Feuille d'exercices n°1 : Séries numériques

Exercice 25

On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]1,+\infty[, \ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ car elle est l'inverse $f = \dfrac{1}{g}$ où $g : x \mapsto x\ln(x)$:
  - $\times$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
  - $\times$ `NE S'ANNULE PAS` sur $]1,+\infty[$.
- Soit $x > 1$.

$$f'(x) = -\frac{\ln(x) + \frac{x}{x}}{(x\ln(x))^2} = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$$

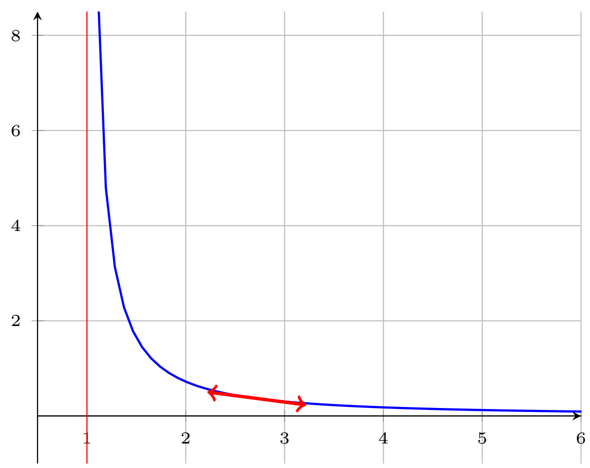
Comme $(x\ \ln(x))^2 > 0$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $-(\ln(x)+1)$.
Or : $\ln(x)+1 > 1 > 0$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\|$	$-$
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$	0

- La courbe représentative de f admet pour tangente en e la droite d'équation :

$$y = f'(\mathrm{e})\ (x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$$

Or : $f'(\mathrm{e}) = -\frac{2}{\mathrm{e}^2} \simeq -0,27$.



$\square$

2) Montrer : $\forall k \geqslant 3$, on a : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 3$. Soit $t \in [k-1, k]$.

$$k-1 \leqslant t \leqslant k$$

donc $$f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1)$$ *(par décroissance de f sur $]1, +\infty[$)*

et $$\int_{k-1}^{k} f(k)\ dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dt$$ *(par croissance de l'intégrale sur un* `SEGMENT`*, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \geqslant k-1$))*

ainsi $$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \geqslant 3, \text{ on a : } f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1).}$$

□

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

3) ***a.*** Montrer : $\forall n \geqslant 3,\ S_n - \dfrac{1}{2\ln(2)} \leqslant \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt \leqslant S_n - \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.
D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![3, n]\!],\ f(k)\ \leqslant\ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt\ \leqslant\ f(k-1)$$

En sommant ces $n-2$ inégalités, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \sum\limits_{k=3}^{n} f(k) & \leqslant & \sum\limits_{k=3}^{n} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \leqslant & \sum\limits_{k=3}^{n} f(k-1) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ S_n - f(2) & & \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt & & S(n) - f(n) \end{array}$$

(relation de Chasles)

La dernière égalité est obtenu par décalage d'indice :

$$\sum_{k=3}^{n} f(k-1) = \sum_{k=2}^{n-1} f(k) = S_n - f(n)$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall n \geqslant 3,\ S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \int_{2}^{n} f(t)\ dt \leqslant S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.}$$

□

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leqslant S_n \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 3$:
  × $S_n \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\,dt + \frac{1}{2\ln(2)}$ (inégalité de gauche),
  × $S_n \geqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\,dt + \frac{1}{n\ln(n)}$ (inégalité de droite).

