Feuille d'exercices n°10 : Variables aléatoires discrètes

Inégalité de Markov

Exercice 1 *(d'après* `Centrale-2 2020 - PSI`*)*

- On étudie dans cette partie deux situations dont la résolution fait intervenir les fonctions V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

II.A - *Première situation*

- Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets distribués aux clients au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- On note X le nombre de billets gagnants tirés au cours d'une journée et on admet que X est également une variable aléatoire. Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité de gagner au moins deux lots durant la même journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in]0,1[$ et on souhaite réaliser la condition :

$$\mathbb{P}\big(\{X \geqslant 2\}\big) \leqslant 1-\alpha \tag{II.1}$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.1).

1. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
Donner l'espérance et la variance de X.

2. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{\lambda}$ alors la condition (II.1) est satisfaite.

3. On pose $x = -(\lambda p + 1)$.
Démontrer que la condition (II.1) est équivalente à la condition :

$$x e^{x} \leqslant -\alpha e^{-1}$$

4. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie **I**) et la question **I.10**, discuter selon la position de λ par rapport à $-1 - V(-\alpha e^{-1})$ l'existence d'un plus grand réel $p \in]0,1[$ satisfaisant la condition (II.1).

II.B - *Deuxième situation*

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité $1-p \in]0,1[$. Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger une erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère $\alpha \in]0,1[$ et on veut réaliser la condition

$$\mathbb{P}\big(\{X \geqslant 2\}\big) \leqslant 1-\alpha \tag{II.2}$$

Pour que le codage soit efficace, on souhaite de plus que r soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.2).

5. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

6. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $r \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{1-p}$, alors la condition (II.2) est satisfaite.

7. On pose $a = \dfrac{p\ln(p)}{p-1}$. Démontrer que la condition (II.2) est équivalente à la condition :

$$xe^x \leqslant -\alpha a e^{-a}$$

8. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie **I**) et la question **10**, étudier l'existence d'un plus grand réel r satisfaisant la condition (II.2).

9. Lorsqu'il existe, exprimer cet entier en fonction de p, α et a à l'aide d'une des fonctions V ou W.

Exercice 2 *(d'après* `Centrale-1 2022 - PSI`*)*

- On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
- On désigne par I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u = (u_i)_{i\in I}$ une suite de vecteurs unitaires de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que le nombre réel :

$$C(u) = \sup\left\{|\langle u_i \mid u_j\rangle|\,,\ (i,j)\in I^2,\ i\neq j\right\}$$

existe et appartient à l'intervalle $[0,1]$.

$C(u)$ s'appelle paramètre de cohérence de la suite $(u_i)_{i\in I}$.

2. Montrer que si $C(u) = 0$, alors l'ensemble $\{u_i,\ i\in I\}$ est fini et donner un majorant de son cardinal.

On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille u de N vecteurs unitaires de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $C(u)\leqslant\varepsilon$ où ε est un nombre réel de l'intervalle $[0,1]$.

On dit alors que u est une famille « presque orthogonale ».

3. Démontrer que, pour tout nombre réel t, $\operatorname{ch}(t)\leqslant\exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

Soient $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathscr{R}$ (définie dans la sous-partie II.B). On définit les vecteurs aléatoires, $X = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1,\dots,X_n)^\top$ et $Y = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1,\dots,Y_n)^\top$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que, pour tout nombre réel t :

$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X\mid Y\rangle)\rangle\big) = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

5. En déduire que, pour pour tout nombre réel t :

$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X\mid Y\rangle)\big)\leqslant\exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

Soient σ et λ deux nombres réels strictement positifs et Z une variable aléatoire réelle telle que $\exp(tZ)$ est d'espérance finie et vérifie

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \mathbb{E}\big(\exp(tZ)\big)\leqslant\exp\left(\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$$

6. En appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie, démontrer que

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}\big(\{Z\geqslant\lambda\}\big)\leqslant\exp\left(\frac{\sigma^2t^2}{2}-\lambda t\right)$$

