Feuille d'exercices n°7 : Suites et séries de fonctions

I. Suites de fonctions

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) :

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n\,(1+x^n)} \end{array}$

2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n^a}{n^2+1}\, x\,\mathrm{e}^{-nx} \end{array}$

3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-nx}\,\sin(nx) \end{array}$

4. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{(1-i)\,nx} \end{array}$

5. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(\sqrt{x+4\,n^2\,\pi^2}\right) \end{array}$

6. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathbb{1}_{[0,n]}(x) \end{array}$

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs réelles. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $g_n = \dfrac{f_n}{1+{f_n}^2}$.

1. Montrer que (g_n) converge simplement sur I.

2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(1+xy) \leqslant (1+x^2)\,(1+y^2)$.

3. Montrer que (g_n) converge uniformément sur I.

Exercice 3. *(CCINP)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : x \mapsto \dfrac{n+2}{n+1}\,\mathrm{e}^{-nx^2}$.

1. Étudier la convergence simple de (u_n) sur $\mathbb{R}$.

2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$? sur $[a,+\infty[$ pour $a>0$?

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction : $f_n : x \mapsto nx^n\,(1-x)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

2. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par : $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[-1,1]$.

2. La limite simple de la suite (f_n) est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$? Commenter.

Exercice 6. *(un classique)*

On considère la suite de fonctions définie pour tout $x \in [0,1]$ par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{x - P_n(x)^2}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que (P_n) est une suite de restrictions de polynômes dont on précisera le degré.

2. Montrer que (P_n) converge simplement vers une fonction f à préciser.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant f(x) - P_n(x) \leqslant 2\,\frac{f(x)}{2+n\,f(x)}$$

4. Montrer que (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par : $f_n : x \mapsto n\, x^n \sin\big(\pi\, x\big)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.

2. ***a)*** Démontrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de la forme $[0,a]$ où $a \in [0,1[$.

b) En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout segment de $[0,1[$.

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1[$?

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par : $f_n : x \mapsto \left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)^{-n^2}$.

1. Démontrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ x - \dfrac{x^2}{2} \ \leqslant\ \ln(1+x) \ \leqslant\ x.$

2. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$.

3. ***a)*** Démontrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de la forme $[0,a]$ où $a > 0$.

b) En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout segment de $[0,+\infty[$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie par :

$$g_n : t \mapsto n\,(n+1)\,t^{n-1}\ \sin(\pi\, t)$$

On note de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(t)\ dt$.

1. Démontrer : $\forall n \geqslant 3,\ I_n = \dfrac{n(n+1)}{\pi}\ \left(1 - \dfrac{I_{n-2}}{\pi}\right)$.

2. Montrer que (g_n) converge simplement sur $[0,1]$.

3. ***a)*** Que vaut : $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\ dt$?

b) En déduire que (g_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 10

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}_p[X]$.

On suppose que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Montrer qu'il existe des polynômes $(L_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum_{k=0}^{p} P_n(k)\, L_k$$

2. En déduire que f est un polynôme de degré au plus p.

3. Montrer que (P_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers f.

Exercice 11. *(*`Centrale`*)*

On note (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} f_0 : x \mapsto \sin(x) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) \ = \ \displaystyle\int_0^x t\, f_n(t)\ dt \end{array}\right.$$

1. ***a)*** Calculer f_1 et f_2.

b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = (2n+1)\, f_n(x) - x^2\, f_{n-1}(x)$$

c) Montrer qu'il existe P_n et Q_n des polynômes à coefficients entiers de degré inférieurs à n tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) \ = \ Q_n(x^2)\, \sin(x) + x\, P_n(x^2)\, \cos(x)$$

2. ***a)*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\big|f_n(x)\big| \leqslant \dfrac{|x|^{2n}}{2^n\, n!}$.

b) La suite (f_n) converge-t-elle simplement ?
Converge-t-elle uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$?

3. Montrer que π^2 est irrationnel.

Exercice 12. *(d'après* `Mines 2 2019 - PSI`*)*

- Dans cet exercice, on se propose de démontrer le théorème de Stone-Weierstrass qui stipule : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
- Il s'agit de démontrer que, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

1. Justifier : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$.

2. Montrer : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

3. Montrer : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$.

4. En déduire : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \leqslant Cn$, pour une constante $C > 0$ à préciser.

On considère maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$.
On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$:

$$|x-y| < \alpha \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R},\; B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x - \tfrac{k}{n}\right| < \alpha\right\}$$
$$\text{et} \qquad Y = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x - \tfrac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}$$

5. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \sum_{k\in Y} \binom{n}{k}\, x^k(1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$.

6. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$$

Exercice 13. *(*`CCINP`*)*

On lance un dé à 6 faces.

Les lancers sont indépendants et le dé n'est pas pipé.