  On en conclut :

$$\int_2^n f(t)\,dt + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant S_n \leqslant \int_2^n f(t)\,dt + \frac{1}{2\ln(2)}$$

- Or :

$$\begin{aligned}\int_2^n f(t)\,dt &= \int_2^n \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\,dt \\ &= \big[\ \ln(|\ln(t)|)\ \big]_2^n \\ &= \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)\end{aligned}$$

  On en conclut :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

  Enfin, comme $n \geqslant 3$, $\ln(n) > 0$ et donc $\dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 3,\ \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leqslant S_n \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)}}$$ □

c. Établir : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 3$. Alors $n > \mathrm{e}$ et donc $\ln\big(\ln(n)\big) > \ln(\ln(\mathrm{e})) = 0$.
  En divisant l'encadrement de la question précédente par $\ln\big(\ln(n)\big)$, on obtient :

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln\big(\ln(n)\big)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leqslant 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln\big(\ln(n)\big)} + \frac{1}{2\ln(2)}\,\frac{1}{\ln\big(\ln(n)\big)}$$

  Or :
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} = 1$,
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)}\,\frac{1}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$.

  D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).}$$

Commentaire

Puisque $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\big(\ln(n)\big) = +\infty$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
Cela permet de conclure que la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente. $\square$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4) À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
On note ℓ leur limite commune.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - \Big(\ln\big(\ln(n+2)\big) + \ln\big(\ln(n+1)\big)\Big) \\ &= f(n+1) - \big[\ \ln(\ln(t))\ \big]_{n+1}^{n+2} \\ &= f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \\ &\geqslant 0 \qquad \textit{(par application de l'inégalité 2) avec } k = n+2 \geqslant 3\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est donc croissante.}}$$

- En raisonnant de même (on applique l'inégalité de la question *2)* avec $k = n+1 \geqslant 3$), on obtient :

$$v_{n+1} - v_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geqslant 2} \text{ est donc décroissante.}}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(n)\big)\big) \\ &= \ln\left(\tfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(\tfrac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{(car } \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0 \textit{ et : } \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, les suites } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant 2} \text{ sont adjacentes.}}$$

Commentaire

Les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - \ell = 0$, on en déduit : $v_n - \ell = \underset{n \to +\infty}{o}(1)$. Ainsi, par définition de v_n :

$$S_n - \ln\big(\ln(n)\big) - \ell = \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

Ce qui permet de conclure : $S_n = \ln\big(\ln(n)\big) + \ell + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$.

□

5) a. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$: $0 \leqslant v_n - \ell \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Démonstration.

- Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{array}{rcll} v_n & \geqslant & \liminf\limits_{n \to +\infty} v_n & \textit{(car la limite inférieure d'une suite est toujours un minorant de cette suite)} \\ & = & \ell & \textit{(car la suite } (v_n) \textit{ converge vers } \ell\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ v_n \geqslant \ell}$$

- On démontre de même : $\forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant \ell$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$-\ell \leqslant -u_n \quad \text{et} \quad v_n - \ell \leqslant v_n - u_n$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} v_n - u_n & = & \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(n)\big)) & \\ & = & \Big[\ \ln\big(\ln(t)\big)\ \Big]_n^{n+1} & \\ & = & \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\ dt\ \leqslant\ \dfrac{1}{n\ \ln(n)} & \textit{(par application du } \textbf{\textit{2)}} \textit{ à } k = n+1 \geqslant 3\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant v_n - \ell \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}}$$

□

b. En déduire un fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que v_N est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|\ v_N - \ell\ |\ \leqslant\ 10^{-3}$$

- Or, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$:

$$|\ v_n - \ell\ |\ \leqslant\ \frac{1}{n\ \ln(n)}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{N\ \ln(N)} \leqslant 10^{-3}$.
  En effet, par transitivité, on aura alors :
  $$|\ v_N - \ell\ | \ \leqslant\ \frac{1}{N\ \ln(N)}\ \leqslant\ 10^{-3}$$
- On propose alors le programme suivant :

```
def approx() :
    n = 1
    S = 0
    while 1 / (n * log(n)) > 10**(-3) :
        n = n + 1
        S = S + 1 / (n * log(n))
    v = S - log(log(n))
    return v
```