7. En déduire que

$$\mathbb{P}\big(\{|Z|\geqslant\lambda\}\big)\leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$$

8. Avec les notations et les hypothèses de la question 39 , démontrer que

$$\mathbb{P}\big(\{|\langle X\mid Y\rangle|\geqslant\varepsilon\}\big)\leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

N étant un entier naturel non nul, $\left(X_j^i\right)_{1\leqslant i\leqslant N,1\leqslant j\leqslant n}$ est une famille de $n\times N$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi $\mathscr{R}$. Pour tout $i\in[\![1,N]\!]$, on pose $X^i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1^i,\dots,X_n^i)^\top$.

9. Déduire des questions précédentes que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N}|\langle X^i\mid X^j\rangle|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

10. On suppose que $n \geqslant 4\dfrac{\ln N}{\varepsilon^2}$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \varepsilon\right) < 1.$$

11. En déduire que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille de N vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majoré par ε.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 3 *(d'après* `Mines-1 2019 - PSI`*)*

- Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel *strictement positif.*
- On considère la fonction :

$$S_{r,p} \quad : \quad \begin{array}{ccc} z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{pn} \\ \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \end{array}$$

- L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p}\, x^r\, \mathrm{e}^x \qquad (H_{r,p})$$

  Cet objectif sera atteint dans la partie II pour le cas particulier $p = 1$, et dans la partie III pour le cas $p \geqslant 2$. Dans la partie IV, on étudie une application de ce résultat au comportement asymptotique d'une solution particulière d'une certaine équation différentielle d'ordre 2.

  Dans tout le sujet, on note $\lfloor x\rfloor$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leqslant x < k+1$. On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

I. Généralités, cas particuliers

1. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant1} \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et faire de même pour la série entière $\sum\limits_{n\geqslant1} \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{np}$.

2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et $S_{0,2}(x)$, et en déduire la validité des énoncés $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$.

II. Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

- On admet dans cette partie qu'il existe, sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, une famille $(X_x)_{x\in\mathbb{R}_+^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que X_x suive la loi de Poisson de paramètre x pour tout réel $x > 0$. On fixe de telles données dans l'intégralité de cette partie, et l'on fixe un réel $r > 0$.
- On pose :

$$Z_x = \frac{X_x}{x}$$

- Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Y_{x,N} = \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k) = X_x(X_x-1)\cdots(X_x-N+1)$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $(Z_x)^r$ admet une espérance et exprimer $E((Z_x)^r)$ à l'aide de $S_{r,1}(x)$.

4. Pour $x > 0$, rappeler l'espérance et la variance de X_x. Déduire alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{|Z_x - 1| \geqslant x^{-1/3}\Big\}\Big) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

5. Montrer que pour tout réel $x > 1$:

$$(1-x^{-1/3})^r\ \mathbb{P}\Big(\Big\{Z_x \geqslant 1 - x^{-1/3}\Big\}\Big) \leqslant \mathbb{E}((Z_x)^r)$$

Montrer en outre :

$$(1-x^{-1/3})^r\ \mathbb{P}\Big(\Big\{Z_x \geqslant 1 - x^{-1/3}\Big\}\Big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

6. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $Y_{x,N}$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y_{x,N}) = x^N$$

7. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_N$ tels que :

$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ (X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}$$

On pourra introduire la famille $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels définie par :

$$H_0 = 1 \quad \textit{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}^*,\ H_j = \prod_{i=0}^{j-1} (T - i)$$

où l'indéterminée est notée T.
En déduire :

$$\mathbb{E}((Z_x)^N) \underset{x\to+\infty}{\to} 1.$$

8. On pose $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N$. Montrer l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ t^s \leqslant s(t-1) + 1,$$

et en déduire :

$$\forall x > 0,\ (Z_x)^r \leqslant (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}.$$

9. En combinant les résultats précédents, établir la convergence :

$$\mathbb{E}((Z_x)^r) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$$

et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1}$.

