Feuille d'exercices n°10 : Séries entières

Sujets de concours

Exercice 1 *(d'après* `E3A 2024 - MP`*)*

1. **Question préliminaire.**

En utilisant l'égalité $\cos(2\,\theta) = 2\ \cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $\big(\cos(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{\cos(n)}{n}$$

On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geqslant 1$.

3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.

4. En déduire la valeur de R.

On note alors, pour tout $x \in\,]-R, R[$: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n}\ x^n$.

5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{in}\ x^n$, où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in\,]-R, R[$.

7. Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.

8. En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n}\ x^n$.

Exercice 2 *(d'après* `E3A 2022 - MP`*)*

1. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ.

b) Démontrer que pour tout réel x de $\Delta, \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

c) On admet que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Calculer $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\ \exp\left(-t^2\right)\ dt$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) En utilisant la question ***1***. calculer I_n.

3. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\ \exp\left(-t^2\right)\ dt$$

a) Donner le développement en série entière de la fonction cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.

b) Justifier que H est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question ***3b*** par une autre méthode.

a) Démontrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

c) Retrouver l'expression de H obtenue à la question ***3b***.

Exercice 3 *(d'après* `E3A 2021 - PSI`*)*

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^n\right)\, dt$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n.

2. En citant le théorème utilisé, justifier l'existe et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n.

4. Déterminer alors la $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
On donnera le résultat en fonction d'une intégrale J que l'on ne cherchera pas à calculer.

5. En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$ en fonction de J.

6. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} I_n x^n$.

a) Déterminer le rayon de R de cette série entière.

b) On pose pour tout x réel et lorsque cela est possible $f\left(x\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.
Donner l'ensemble de définition de f.

Exercice 4 *(d'après* `E3A 2020 - PC`*)*

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant 1$$

2. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$.
Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
Pour $x \in\,]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

3. ***a)*** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

c) On pose, lorsque cela est possible :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, x^n$$

produit de Cauchy réel des deux série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.
Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n\, x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

d) En déduire que, pour tout $x \in\,]-1,1[$:

$$f'(x) = f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$:

$$\ln\left(f(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

5. En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. On utilisera sans le redémontrer :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

6. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 5 *(d'après* `E3A 2019 - PSI-2`*)*
Soit (E_1) l'équation différentielle : $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.

a) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction : $g = f + f' + f''$.

b) Résoudre l'équation (E_2).

c) En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1).

2. Soit (S) le système différentiel à coefficients constants $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

b) Résoudre le système (S).

c) Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question **1.3.** de cette partie.

3. On considère la série entière réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
On note alors, lorsque cela existe, $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

b) Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer les développements en série entière de φ', φ'', $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

d) En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

e) Déterminer une expression de $\psi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

f) Déterminer une expression de $\theta(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{6n}}{(6n)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

Exercice 6 *(d'après* `E3A 2016 - PC-2`*)*

On rappelle que pour une série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ convergente, le reste d'indice n, pour $n \in \mathbb{N}$, est le réel défini par $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Partie I.

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $x \mapsto \ln(1+x)$.

2. Montrer alors que $\ln(2) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k2^k}$.

3. *a)* Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)\,2^k}$.

4. *a)* Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

c) En déduire : $\ln(2) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 7 *(d'après* `E3A 2018 - PC-1`*)*

On admet l'égalité $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

On introduit les fonctions H, S et F, somme de séries entières :

$$H(x) = \sum_{n\geqslant 1} h_n x^n,\ S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}x^n \text{ et } T(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{h_n}{n}x^n$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier $h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n$.

En déduire I.

4. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{h_n}{n}x^n$.

5. Quel est le développement en série entière de la fonction $g : x \mapsto \ln(1-x)$? Préciser son rayon de convergence.

6. Justifier que la fonction $G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$.
Établir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

7. Exprimer L à l'aide de la fonction $g : x \to \ln(1-x)$.

8. Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.

9. En déduire une relation entre $T - S$ et L.

10. Soit y dans $]0, 1[$.

a) Justifier que $\displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,du + S(y) = 0$$

On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.

b) Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du = -\frac{\pi^2}{6}$$

c) Justifier : $\dfrac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ \ln(1-y)$.