Commentaire

- Pour ce type de questions, on opère souvent comme suit.
  1) On trouve un n_0 tel que : $\dfrac{1}{n_0 \ln(n_0)} \leqslant 10^{-3}$.
  2) On détermine, à l'aide d'une boucle `for` la valeur de :
  $$S_{n_0} - \ln(\ln(n_0))$$
- On a choisi ici d'opérer à l'aide d'une boucle `while` (ce qui oblige à mettre à jour un compteur `n`). Ce choix n'en est en fait pas un : on opère ainsi car on ne peut, par des manipulations algébriques basiques, trouver le n_0 du point *1)*.
- Ces deux présentations (boucle `for` ou `while`) sont évidemment correctes. Le choix de l'une d'elle peut-être dicté par l'énoncé.

□

Exercice 26

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
  × $f_1 : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ continue sur $]0, +\infty[$.
  En effet, f_1 est la composée $f_1 = g_2 \circ g_1$ où :
  – $g_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ est :
    ▸ continue sur $]0, +\infty[$.
    ▸ telle que : $g_1\big(]0, +\infty[\big) \subset \mathbb{R}$.
  – $g_2 : x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

× $f_2 : x \mapsto x^2$:
  – est continue sur $]0, +\infty[$.
  – NE S'ANNULE PAS sur $]0, +\infty[$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in [n, +\infty[$.

  D'après ce qui précède, f est continue sur le **segment** $[n, A]$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_n^A f(x)\ dx$ est bien définie. De plus :

$$\int_n^A f(x)\ dx \ = \ \int_n^A \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\ dx \ = \ \Big[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \Big]_n^A = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{A}}$$

  Or : $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{A}} = \mathrm{e}^0 = 1$.

$$\boxed{\text{L'intégrale impropre } I_n \text{ est donc convergente, de valeur } I_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1.}$$

□

Commentaire

- On a détaillé ici la démonstration de la continuité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Il faut savoir mettre en place ce type d'argumentation lorsque l'énoncé demande de démontrer la régularité d'une fonction. Ici, la continuité de f n'est qu'une étape de l'argumentation. La citer suffit certainement à récolter les points alloués à cette étape.
- Il convient de faire la différence entre :
  × $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\ dx$, intégrale impropre en $+\infty$.
  Démontrer la convergence de I_n c'est démontrer que cette intégrale existe autrement dit que $\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_n^A f(x)\ dx$ existe et est finie.
  × (I_n), suite réelle (qu'on ne peut considérer qu'après avoir démontré la convergence de chaque intégrale impropre I_n).
  Démontrer la convergence de (I_n) c'est démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ existe et est finie.

  Il est important de bien comprendre les objets manipulés sans quoi il est difficile de comprendre certaines questions.

b) En déduire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Démonstration.
Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient : $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}.}$$

Commentaire

- Il faut connaître les équivalents classiques suivants :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

- Ces équivalents peuvent être utilisés sans en effectuer la démonstration. Mais la connaître peut s'avérer utile en cas de doute sur la formule.
Rappelons que si une fonction f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ alors on a (par définition) :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

En choisissant $f = \exp$ et $x_0 = 0$, on en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
Ainsi, par théorème de composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

□

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{lll} \text{comme} & \dfrac{1}{n} \leqslant 1 & \\ \text{alors} & \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e} & \textit{(par croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n^2} & \textit{(car } \dfrac{1}{n^2} > 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n^2} & \end{array}$$

- On obtient :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n^2}$
  × la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.
  Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ est convergente.}}$$

□

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer :

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \qquad \textit{(former le quotient pour s'en convaincre)}$$

et rédiger alors par le critère d'équivalence des séries à termes positifs.

- De manière générale, on préférera mettre en place un critère d'équivalence puisqu'il permet d'obtenir un résultat plus fort (les deux séries comparées sont de même nature). Le choix s'est ici porté sur un théorème de comparaison pour rappeler son énoncé.

3. a) Établir : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant f(k)$.

Démonstration.

