Feuille d'exercices n°7 : Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) :

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n\,(1+x^n)} \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n^a}{n^2+1}\,x\,\mathrm{e}^{-nx} \end{array}$
3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-nx}\,\sin(nx) \end{array}$
4. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{(1-i)\,nx} \end{array}$
5. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(\sqrt{x+4\,n^2\,\pi^2}\right) \end{array}$
6. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathbb{1}_{[0,n]}(x) \end{array}$

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs réelles. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $g_n = \dfrac{f_n}{1+{f_n}^2}$.

1. Montrer que (g_n) converge simplement sur I.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(1+xy) \leqslant (1+x^2)\,(1+y^2)$.
3. Montrer que (g_n) converge uniformément sur I.

Exercice 3

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) :

1. $\begin{array}{rcl}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{2n+1}\,\ln(x) \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\,x\right) \end{array}$
3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n+2}{n+1}\,\mathrm{e}^{-n\,x^2} \end{array}$
4. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n\,x}{1+n^2\,x^2} \end{array}$
5. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(\sqrt{x+4\,n^2\,\pi^2}\right) \end{array}$
6. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathbb{1}_{[0,n]}(x) \end{array}$

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction : $f_n : x \mapsto nx^n\,(1-x)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
2. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 5

On considère la suite de fonctions définie pour tout $x \in [0,1]$ par :

$$\begin{cases} P_0(x) \;=\; 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\; P_{n+1}(x) \;=\; P_n(x) + \dfrac{x-P_n(x)^2}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que (P_n) est une suite de restrictions de polynômes dont on précisera le degré.
2. Montrer que (P_n) converge simplement vers une fonction f à préciser.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \;\leqslant\; f(x) - P_n(x) \;\leqslant\; 2\,\frac{f(x)}{2+n\,f(x)}$$

4. Montrer que (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par : $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[-1, 1]$.

2. La limite simple de la suite (f_n) est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 1]$? Commenter.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par : $f_n : x \mapsto n\, x^n \sin\big(\pi\, x\big)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$.

2. ***a)*** Démontrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de la forme $[0, a]$ où $a \in [0, 1[$.

b) En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout segment de $[0, 1[$.

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1[$?

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie par :

$$g_n : t \mapsto n\,(n+1)\, t^{n-1}\ \sin(\pi\, t)$$

On note de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(t)\ dt$.

1. Démontrer : $\forall n \geqslant 3,\ I_n = \dfrac{n(n+1)}{\pi}\ \left(1 - \dfrac{I_{n-2}}{\pi}\right)$.

2. Montrer que (g_n) converge simplement sur $[0, 1]$.

3. ***a)*** Que vaut : $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\ dt$?

b) En déduire que (g_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par : $f_n : x \mapsto \left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)^{-n^2}$.

1. Démontrer : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ x - \dfrac{x^2}{2}\ \leqslant\ \ln(1+x)\ \leqslant\ x$.

2. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$.

3. ***a)*** Démontrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de la forme $[0, a]$ où $a > 0$.

b) En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout segment de $[0, +\infty[$.

Exercice 10

On note (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\begin{cases} f_0 : x \mapsto \sin(x) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x)\ =\ \displaystyle\int_0^x\ t\, f_n(t)\ dt \end{cases}$$

1. ***a)*** Calculer f_1 et f_2.

b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = (2n+1)\, f_n(x) - x^2\, f_{n-1}(x)$$

c) Montrer qu'il existe P_n et Q_n des polynômes à coefficients entiers de degré inférieurs à n tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x)\ =\ Q_n(x^2)\, \sin(x) + x\, P_n(x^2)\, \cos(x)$$

2. ***a)*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\big|f_n(x)\big| \leqslant \dfrac{|x|^{2n}}{2^n\, n!}$.

b) La suite (f_n) converge-t-elle simplement ?
Converge-t-elle uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$?

3. Montrer que π^2 est irrationnel.

Exercice 11

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}_p[X]$.

On suppose que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Montrer qu'il existe des polynômes $(L_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum_{k=0}^{p} P_n(k)\, L_k$$

2. En déduire que f est un polynôme de degré au plus p.

3. Montrer que (P_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers f.

Exercice 12. *(d'après* `Mines 2 2019 - PSI`*)*

- Dans cet exercice, on se propose de démontrer le théorème de Stone-Weierstrass qui stipule : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
- Il s'agit de démontrer que, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

1. Justifier : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$.

2. Montrer : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

3. Montrer : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$.

4. En déduire : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \leqslant Cn$, pour une constante $C > 0$ à préciser.