On note X_k la variable aléatoire égale à la valeur obtenue au $k^{\text{ème}}$ lancer.

1. Déterminer la loi de X_k et la fonction de répartition F associée à X_k.

2. On note Z_n la valeur maximale obtenue au bout de n lancers.
Déterminer la fonction de répartition F_n de Z_n en fonction de F.

3. Déterminer la limite de (F_n) lorsque n tend vers l'infini.
La convergence est-elle uniforme ?

4. On note Y_n la valeur minimale obtenue au bout de n lancers.
Déterminer G_n sa fonction de répartition.
Étudier les convergences simple et uniforme de (G_n).

Exercice 14. *(*`CCINP`*)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,1]$ la fonction $G_n : t \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t$.

1. Démontrer pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$: $\left|G_n'(t)\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t}{n}$.

2. En déduire, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$: $\left|G_n(t) - 1\right| \leqslant \dfrac{t\,\mathrm{e}^t}{n}$.

3. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$: $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t\,dt$.
Montrer que la suite de fonctions (I_n) converge simplement sur $[0,1]$.

4. Converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

II. Séries de fonctions

Exercice 15

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons :

(i) **Régularité**

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur I

(ii) **Convergence simple**

La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction notée f.

(iii) **Convergence uniforme**

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(f_n{}^{(k)}\right)$ converge uniformément sur (tout segment de) I.

1. *a)* Démontrer que, sous ces hypothèses, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

b) Quel résultat d'interversion obtient-on sous ces hypothèses ?

2. Écrire un résultat analogue pour les séries de fonctions.

Exercice 16

On considère la série $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie par :

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{-n\,x}}{1+n^2}$$

1. *a)* Démontrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0, +\infty[$.

b) Peut-on trouver un intervalle J différent de I tel que $J \supset I$ pour lequel la convergence simple est assuré ?

On note alors $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonction $\sum f_n$ (c'est une fonction définie sur I).

2. Démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et écrire S' comme somme d'une série de fonctions.

3. *a)* Démontrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $S'(x) \leqslant 0$.

b) Démontrer que S' est croissante sur $]0, +\infty[$.

c) Déduire de ce dernier point la limite de S' en 0.

Exercice 17

On admet (sans démonstration) : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \sqrt{2\,\pi}$.

1. *a)* Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$.

b) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On considère maintenant la série $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie par :

$$f_n : x \mapsto e^{-n^2 x}$$

2. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

On note alors $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonction $\sum f_n$.

3. Démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

4. *a)* Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\,t^2}\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k^2 x} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2}\, dt$$

b) En déduire : $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$.

*(indication : poser un changement de variable affine et exploiter **1**)*

Exercice 18

Soit I un intervalle réel.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

1. *a)* Rappeler la caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions.

b) Démontrer :

$\sum f_n$ converge uniformément sur I $\Rightarrow$ (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle

2. On suppose maintenant que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est une série qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. Démontrer :

$$\begin{array}{c}\sum f_n \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}(f_n) \text{ converge uniformément sur } I \\ \text{vers la fonction nulle}\end{array}$$

Exercice 19

On considère la série $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie par :

$$f_n : x \mapsto (-1)^n \ \frac{n}{n^2 + x^2}$$

1. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On note alors $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonction $\sum f_n$.

2. Démontrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. *(*`CCINP`*)*

On note $F : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$.

1. Donner le domaine de définition D de F.

2. La fonction F est-elle continue sur D ?

3. Déterminer $F(D)$.

Exercice 21. *(*`IMT`*)*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On pose $u_n : x \mapsto a^n \ \dfrac{\cos(nx)}{n!}$.

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la série $\sum u_n$.

2. Déterminer la somme S de cette série de fonctions.

3. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x) \cos(px) \, dx$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x) \sin(px) \, dx$.

Exercice 22. *(un classique)*

On définit $F : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

2. Trouver une relation entre F et ζ.

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)\,\zeta(x)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ ainsi qu'un équivalent de ζ en $+\infty$.

Exercice 23

On définit la suite de fonctions (u_n) par :

$$u_0 : x \mapsto \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n : x \mapsto \big(\sin(x)\big)^n \cos(x)$$

Étudier le mode de convergence et éventuellement la somme de $\sum u_n$.

Exercice 24. *(*`Mines`*)*

On note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

3. Déterminer un équivalent simple de f en $(-1)^+$.

4. Exprimer f' à l'aide d'une intégrale.

Exercice 25. *(*`Centrale`*)*

Soit $a : \mathbb{R}_+^* \to [1, +\infty[$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a(x)}{\ln(x)} = +\infty$.

On pose $f : t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-a(n)\,t}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

3. Soit $b > 0$. On suppose $a : x \mapsto x^b$. Déterminer un équivalent de f en 0.