- Déterminons le sens de variation de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
  - × La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ d'après la question ***1.a)***.
  - × Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}\, x^2\, e^{\frac{1}{x}} - 2x\, e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = -\frac{1+2x}{x^4}\, e^{\frac{1}{x}}$$

Comme $e^{\frac{1}{x}} > 0$, $x^4 > 0$ et $1+2x > 0$ alors : $f'(x) < 0$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	$+\infty$ ↘ 0

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$k \leqslant x \leqslant k+1$$

$$\text{donc} \quad f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1) \qquad \textit{(par décroissance de } f \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k \leqslant k+1)$:

$$\underbrace{\int_k^{k+1} f(k)\ dx}_{= f(k)} \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\ dx \geqslant \underbrace{\int_k^{k+1} f(k+1)\ dx}_{= f(k+1)}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant f(k)}$$

□

b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $N > n$. On somme les encadrements précédents pour k variant de n à N.

$$\sum_{k=n}^{N} f(k+1) \leqslant \sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{N} f(k)$$

donc $$\sum_{k=n}^{N} f(k+1) \leqslant \int_n^{N+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{N} f(k)$$ *(par relation de Chasles)*

d'où $$\sum_{k=n+1}^{N+1} f(k) \leqslant \int_n^{N+1} f(x)\,dx \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{N} f(k)\right) + f(n)$$ *(par décalage d'indice)*

c'est-à-dire $$\sum_{k=n+1}^{N+1} u_k \leqslant \int_n^{N+1} f(x)\,dx \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{N} u_k\right) + u_n$$

- Or :
  × d'après la question ***1.a)***, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente,
  × d'après la question ***2.***, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

  On en déduit que tous les membres de l'inégalité admettent une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$.

  Par passage à la limite dans l'encadrement, on obtient alors :
  $$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}}$$

Commentaire

- Les questions ***3.a)*** et ***3.b)*** sont une illustration d'une méthodologie classique connue sous le nom de comparaison série-intégrale.
- Généralement, on compare une intégrale $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ à la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
  Ici, le résultat est utilisé pour comparer $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$ à $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
  Profitons-en pour faire un point sur ce dernier objet.
  La série $\sum u_n$ étant convergente, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_{S} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{R_n}$$

  La quantité $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum u_n$. Il est aisé de démontrer que ce reste admet une limite nulle. En effet :

$$R_n = S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$$

c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

  On en déduit :

  × d'une part : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n$.

  × d'autre part : $I_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}$. Ainsi : $I_n - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

  Finalement :

$$I_n - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n$$

- De plus : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k > 0$. On en déduit : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k > 0$.

  D'où, par transitivité : $I_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k > 0$. Ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{I_n - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}}{I_n} & \leqslant & \dfrac{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k}{I_n} & \leqslant & \dfrac{I_n}{I_n} \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 1 + \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2\, I_n} & & & & 1 \end{array}$$

  Or :

  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$,

  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2\, I_n} = 1$.

  En effet, d'après la question ***1.b)*** : $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2\, I_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^{\cancel{2}}\, \frac{1}{\cancel{n}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k}{I_n} = 1$.

  Autrement dit : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.

$$\boxed{\text{Enfin, comme } I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}, \text{ on obtient par transitivité : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

□

Exercice 15

Le but est de prouver l'équivalent suivant (à connaître) :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi n}\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^n \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n\, n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

a. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$, puis de la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{\mathrm{e}^{n+1}\,(n+1)!}}{\frac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n\, n!}} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{\mathrm{e}^{n+1}\,(n+1)!} \times \frac{\mathrm{e}^n\, n!}{n^n\sqrt{n}} \\
&= \cancel{(n+1)}\ \frac{(n+1)^n}{n^n}\ \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\ \cancel{n!}}\ \sqrt{\frac{n+1}{n}}\ \frac{\cancel{\mathrm{e}^n}}{\cancel{\mathrm{e}^n}\ \mathrm{e}^1} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}}\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1}\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Commentaire

Cela démontre, au passage, que la suite (v_n) est bien définie.

En effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1}\ \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\ >\ 0$.

- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) + \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{n^2} + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= 1 - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{1}}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\qquad + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{1}}{n} - \frac{1}{4}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } v_n = -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

- Enfin :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
  - × $v_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
  - × La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

  Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} v_k &= \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{N}\big(\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)\big)\\ &= \ln(u_{N+1})-\ln(u_1) \qquad \textit{(par télescopage)}\end{aligned}$$

Ou encore : $\ln(u_{N+1}) = \ln(u_1) + \sum\limits_{k=1}^{N} v_k$.

La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{N} v_k\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente par définition de la convergence de la série $\sum v_n$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } \big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

□

b. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Notons ℓ sa limite. Remarquons alors :

$$u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(\ell)$$

  Ce qu'on peut écrire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}$ (puisque $\mathrm{e}^{\ell} \neq 0$).
- Ainsi : $u_n = \dfrac{n^n\ \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n\ n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}$. On en déduit :

$$\frac{\mathrm{e}^n\ n!}{n^n\ \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\ell}$$

  Et enfin : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\ell}\ \dfrac{n^n\ \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$.

$$\boxed{\text{En notant } \lambda = \mathrm{e}^{-\ell} > 0\text{, on a bien démontré : } n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}.}$$

□

2. **Intégrales de Wallis**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \, dt$.

a. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, w_n$$

Démonstration.

- Tout d'abord : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \sin(t) \geqslant 0$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction élévation à la puissance n étant croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit :

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \big(\sin(t)\big)^n \geqslant 0$$

  On en déduit, par croissance de l'intégrale sur un segment (la fonction $t \mapsto \big(\sin(t)\big)^n$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$), les bornes étant dans l'ordre croissant ($\frac{\pi}{2} \geqslant 0$) :

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \, dt \geqslant 0$$

- Démontrons maintenant que la suite (w_n) est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rllllll} & \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], & 0 & \leqslant & \sin(t) & \leqslant & 1 \\ \text{donc :} & \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], & 0 & \leqslant & \big(\sin(t)\big)^{n+1} & \leqslant & \big(\sin(t)\big)^n \end{array}$$

(en multipliant de part et d'autre par $\big(\sin(t)\big)^n \geqslant 0$)

  Finalement, par croissance de l'intégrale sur un segment, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$w_{n+1} \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n+1} \, dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \, dt \ = \ w_n$$

$$\boxed{\text{On a démontré : } \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} \leqslant w_n. \text{ Ainsi, la suite } (w_n) \text{ est décroissante.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$w_{n+2} \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n+2} \, dt \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times \big(\sin(t)\big)^{n+1} \, dt$$

  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = \big(\sin(t)\big)^{n+1} & u'(t) = (n+1)\ \big(\sin(t)\big)^n \ \cos(t) \\ \\ v'(t) = \sin(t) & v(t) = -\cos(t) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n+2} \, dt$$

$$= \ -\Big[\cos(t)\ \big(\sin(t)\big)^{n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \ - \ (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \cos(t)\ (-\cos(t))\ dt$$

$$= \quad 0 \quad + \quad (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \ \big(\cos(t)\big)^2 \ dt \qquad \textit{(car } \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \textit{ et } \sin(0) = 0\textit{)}$$

$$= \ (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \ \Big(1 - \big(\sin(t)\big)^2\Big) \ dt$$

$$= \ (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \ dt \ - \ (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^{n+2} \ dt$$

$$= \ (n+1)\ w_n - (n+1)\ w_{n+2}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = (n+1)\ w_n - (n+1)\ w_{n+2} \text{ ou encore : } (n+2)\ w_{n+2} = (n+1)\ w_n.}$$ □

