Feuille d'exercices n°10 : Séries entières

Sujets de concours

Exercice 1 *(d'après* `CCINP 2011 - PSI-1`*)*

Pour tout x réel tel que la série entière $\sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ converge, on note :

$$L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

sa somme.

1. Préciser le rayon de convergence de cette série entière, montrer que la fonction L est définie sur $]-1,1]$ et expliciter $L(x)$ pour $x \in\ ]-1,1[$.

2. Montrer, avec soin, que la fonction L est continue sur l'intervalle $[0,1]$.
En déduire que $L(1) = \ln(2)$.

Exercice 2 *(d'après* `CCINP 2017 - PC`*)*

- Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
- On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.
- On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n-ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées. Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.
- On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa série génératrice.
- Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières) et quelques propriétés d'algèbre linéaire.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :
  - × P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n »,
  - × C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n ».

Partie I - étude d'un cas simple

- Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

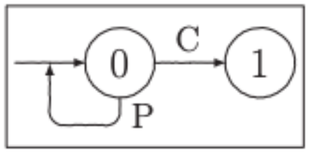

Fig. 1

- On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence.
- On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et :

$$\forall t \in\ ]-R_Y, R_Y[,\ G_Y(t) = \mathbb{E}\left(t^Y\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y=n\}\big)\, t^n$$

1. Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbb{P}(Y=n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $R_Y = \dfrac{1}{p} > 1$ et : $\forall t \in \left]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right[,\ G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.

3. Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G'(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G''(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.

4. Donner les valeurs de $\mathbb{E}(Y)$ et de $\mathbb{V}(Y)$.

Partie II - Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$.

5. Montrer que $\sum u_n(a)z^n$ est une série entière de rayon de convergence $|\,a\,|$.

6. Montrer que si $|\,z\,| < |\,a\,|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n$.

Soient a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions ***7*** à ***10***, on suppose que $|\,a\,| < |\,b\,|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(a)u_{n-k}(b)$ et pour tout réel t tel que $|\,t\,| < |\,a\,|$, $f(t) = \dfrac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$.

7. Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$$

8. Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|\,a\,|$ et que si $|\,z\,| < |\,a\,|$, alors :

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n$$

10. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |\,a\,|$.

- Soient a, b, c et λ des nombres complexes non nuls.
- On suppose que : $|\,a\,| \leqslant |\,b\,| \leqslant |\,c\,|$.
- Pour tout réel t tel que $|\,t\,| < |\,a\,|$, on pose : $g(t) = \dfrac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

11. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_g tel que $R_g \geqslant |\,a\,|$.

Exercice 3 *(d'après* `CCINP 2018 - PC`*)*
On admet dans la suite du problème :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0$$

et on considère la série entière de la variable t : $\sum\ L_n(x)\ t^n$.
On note r la racine positive du polynôme $X^2 - 2X - 1$.

1. Montrer que : $\forall x \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |L_n(x)| \leqslant r^n$.
(on pourra raisonner par récurrence et utiliser la relation admise au début de cette partie)

2. Pour $x \in [-1,1]$, on note $R(x)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum\ L_n(x)\ t^n$. Montrer que : $R(x) \geqslant \dfrac{1}{r}$.

3. Pour $x \in [-1,1]$ et $t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, on pose $S_x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\ t^n$.

Montrer que S_x est solution sur $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\left(1 - 2tx + t^2\right) y' + (t-x)\, y = 0$$

4. En déduire :

$$\forall x \in [-1,1],\ \forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$$

5. Indiquer une méthode permettant, à partir du seul résultat de la question 4, de retrouver l'expression des polynômes L_0, L_1 et L_2.

Exercice 4 *(d'après* `CCINP 2018 - PSI`*)*

Partie III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \tag{1}$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (1)

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (1) sur $]-R, R[$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} = 0 \\ c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2} \end{cases}$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$.

4. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (1) sur $]0, r[$.
Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$.
L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1$$

5. Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

6. Montrer qu'il existe un réel $M >$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|\alpha_k| \leqslant \dfrac{M}{r^k}$.

7. Montrer que (2) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

8. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (1)

9. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y\colon x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (1) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x\colon \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

10. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

11. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ \ln(x)$$

soit solution de (1) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

12. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.

Exercice 5 *(d'après* `CCINP 2019 - PC`*)*
On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3 \qquad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière.
Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.
Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I,\ z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x)$$

6. Justifier que z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.

7. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x \qquad (E_1)$$

8. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$$

9. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I.

Partie III - Solutions de (E) sur $]0, +\infty[$

10. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6 *(d'après* `E3A 2017 - PC-2`*)*
On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle :

$$xy'' + y' - (x+1)y = 1$$

1. On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$ où $r > 0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $K > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant \frac{K}{n!}$$

En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r = +\infty$.

