))^2 > 0$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $-(\ln(x)+1)$.
Or : $\ln(x) + 1 > 1 > 0$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$
Variations de f	$+\infty$ ↘	0

- La courbe représentative de f admet pour tangente en e la droite d'équation :

$$y = f'(\mathrm{e})\ (x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$$

Or : $f'(\mathrm{e}) = -\frac{2}{\mathrm{e}^2} \simeq -0,27$.



□

2) Montrer : $\forall k \geqslant 3$, on a : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 3$. Soit $t \in [k-1, k]$.

$$k-1 \leqslant t \leqslant k$$

donc $$f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1)$$ *(par décroissance de f sur $]1,+\infty[$)*

et $$\int_{k-1}^{k} f(k)\ dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dt$$ *(par croissance de l'intégrale sur un* `SEGMENT`*, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \geqslant k-1$))*

ainsi $$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \geqslant 3, \text{ on a : } f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1).}$$

□

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

3) ***a.*** Montrer : $\forall n \geqslant 3,\ S_n - \dfrac{1}{2\ln(2)} \leqslant \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt \leqslant S_n - \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.
D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![3, n]\!],\ f(k)\ \leqslant\ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt\ \leqslant\ f(k-1)$$

En sommant ces $n-2$ inégalités, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \sum\limits_{k=3}^{n} f(k) & \leqslant & \sum\limits_{k=3}^{n} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \leqslant & \sum\limits_{k=3}^{n} f(k-1) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ S_n - f(2) & & \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt & & S(n) - f(n) \\ & & \textit{(relation de Chasles)} & & \end{array}$$

La dernière égalité est obtenu par décalage d'indice :

$$\sum_{k=3}^{n} f(k-1) = \sum_{k=2}^{n-1} f(k) = S_n - f(n)$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall n \geqslant 3,\ S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \int_{2}^{n} f(t)\ dt \leqslant S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.}$$

□

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leqslant S_n \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 3$:
  - × $S_n \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{2\ln(2)}$ (inégalité de gauche),
  - × $S_n \geqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{n\ln(n)}$ (inégalité de droite).

  On en conclut :

$$\int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{n\ln(n)} \ \leqslant\ S_n \ \leqslant\ \int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{2\ln(2)}$$

- Or :

$$\begin{aligned}\int_2^n f(t)\ dt &= \int_2^n \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\ dt \\ &= \big[\ \ln(|\ln(t)|)\ \big]_2^n \\ &= \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)\end{aligned}$$

  On en conclut :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n\ln(n)} \ \leqslant\ S_n \ \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

  Enfin, comme $n \geqslant 3$, $\ln(n) > 0$ et donc $\dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 3,\ \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leqslant S_n \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)}}$$ □

c. Établir : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 3$. Alors $n > \mathrm{e}$ et donc $\ln\big(\ln(n)\big) > \ln(\ln(\mathrm{e})) = 0$.
  En divisant l'encadrement de la question précédente par $\ln\big(\ln(n)\big)$, on obtient :

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln\big(\ln(n)\big)} \ \leqslant\ \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \ \leqslant\ 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln\big(\ln(n)\big)} + \frac{1}{2\ln(2)}\,\frac{1}{\ln\big(\ln(n)\big)}$$

  Or :
  - × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} = 1$,
  - × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)}\,\frac{1}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$.

  D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).}$$

Commentaire

Puisque $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\big(\ln(n)\big) = +\infty$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
Cela permet de conclure que la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente. □

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4) À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
On note ℓ leur limite commune.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - \Big(\ln\big(\ln(n+2)\big) + \ln\big(\ln(n+1)\big)\Big) \\ &= f(n+1) - [\ \ln(\ln(t))\ ]_{n+1}^{n+2} \\ &= f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(par application de l'inégalité 2) avec $k = n+2 \geqslant 3$)

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est donc croissante.}}$$

- En raisonnant de même (on applique l'inégalité de la question *2)* avec $k = n+1 \geqslant 3$), on obtient :

$$v_{n+1} - v_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geqslant 2} \text{ est donc décroissante.}}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(n)\big)\big) \\ &= \ln\left(\tfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(\tfrac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

(car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$)

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, les suites } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant 2} \text{ sont adjacentes.}}$$

Commentaire

Les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \ell = 0$, on en déduit : $v_n - \ell = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Ainsi, par définition de v_n :

$$S_n - \ln\big(\ln(n)\big) - \ell = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Ce qui permet de conclure : $S_n = \ln\big(\ln(n)\big) + \ell + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

□

5) a. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$: $0 \leqslant v_n - \ell \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Démonstration.

- Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{array}{rcll} v_n & \geqslant & \liminf\limits_{n\to+\infty} v_n & \textit{(car la limite inférieure d'une suite est toujours un minorant de cette suite)} \\ & = & \ell & \textit{(car la suite } (v_n) \textit{ converge vers } \ell\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ v_n \geqslant \ell}$$

- On démontre de même : $\forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant \ell$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$-\ell \leqslant -u_n \quad \text{et} \quad v_n - \ell \leqslant v_n - u_n$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} v_n - u_n & = & \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(n)\big)) & \\ & = & \Big[\ln\big(\ln(t)\big)\Big]_n^{n+1} & \\ & = & \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \dfrac{1}{n\ \ln(n)} & \textit{(par application du } \textbf{\textit{2)}} \textit{ à } k = n+1 \geqslant 3\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant v_n - \ell \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}}$$

□

b. En déduire un fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que v_N est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|\ v_N - \ell\ | \ \leqslant\ 10^{-3}$$

- Or, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$:

$$|\ v_n - \ell\ | \ \leqslant\ \frac{1}{n\ \ln(n)}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{N\ \ln(N)} \leqslant 10^{-3}$.
  En effet, par transitivité, on aura alors :

$$|\ v_N - \ell\ | \ \leqslant\ \frac{1}{N\ \ln(N)}\ \leqslant\ 10^{-3}$$

- On propose alors le programme suivant :

```
def approx() :
    n = 1
    S = 0
    while 1 / (n * log(n)) > 10**(-3) :
        n = n + 1
        S = S + 1 / (n * log(n))
    v = S - log(log(n))
    return v
```

Commentaire

- Pour ce type de questions, on opère souvent comme suit.
  1) On trouve un n_0 tel que : $\dfrac{1}{n_0 \ln(n_0)} \leqslant 10^{-3}$.
  2) On détermine, à l'aide d'une boucle `for` la valeur de :
  $$S_{n_0} - \ln(\ln(n_0))$$
- On a choisi ici d'opérer à l'aide d'une boucle `while` (ce qui oblige à mettre à jour un compteur `n`). Ce choix n'en est en fait pas un : on opère ainsi car on ne peut, par des manipulations algébriques basiques, trouver le n_0 du point *1)*.
- Ces deux présentations (boucle `for` ou `while`) sont évidemment correctes. Le choix de l'une d'elle peut-être dicté par l'énoncé.

$\square$