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\ (n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ et $(n+1)\ w_{n+1}\, w_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\ (n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $w_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^0 \ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \ dt = \frac{\pi}{2}$.
- D'autre part : $\dfrac{(2 \times 0)!}{2^{2\times 0}\ (0!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{2^0\ 0!} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ $\left(\text{c'est-à-dire : } w_{2n+2} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\ \big((n+1)!\big)^2} \times \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
w_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}\ w_{2n} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}\ \frac{(2n)!}{2^{2n}\ (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{2n+2}{2n+2}\ \frac{2n+1}{2n+2}\, \frac{(2n)!}{2^{2n}\ (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2) \times (2n+1)\big((2n)!\big)}{(n+1) \times (n+1) \times 2^2 \times 2^{2n}\ (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\ \big((n+1)!\big)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).}$$

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\ :\ (n+1)\, w_{n+1}\, w_n = \dfrac{\pi}{2}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $w_1\ w_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ dt \times \frac{\pi}{2} = \Big[-\cos(t) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{\pi}{2} = -\Big(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \Big)\ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
- D'autre part : $\dfrac{1}{0+1}\ \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ $\left(\text{c'est-à-dire : } (n+2)\ w_{n+2}\, w_{n+1} = \dfrac{\pi}{2} \right)$.

$$\begin{aligned}
(n+2)\ w_{n+2}\, w_{n+1} &= \cancel{(n+2)}\ \frac{n+1}{\cancel{n+2}}\ w_n\, w_{n+1} && \textit{(d'après la question précédente)}\\
&= (n+1)\ w_{n+1}\, w_n \\
&= \frac{\pi}{2} && \textit{(par hypothèse de récurrence)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).}$$

□

c. Déduire des questions précédentes deux équivalents de w_{2n}, et conclure.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
w_{2n} &= \frac{(2n)\,!}{2^{2n}\ (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b}}\textit{)}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{2n} \times \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{1}{\left(\lambda\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\ \sqrt{n}\right)^2}\ \frac{\pi}{2} && \textit{(en utilisant 2 fois la question } \textbf{\textit{1.b}}\textit{)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \lambda \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{2n} \times \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{1}{\left(\lambda\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\ \sqrt{n}\right)^2}\\
={}& \lambda\ 2^{\cancel{2n}} \cancel{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} \sqrt{2n} \times \frac{1}{\cancel{2^{2n}}} \times \frac{1}{\lambda^2\ \cancel{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}\ \left(\sqrt{n}\right)^2}\\
={}& \frac{1}{\lambda}\ \frac{\sqrt{2}\ \cancel{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\ \cancel{\sqrt{n}}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{n}}\ \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\lambda}\ \frac{\pi}{\sqrt{2n}}.}$$

- Par ailleurs :

$$(2n+1)\ w_{2n+1}\ w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b}}\textit{)}$$

$$\text{donc} \qquad w_{2n+1}\ w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n+1}\ \frac{\pi}{2}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\ \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

Or, d'après la question ***1.a*** :

$$\frac{2n+1}{2n+2}\ w_{2n} = w_{2n+2} \leqslant w_{2n+1} \leqslant w_{2n} \qquad \textit{(car la suite } (w_n) \textit{ est décroissante)}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} \leqslant 1 \qquad \textit{(car } w_{2n} > 0\textit{)}$$

Comme :
× $\dfrac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,
× $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

alors, par théorème d'encadrement : $\dfrac{w_{2n+1}}{w_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Autrement dit : $w_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} w_{2n}$.

$$\boxed{\text{On en conclut, d'après } (*) : \big(w_{2n}\big)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n} \text{ ou encore : } w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}}.}$$

- En combinant ces 2 équivalents :

$$w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda}\ \frac{\pi}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{2\,\pi}}{\lambda}\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\,\pi}}{\lambda}\ w_{2n}$$

Ou encore :

$$\frac{w_{2n}}{w_{2n}} = 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\,\pi}}{\lambda}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lambda = \sqrt{2\,\pi} \text{ et ainsi : } n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\pi\,n}\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$$

□

Exercice 19
On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2 \end{cases}$

1) a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition : $u_{n+1} - u_n = \big(u_n + u_n^2\big) - u_n = u_n^2 \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

□

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante. Deux cas se présentent alors :
  - si la suite (u_n) est de plus majorée, alors, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente.
  - sinon (c'est-à-dire si on sait de plus que la suite (u_n) n'est pas majorée), alors elle diverge vers $+\infty$.
- Démontrons que la suite (u_n) n'est pas majorée.
  On procède par l'absurde.