On considère maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$.
On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$:

$$|x-y| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x-\tfrac{k}{n}\right| < \alpha\right\}$$
$$\text{et}\qquad Y = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x-\tfrac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}$$

5. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \sum_{k\in Y} \binom{n}{k}\, x^k(1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$.

6. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$$

Exercice 13. *(*`CCINP`*)*

On lance un dé à 6 faces.

Les lancers sont indépendants et le dé n'est pas pipé.

On note X_k la variable aléatoire égale à la valeur obtenue au $k^{\text{ème}}$ lancer.

1. Déterminer la loi de X_k et la fonction de répartition F associée à X_k.

2. On note Z_n la valeur maximale obtenue au bout de n lancers.
Déterminer la fonction de répartition F_n de Z_n en fonction de F.

3. Déterminer la limite de (F_n) lorsque n tend vers l'infini.
La convergence est-elle uniforme ?

4. On note Y_n la valeur minimale obtenue au bout de n lancers.
Déterminer G_n sa fonction de répartition.
Étudier les convergences simple et uniforme de (G_n).

Exercice 14. *(*`CCINP`*)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,1]$ la fonction $G_n : t \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t$.

1. Démontrer pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$: $\left|G_n'(t)\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t}{n}$.

2. En déduire, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$: $\left|G_n(t) - 1\right| \leqslant \dfrac{t\,\mathrm{e}^t}{n}$.

3. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$: $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t \, dt$.
Montrer que la suite de fonctions (I_n) converge simplement sur $[0,1]$.

4. Converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 15

1. Justifier l'existence des intégrales suivantes (on notera chacune d'elle I_n).

2. Déterminer leur limite et en donner un équivalent simple en $+\infty$.
(dans le cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$, on pourra étudier $n\, I_n$ pour obtenir un équivalent)

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^n} \, dt$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^{\frac{1}{n}} \, dt$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x} \, dx$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + t + \ldots + t^n}} \, dt$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t\,(1+t^2)} \, dt$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} \, dx$

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n} \, dx$

Exercice 16 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto (x^2 + 1) \, \dfrac{n\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^{-x}}{n + x}$.

1. Démontrer que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t) \, dt$.

Exercice 17 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + n^2 x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x) \, dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

2. Soit $a \in \,]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 18 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit X un ensemble, soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et soit g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1} \, \mathrm{e}^{-n\,x^2} \cos\left(\sqrt{n}\, x\right)$$

a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 19

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 2\,\dfrac{x-k}{n} & \text{si } x \in [k, k+\frac{1}{2}],\ k \leqslant n \\ 2\,\dfrac{k+1-x}{n} & \text{si } x \in [k+\frac{1}{2}, k+1],\ k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Séries de fonctions

Exercice 20

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons :

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^k}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,

(ii) $\boxed{\text{Convergences successives}}$

(0) La suite (f_n) **converge simplement** sur I.

(1) Pout tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n^{(k)})$ **converge uniformément** sur (tout segment de) I.

1. ***a)*** Démontrer que, sous ces hypothèses, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

b) Quel résultat d'interversion obtient-on sous ces hypothèses ?

2. Écrire un résultat analogue pour les séries de fonctions.

Exercice 21

On considère la série $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie par :

$$f_n : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-n\,x}}{1+n^2}$$

1. ***a)*** Démontrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0, +\infty[$.

b) Peut-on trouver un intervalle J différent de I tel que $J \supset I$ pour lequel la convergence simple est assuré ?

On note alors $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonction $\sum f_n$ (c'est une fonction définie sur I).

2. Démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et écrire S' comme somme d'une série de fonctions.

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ S'(x) \leqslant 0$.

b) Démontrer que S' est croissante sur $]0, +\infty[$.

c) Déduire de ce dernier point la limite de S' en 0.

Exercice 22

Soit I un intervalle réel.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

1. ***a)*** Rappeler la caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions.

b) Démontrer :

$$\begin{array}{c} \sum f_n \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} (f_n) \text{ converge uniformément sur } I \\ \text{vers la fonction nulle} \end{array}$$

2. On suppose maintenant que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est une série qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. Démontrer :

$$\begin{array}{c} \sum f_n \text{ converge} \\ \text{uniformément sur } I \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} (f_n) \text{ converge uniformément sur } I \\ \text{vers la fonction nulle} \end{array}$$

Exercice 23

On admet (sans démonstration) : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \sqrt{2\pi}$.

1. ***a)*** Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$.

b) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On considère maintenant la série $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie par :

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-n^2 x}$$

2. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

On note alors $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonction $\sum f_n$.

3. Démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

4. ***a)*** Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t^2}\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2 x} \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t^2}\, dt$$

b) En déduire : $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$.

*(indication : poser un changement de variable affine et exploiter **1**)*

Exercice 24

On considère la série $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie par :

$$f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{n}{n^2 + x^2}$$

1. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On note alors $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonction $\sum f_n$.

2. Démontrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25. *(*`CCINP`*)*

On note $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Donner le domaine de définition D de F.

2. La fonction F est-elle continue sur D ?

3. Déterminer $F(D)$.

Exercice 26. *(*`IMT`*)*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On pose $u_n : x \mapsto a^n \dfrac{\cos(nx)}{n!}$.

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la série $\sum u_n$.

2. Déterminer la somme S de cette série de fonctions.

3. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)\cos(px)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)\sin(px)\, dx$.

Exercice 27. *(un classique)*

On définit $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

2. Trouver une relation entre F et ζ.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x-1)\,\zeta(x)$.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} F(x)$ ainsi qu'un équivalent de ζ en $+\infty$.

Exercice 28

On définit la suite de fonctions (u_n) par :

$$u_0 : x \mapsto \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n : x \mapsto \big(\sin(x)\big)^n \cos(x)$$

Étudier le mode de convergence et éventuellement la somme de $\sum u_n$.

Exercice 29. *(Mines)*

On note $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

3. Déterminer un équivalent simple de f en $(-1)^+$.

4. Exprimer f' à l'aide d'une intégrale.

Exercice 30. *(Centrale)*

Soit $a : \mathbb{R}_+^* \to [1,+\infty[$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{a(x)}{\ln(x)} = +\infty$.

On pose $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a(n)\,t}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

3. Soit $b > 0$. On suppose $a : x \mapsto x^b$. Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 31

Jusitifier les égalités suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

2. $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

3. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a\,n+1}$

Exercice 32

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant1}$ pour que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 33

On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, puis la continuité de f sur ce domaine.

2. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

3. Déterminer un équivalent simple de f en 0.

Exercice 34

Pour tout $n \geqslant 1$, on note : $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

1. Étudier la convergence simple, uniforme, normale de $\sum_{n\geqslant1} u_n$. On note S sa somme.

2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Calculer S', puis S.

Exercice 35

Pour tout $n \geqslant 2$, on note $u_n : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^n\,\ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine D de convergence de la série $\sum_{n\geqslant2} u_n$.

2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant2} u_n$ ne converge pas normalement sur D.

3. Montrer que pour $n \geqslant 2$, le reste d'ordre n de la série vérifie : $\forall x \in D$, $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.
En déduire la continuité de la somme S de cette série sur D.

4. Montrer que S est intégrable sur D.

Exercice 36

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence et la continuité de S sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Étudier les variations de S, et préciser les limites de S en 0 et en $+\infty$.

3. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\,S(x) + S(x+1) = \mathrm{e}$.

4. Trouver un équivalent simple de S en 0 et $+\infty$.

Exercice 37

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Étudier la convergence simple, uniforme, normale, de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que la somme f de cette série de fonctions est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis trouver un équivalent simple de f en $+\infty$.

(Indication : on pourra commencer par simplifier $f(x)+f(x+1)$, pour $x \geqslant 0$)

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

Sujets de concours

Exercice 38 *(d'après* `E3A 2023 - PSI`*)*

1. **Question de cours**

a) Soit n un entier naturel. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^{n+1} - 1$ par $X - 1$.

b) Donner, sans justification, la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ ainsi que son ensemble de définition.

* * * * *

2. **Étude d'une suite**

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\,dt$ converge pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+\ldots+t^n}\,dt$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

3. **Étude de la série de terme général** $u_n - \ell$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul p, et pour tout réel $t \in [0,1]$, on pose $g_p(t) = (1-t)t^{p(n+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$, et déterminer sa somme.

b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_p(t)\,dt$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.

c) En utilisant la série de fonctions définie au ***4.a)***, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{\big((n+1)p+2\big)\,\big((n+1)\,p+1\big)}$$

d) Pour tout p entier naturel non nul, on pose :

$$h_p : t \mapsto \frac{t^2}{\big((t+1)\,p+2\big)\,\big((t+1)\,p+1\big)}$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

e) En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\pi^2}{6n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 39 *(d'après* `E3A 2021 - MP`*)*

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall x \in I,\ f_0(x) = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.

2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.

3. Etudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.

4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.

5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I.

6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.

On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$

8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. Montrer que l'on a : $J = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 40 *(d'après* `E3A 2020 - PSI`*)*

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.

4. Déterminer $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

a) Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

b) Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.