2. On souhaite résoudre ici cette équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$S = \left\{ y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}) \ \middle|\ \forall x > 0,\ xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x) = 1 \right\}$$

a) Pour tout $y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$, on pose $z(x) = \mathrm{e}^{-x}y(x)$ pour tout $x > 0$.
Montrer que $y \in S$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall x > 0,\ xz''(x) + (2x+1)z'(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad (\star)$$

b) Déterminer les fonctions $Z \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0,\ xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = 0$$

c) Déterminer les $Z \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0,\ xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

d) En déduire l'expression des fonctions $z \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$ de ***2.a)***, en utilisant la fonction R définie pour $x > 0$ par $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.
(on utilisera $R(x)$ et $R(2x)$)

e) Donner alors l'expression de la solution générale $y \in S$.

3. ***a)*** Sachant que $R(x) = -\ln(x) + \gamma + o(1)$ quand $x \to 0$ avec $x > 0$, déterminer les solutions $y \in S$ ayant une limite finie en 0.
Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie ***I*** et reliée à R par :

$$S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma \text{ pour } x > 0$$

(vu en ***I.3.c)***).

b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question ***1.*** : on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comment pourrait-on obtenir une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ***1.*** ?

Exercice 7 *(d'après* `E3A 2022 - PSI`*)*

1. **Question de cours**
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T-périodique.
Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\ du = \int_0^T f(u)\ du.$

* * * * *

On se propose de déterminer des fonctions y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0 \qquad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et telle que : $g(0) = a_0 = 1$.

a) Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre a_{n-1} et a_{n+1}.

b) Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n.

c) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.

Exercice 8 *(d'après* `Centrale 2021 - PC-2`*)*

On dit qu'une fonction S définie sur une partie de $\mathbb{C}$ est *développable en série entière au voisinage de 0* s'il existe un disque ouvert D non vide de centre 0 et une suite complexe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall z \in D,\ S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$.

III.A - Nombres b_m et polynômes B_m

On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$, de rayon de convergence $R \neq 0$ et avec $\alpha_0 = 1$. On note S la somme de cette série entière sur son disque de convergence : pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, on a :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$$

1. Montrer qu'il existe un réel $q > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha_n| \leqslant q^n$.

2. On suppose que $\frac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et on note $\sum_{n\geqslant 0} \beta_n z^n$ son développement. Calculer β_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer β_n en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\beta_n| \leqslant (2q)^n$$

3. Montrer que $\frac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

4. En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe une unique suite complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $r > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$0 < |z| < r \Rightarrow \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

5. En effectuant un produit de Cauchy, montrer que $b_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} b_p = 0$$

6. En déduire la valeur de b_1, b_2, b_3 et b_4.

7. En utilisant un argument de parité, montrer que $b_{2p+1} = 0$ pour tout entier $p \geqslant 1$.

Dans la suite du problème, on considère les polynômes B_m définis par

$$\forall m \in \mathbb{N},\ B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} b_k x^{m-k}$$

On remarque que chaque polynôme B_m est unitaire de degré m et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $B_m(0) = b_m$.

8. Déterminer B_0, B_1, B_2 et B_3.

9. Montrer que, pour tout entier $m \geqslant 2$, $B_m(1) = b_m$, puis que, pour tout entier $m \geqslant 1$, $B_m' = mB_{m-1}$.

Exercice 9 *(d'après* `Centrale 2020 - PSI-2`*)*

III - Développement en série entière

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie **I** est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

III.A - *Le théorème binomial d'Abel*

- On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ en posant

$$A_0 = 1 \text{ et } \forall\, k \in [\![1, n]\!],\ A_k = \frac{1}{k!} X(X - ka)^{k-1}$$

- On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

1. Démontrer que la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k'(X) = A_{k-1}(X - a)$

3. En déduire, pour j et k éléments de $[\![0,n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j<k$, $j=k$ ou $j>k$. Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient α_0, …, α_n des nombres complexes tels que :

$$P=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k A_k$$

4. Démontrer que, pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, $\alpha_j=P^{(j)}(ja)$.

5. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall\,(a,x,y)\in\mathbb{C}^3,\ (x+y)^n=y^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

6. Établir la relation :

$$\forall(a,y)\in\mathbb{C}^2,\ ny^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

III.B - *Développement en série entière de la fonction W*

- On définit une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ en posant,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n\ =\ \frac{(-n)^{n-1}}{n!}$$

- On définit, lorsque c'est possible, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\,x^n$.

7. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}a_nx^n$.

8. Justifier que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

9. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R,R]$.

10. Démontrer que,

$$\forall\,x\in\,]-R,R[,\ x(1+S(x))S'(x)=S(x)$$

`On pourra utiliser le résultat de la question 6.`

On considère la fonction $h:\left|\begin{array}{ccc}]-R,R[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & S(x)\,\mathrm{e}^{S(x)}\end{array}\right.$

11. Démontrer que h est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle :

$$xy'-y=0$$

12. Résoudre l'équation différentielle $xy'-y=0$ sur chacun des intervalles $]0,R[$, $]-R,0[$, puis sur l'intervalle $]-R,R[$.

13. En déduire :

$$\forall\,x\in\,]-R,R[,\ S(x)=W(x)$$

14. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R,R]$?