  On suppose que la suite (u_n) est majorée.
  Comme elle est de plus croissante, elle est convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
  Or, par définition : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2$.
  Chaque quantité admettant une limite finie, on obtient, par passage à la limite :

$$\ell = \ell + \ell^2$$

  D'où $\ell^2 = 0$ et donc $\ell = 0$.

  Or, comme (u_n) croissante, on a en particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0$.
  Par passage à la limite, on obtient : $\ell \geqslant u_0 > 0 = \ell$.
  Absurde !

  On en conclut que la suite (u_n) n'est pas majorée.
  Étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Commentaire

- On utilise dans cette question le théorème de convegence monotone. Il stipule que pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ majorée par } M \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \in \mathbb{R} \\ \text{qui vérifie } \ell \leqslant M \end{array}$$

  Plus précisément, la limite ℓ d'une telle suite est : $\ell = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (le fait que la suite (u_n) soit majorée assure l'existence de cet objet).
- Il faut retenir que toute suite (u_n) croissante admet une limite (éventuellement infinie) :
  - si (u_n) est majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (limite finie).
  - si (u_n) est non majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

  Ainsi, si la question consiste à démontrer qu'une suite (u_n) croissante diverge vers $+\infty$, il est classique de procéder par l'absurde pour démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée. □

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

a. Montrer que pour tout $t > -1$: $\ln(1+t) \leqslant t$.
On tracera l'allure des courbes représentatives des fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1+t)$ sur une même représentation graphique.

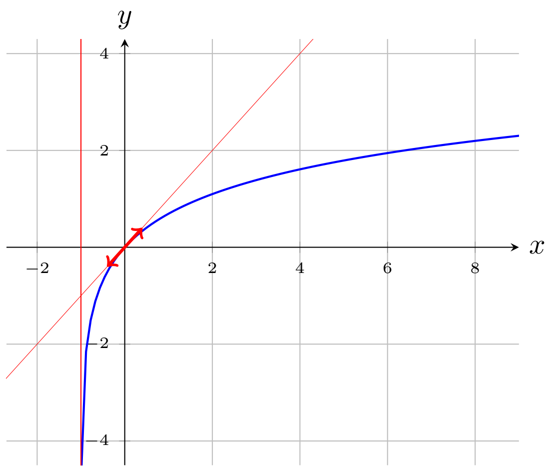
Démonstration.

- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$.
En effet, elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0$$

- Ainsi, la courbe représentative de f est située en dessous de ses tangentes, notamment sa tangente en 0, droite d'équation :

$$y = f'(0)\ (x-0) + f(0) = x$$



Commentaire

- Donner l'**allure** d'une courbe ce `N'est PAS` relier des points mais effectuer la démarche consister à résumer graphiquement les informations du tableau de variation. En particulier, on doit faire apparaître :
  - × les limites éventuelles.
  Pour la question considérée, comme $\ln(1+x) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} -\infty$, la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f ($\mathscr{C}_f$ se rapproche de cette droite sans jamais la rejoindre).
  - × une tangente en un point d'intérêt.
  - × le caractère concave ou convexe.
  On doit s'attacher à ne pas faire apparaître de creux ou de protubérances (qui consisteraient en des changements de convexité) si la courbe n'en présente pas. Un tracé « trmblotant » ne peut être accepté.
- Il est primordial de comprendre la notion de tangente. La tangente en un point (x_0, y_0) d'une courbe $\mathscr{C}_f$ représente la meilleure approximation affine de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de (x_0, y_0). D'un point de vue tracé, cela signifie que courbe et tangente doivent apparaître comme confondues au voisinage de (x_0, y_0). Profitons-en pour rappeler que le terme tangente trouve son étymologie dans le terme latin « tangere » qui signifie toucher.
- On pouvait aussi démontrer l'inégalité en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$. □

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1} u_n}$.