11. Exprimer la valeur de $T\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en fonction de π. Justifier votre réponse.

Exercice 8 *(d'après* `E3A 2017 - PC-2`*)*

Partie I

1. a) Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-ts}\,ds$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

b) Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que S est développable en série entière et donner son développement.

b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$.

3. a) Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$.

b) On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$. Justifier l'égalité : $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

c) Montrer que R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $S'(x)$ pour $x > 0$ et justifier : $S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma$.

4. a) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\, dt$.

Pour tout $x \in]0,1[$, justifier l'existence de $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\, dt$ et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \frac{x^n}{n}$$

b) Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]0,1[$.

c) En admettant que $\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$, montrer :

$$\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$$

5. Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant $R(ax)-R(bx)$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\, dt$.

6. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $R(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$, puis : $\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.

b) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\int_0^{+\infty} R(x)\, dx = 1$$

Exercice 9 *(d'après* `Centrale 2019 - PSI-1`*)*

Soit α un réel. On note $f_\alpha : x \mapsto (1-x)^{-\alpha}$.

1. Préciser le domaine de définition D de f_α.
Justifier que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et donner une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f_α sur D.

2. Énoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre et démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha) \frac{x^n}{n!}$$

3. Rappeler la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et énoncer le théorème qui s'y rapporte.

4. En déduire que, pour tout entier n et tous réels α et β,

$$L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha)\, L_{n-k}(\beta)$$

5. Pour $x \in]-1,1[$, donner la valeur de la somme de la série entière $\sum_{p=1}^{+\infty} x^p$ ainsi que celle de sa dérivée.

6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme $R_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

Exercice 10 *(d'après* `CCINP 2018 - PSI`*)*

Partie III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \tag{1}$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (1)

On suppose qu'il existe une série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (1) sur $]-R, R[$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} = 0 \\ c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k\ (k!)^2} \end{cases}$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k x^k$.

4. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (1) sur $]0, r[$.
Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum\limits_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$.
L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1$$

5. Montrer que si $\sum\limits_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

6. Montrer qu'il existe un réel $M >$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|\alpha_k| \leqslant \dfrac{M}{r^k}$.

7. Montrer que (2) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

8. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (1)

9. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y\colon x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (1) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x\colon \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

10. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

11. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ \ln(x)$$

soit solution de (1) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

12. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.

Exercice 11 *(d'après* `CCINP 2019 - PC`*)*
On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2\,(1-x)\,y'' - x\,(1+x)\,y' + y = 2x^3 \qquad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2\,(1-x)\,y'' - x\,(1+x)\,y' + y = 0 \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n\,x^n$ ait un rayon de convergence $r>0$. On définit la fonction $f :]-r,r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière.
Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r,r[$, on a :

$$x^2\,(1-x)\,f''(x) - x\,(1+x)\,f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\,(a_n - a_{n-1})\,x^n$$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r,r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r,r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda\in\mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $]-1,1[$ développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.
Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I,\ z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x)$$

6. Justifier que z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.

7. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x \qquad (E_1)$$

8. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I, alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$$

9. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I.

Partie III - Solutions de (E) sur $]0,+\infty[$

10. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 12 *(d'après* `E3A 2017 - PC-2`*)*
On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle :

$$xy'' + y' - (x+1)y = 1$$

1. On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ pour tout $x \in \left]-r, r\right[$ où $r > 0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $K > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant \frac{K}{n!}$$

En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r = +\infty$.

2. On souhaite résoudre ici cette équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$S = \left\{ y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}) \;\middle|\; \forall x > 0,\ xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x) = 1 \right\}$$

a) Pour tout $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, on pose $z(x) = \mathrm{e}^{-x} y(x)$ pour tout $x > 0$.
Montrer que $y \in S$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall x > 0,\ xz''(x) + (2x+1)z'(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad (\star)$$

b) Déterminer les fonctions $Z \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0,\ xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = 0$$

c) Déterminer les $Z \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0,\ xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

d) En déduire l'expression des fonctions $z \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$ de ***2.a)***, en utilisant la fonction R définie pour $x > 0$ par $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.
(on utilisera $R(x)$ et $R(2x)$)

e) Donner alors l'expression de la solution générale $y \in S$.