Exercice 10 *(d'après* `Centrale 2019 - PSI-1`*)*

Soit α un réel. On note $f_\alpha:x\mapsto(1-x)^{-\alpha}$.

1. Préciser le domaine de définition D de f_α.
Justifier que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et donner une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f_α sur D.

2. Énoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre et démontrer que, pour tout $x\in\,]-1,1[$,

$$f_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$$

3. Rappeler la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et énoncer le théorème qui s'y rapporte.

4. En déduire que, pour tout entier n et tous réels α et β,

$$L_n(\alpha+\beta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k(\alpha)\ L_{n-k}(\beta)$$

5. Pour $x\in]-1,1[$, donner la valeur de la somme de la série entière $\sum_{p=1}^{+\infty}x^p$ ainsi que celle de sa dérivée.

6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme $R_n\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty}p^nx^p=\frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

Rayons de convergence, calculs de sommes

Exercice 11 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries suivantes :

a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\, z^{2n+1}$ ***b)*** $\sum n^{(-1)^n}\, z^n$ ***c)*** $\sum \cos(n)\, z^n$

Exercice 12

Déterminer le rayon de convergence, et calculer la somme sur l'intervalle ouvert de convergence, des séries entières suivantes :

a) $\sum (n^2+n+1)\, z^n$ ***c)*** $\sum 2^{(-1)^n} z^n$ ***e)*** $\sum \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n}\, z^{2n}$

b) $\sum \dfrac{n+2}{n+1}\, z^n$ ***d)*** $\sum \dfrac{2n+1}{(2n)!}\, z^{2n}$

Exercice 13

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
   a) Supposons que la suite (a_n) est bornée.
   Que peut-on en déduire sur R ?
   b) Supposons $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
   Que peut-on en déduire sur R ?
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la série entière $\sum \cos\big(n\,\theta\big)\, z^n$ de rayon de convergence noté R.
   a) Déterminer R.
   (on pourra remarquer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(2n\,\theta) = 2\,\big(\cos(n\,\theta)\big)^2 - 1$*)*
   b) Déterminer une expression explicite de la somme de la série entière $\sum \mathrm{e}^{i\,n\theta}\, x^n$.
   c) En déduire une expression explicite de la somme de la série entière $\sum \cos(n\,\theta)\, x^n$.

Exercice 14 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivante, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3^n\, x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n\, x^n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Exercice 15 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \big(\sqrt{n}\big)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1. Montrer que la suite (a_n) est convergente, et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.
3. Comparer $\dfrac{1+t^2}{2}$ et t pour $t \in [0,1]$.
   En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Fonctions développables en séries entières

Exercice 17 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?

Exercice 18 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\ 2^{4n}\ (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\ 2^{4n}\ (2n+1)}$.

Exercice 19

1. Expliciter les développements en série entière des fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$$

2. À l'aide d'un produit de Cauchy, démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

Exercice 20 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose $f : x \mapsto \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

3. ***a)*** Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

On pose, pour tout $x \in\,]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 21 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. ***a)*** Déterminer $S(x)$.

b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ \mathrm{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Séries entières et équations différentielles

Exercice 22 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*
Soit l'équation différentielle : $x\,(x-1)\;y''+3\,x\;y'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2. Est-ce que toutes les solutions de $x\,(x-1)\;y''+3\,x\;y'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Exercice 23

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=3$ et $\forall\,n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,u_k\,u_{n-k}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant u_n\leqslant 4^{n+1}n!$.

2. ***a)*** Montrer que la somme f de la série entière $\sum\dfrac{u_n}{n!}\,x^n$ est solution de l'équation différentielle $y'=y^2$ sur un intervalle à préciser.

b) En déduire une expression simplifiée de f, sur un intervalle où f ne s'annule pas.

3. Expliciter, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le terme général u_n en fonction de n.

Exercice 24

On pose $a_0=a_1=1$ et : $\forall\,n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{2}{n+2}\,a_n$.

1. Montrer que $\forall\,n\in\mathbb{N}^*$, $1\leqslant a_n\leqslant n^2$.

2. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum\,a_n z^n$?

3. Donner une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la somme f de cette série entière, puis calculer f sur $]-R;R[$.

Exercice 25
Soit $f:x\mapsto\big(\,\arcsin(x)\,\big)^2$.

1. Justifier que la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

2. Trouver une équation différentielle dont f' est solution, et en déduire le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

Exercice 26

1. Soit f une fonction réelle de la variable réelle.

a) Soit $R>0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit développable en série entière sur $]-R,R[$.

b) On suppose qu'il existe $r>0$ tel que :

× la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$,

× $\exists M\geqslant 0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\,]-r,r[,\ \left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M$.

Démontrer que la fonction f est développable en série entière sur $]-r,r[$.

2. **Application**.

Démontrer que, pour tout $r\in\mathbb{R}^*$, la fonction $x\mapsto\cos(x)$ est développable en série entière sur $]-r,r[$ et en déduire :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)\ =\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}$$