Démonstration.

- On a montré dans la question ***1)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_0 \leqslant u_n$.
  On en déduit en particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $\dfrac{1}{u_n} > 0$.
  Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- Par définition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{\ln\left(u_n + u_n^2\right)}{2} - \ln(u_n)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{\ln\left(u_n^2\,(1 + \frac{1}{u_n})\right)}{2} - \ln(u_n)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2\,\ln(u_n) + \ln(1 + \frac{1}{u_n})}{2} - \ln(u_n)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{u_n}
\end{aligned}$$

(en appliquant l'inégalité de la question précédente à $t = \dfrac{1}{u_n} > 0$ et car $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \geqslant 0$)

- Par ailleurs, comme $\dfrac{1}{n} > 0$ alors : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) > 0$.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1} u_n}}$$

□

c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

Démonstration.

- D'après la question ***1)***, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{u_n} < \dfrac{1}{u_0}$.
- Finalement :
  × $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \dfrac{1}{u_n} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \dfrac{1}{u_0}$
  × La série $\sum \frac{1}{2u_0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car, à constante multiplicative (non nulle) près, il s'agit de la série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in\ ]-1, 1[$.

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\ v_{n+1} - v_n$ est donc convergente.

□

d. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par sommation télescopique :

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0 \quad \text{ou encore} \quad v_n = v_0 + S_{n-1}$$

La suite (S_n) est convergente par convergence de la série $\sum v_{n+1} - v_n$.
Il en est de même de la suite (S_{n-1}).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n) \text{ est elle aussi convergente.}}$$

□

3) a. Montrer, à l'aide de la question 2b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}$$

Démonstration.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***2.b***, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant v_{k+1} - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{u_k}$$

  La suite (u_n) étant croissante, on a, pour tout $n \geqslant k$: $\dfrac{1}{u_k} \leqslant \dfrac{1}{u_n}$.
  On en déduit :

$$\forall k \geqslant n,\ 0 \leqslant v_{k+1} - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{u_n}$$

  En sommant ces inégalités pour $k \in [\![n, n+p]\!]$, on obtient :

$$0 \leqslant \underbrace{\sum_{k=n}^{n+p} (v_{k+1} - v_k)}_{= \, v_{n+p+1} - v_n \ \textit{(par télescopage)}} \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n} \sum_{k=n}^{n+p} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &= \frac{1}{u_n} \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\right) \leqslant \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

  car : $\dfrac{1}{u_n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$ et : $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}}$$

□

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.

Démonstration.

- D'après l'inégalité précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}$$

  La suite (v_n) étant convergente : $v_{n+p+1} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- On peut alors passer à la limite, lorsque $p \to +\infty$ dans cette inégalité.

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}}$$

□

c. En déduire : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n \ell}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après l'encadrement précédent :

$$0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}$$

donc $\quad 0 \leqslant 2^n \ell - 2^n v_n \leqslant \dfrac{1}{u_n} \quad$ *(car $2^n > 0$)*

donc $\quad 0 \leqslant 2^n \ell - \ln(u_n) \leqslant \dfrac{1}{u_n} \quad$ *(par définition de v_n)*

donc $\quad 1 \leqslant \exp\left(2^n \ell - \ln(u_n)\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}} \quad$ *(par croissance de la fonction* $\exp$ *sur* $\mathbb{R}$*)*

donc $\quad 1 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{2^n \ell}}{u_n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}}$

- Or :
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}} \to \mathrm{e}^0 = 1$ car $u_n \to +\infty$,
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement, on obtient alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2^n \ell}}{u_n} = 1$.

$$\boxed{\text{Cela démontre : } u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n \ell}.}$$

□