3. ***a)*** Sachant que $R(x) = -\ln(x) + \gamma + o(1)$ quand $x \to 0$ avec $x > 0$, déterminer les solutions $y \in S$ ayant une limite finie en 0.
Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie ***I*** et reliée à R par :

$$S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma \text{ pour } x > 0$$

(vu en ***I.3.c)***).

b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question ***1.*** : on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comment pourrait-on obtenir une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ***1.*** ?

Exercice 13 *(d'après* `E3A 2022 - PSI`*)*

1. **Question de cours**
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T-périodique.
Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\, du = \int_0^T f(u)\, du.$

* * * * *

On se propose de déterminer des fonctions y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0 \qquad (\ast\ast)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(\ast\ast)$, sous la forme $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et telle que : $g(0) = a_0 = 1$.

a) Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre a_{n-1} et a_{n+1}.

b) Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n.

c) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.

Rayons de convergence, calculs de sommes

Exercice 14 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries suivantes :

a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ ***b)*** $\sum n^{(-1)^n} z^n$ ***c)*** $\sum \cos(n) z^n$

Exercice 15

Déterminer le rayon de convergence, et calculer la somme sur l'intervalle ouvert de convergence, des séries entières suivantes :

a) $\sum (n^2+n+1) z^n$ ***c)*** $\sum 2^{(-1)^n} z^n$ ***e)*** $\sum \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n} z^{2n}$

b) $\sum \dfrac{n+2}{n+1} z^n$ ***d)*** $\sum \dfrac{2n+1}{(2n)!} z^{2n}$

Exercice 16

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

a) Supposons que la suite (a_n) est bornée.
Que peut-on en déduire sur R ?

b) Supposons $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
Que peut-on en déduire sur R ?

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la série entière $\sum \cos(n\theta) z^n$ de rayon de convergence noté R.

a) Déterminer R.
(on pourra remarquer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos(2n\theta) = 2\left(\cos(n\theta)\right)^2 - 1$*)*

b) Déterminer une expression explicite de la somme de la série entière $\sum e^{in\theta} x^n$.

c) En déduire une expression explicite de la somme de la série entière $\sum \cos(n\theta) x^n$.

Exercice 17 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivante, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.

2. $\sum a_n x^n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Exercice 18 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$$

Exercice 19

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1. Montrer que la suite (a_n) est convergente, et déterminer sa limite.

2. Montrer que la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

3. Comparer $\dfrac{1+t^2}{2}$ et t pour $t \in [0,1]$.
En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Fonctions développables en séries entières

Exercice 20 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?

Exercice 21 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\ 2^{4n}\ (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\ 2^{4n}\ (2n+1)}$.

Exercice 22

1. Expliciter les développements en série entière des fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$$

2. À l'aide d'un produit de Cauchy, démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

Exercice 23 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose $f : x \mapsto \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. *a)* Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
   On pose, pour tout $x \in\ ]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 24 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. *a)* Déterminer $S(x)$.
   b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Séries entières et équations différentielles

Exercice 25 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*
Soit l'équation différentielle : $x\,(x-1)\ y''+3\,x\ y'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2. Est-ce que toutes les solutions de $x\,(x-1)\ y''+3\,x\ y'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Exercice 26

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=3$ et $\forall\,n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,u_k\,u_{n-k}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant u_n\leqslant 4^{n+1}n!$.

2. ***a)*** Montrer que la somme f de la série entière $\sum\ \dfrac{u_n}{n!}\ x^n$ est solution de l'équation différentielle $y'=y^2$ sur un intervalle à préciser.

b) En déduire une expression simplifiée de f, sur un intervalle où f ne s'annule pas.

3. Expliciter, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le terme général u_n en fonction de n.

Exercice 27

On pose $a_0=a_1=1$ et : $\forall\,n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{2}{n+2}\ a_n$.

1. Montrer que $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ 1\leqslant a_n\leqslant n^2$.

2. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum\ a_n z^n$?

3. Donner une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la somme f de cette série entière, puis calculer f sur $]-R;R[$.

Exercice 28
Soit $f:x\mapsto\big(\,\arcsin(x)\,\big)^2$.

1. Justifier que la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

2. Trouver une équation différentielle dont f' est solution, et en déduire le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.