Fonction génératrice (des probabilités)

Exercice 4 *(d'après* `CCINP-1 2019 - MP`*)*
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$, la fonction génératrice de X est :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, t^n$$

1. Démontrer que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer :

$$\forall t \in]-1, 1[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$$

On utilisera deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

3. Un sac contient quatre boules :

- une boule numérotée 0,
- deux boules numérotées 1,
- et une boule numérotée 2.

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

Exercice 5 *(d'après* `CCINP 2020 - PC`*)*

- Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs.
- À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.
- Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{X_k = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_k = -1\}\big) = \frac{1}{2}$$

- On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

- L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :
  - × si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
  - × sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.
- L'événement $\{T = +\infty\}$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.
  Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}\big(\{S_n = 0\}\big) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?

2. Calculer p_0, p_1 et p_2.

3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$.
Déduire de la question précédente :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7. Montrer que $R_p \geqslant 1$.

8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)$$

9. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1-x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

- On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Calculer q_1 et q_2.

11. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
En déduire : $R_q \geqslant 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k\, q_{n-k}$$

12. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x)\ g(x) = f(x) - 1.$$

13. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

14. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

15. En utilisant les questions 11 et 13, déterminer la valeur de $\mathbb{P}\big(\{T = +\infty\}\big)$. Interpréter le résultat.

16. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Exercice 6 *(d'après* `Centrale 1 2019 - PSI`*)*

- On dispose d'un stock infini de boules noires et blanches. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.
- On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :
  - × on tire au hasard une boule de l'urne ;
  - × on replace dans l'urne la boule tirée ;
  - × on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.
- On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires par $X_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, X_n donne le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages.
- On note g_n la fonction génératrice de la variable X_n.
On rappelle que $g_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\, t^k$.

1. Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3 puis les fonctions g_1, g_2 et g_3.

2. Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Établir :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = \frac{k-1}{n+1}\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k-1\}\big) + \frac{n+1-k}{n+1}\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)$$

3. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout réel t :

$$g_n(t) = \frac{t^2 - t}{n+1}\ g'_{n-1}(t) + g_{n-1}(t)$$

4. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t :

$$g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k$$

5. Identifier la loi de X_n et donner son espérance.

Exercice 7 *(d'après* `Centrale 1 2020 - PSI`*)*

- On considère un processus industriel automatisé au cours duquel une tâche répétitive est effectuée à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant n. On admet que le système parvient à corriger ces erreurs et à maintenir son fonctionnement si le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant n, noté $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, reste inférieur à une quantité de la forme amn où $a > 1$ est une constante fixée et m est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On est donc amené à estimer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{S_n > nam\}\big)$, dans le but de montrer qu'elle tend vers 0 très rapidement lorsque n tend vers l'infini.
- Dans la première partie, on étudie le cas particulier où les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $1/2$. Dans la deuxième partie, on démontre partiellement le théorème de Perron-Frobenius, qui permet, dans la troisième, d'étudier le cas où les variables aléatoires X_n forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire où le nombre d'erreurs enregistrées à l'instant $n+1$ dépend uniquement de celui enregistré à l'instant n.

I. Cas de la loi de Poisson

- Dans cette partie, on étudie le modèle élémentaire où la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du nombre d'erreurs aux instants successifs est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre $1/2$. L'objectif de cette partie est de donner un équivalent de $\mathbb{P}\big(\{S_n > n\}\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$, afin de s'assurer que celle-ci converge vers 0 avec une vitesse de convergence exponentielle.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et G_{X_n} la fonction génératrice de X_n.

I.A Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

2. Expliciter le calcul de la fonction génératrice G_{X_1} de la v.a. X_1.

3. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{S_n}(t) = \big(G_{X_1}(t)\big)^n$.

4. Montrer que la variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

I.B

5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n!\left(\frac{2}{n}\right)^n \mathbb{P}\big(\{S_n > n\}\big) = \mathrm{e}^{-n/2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!\, n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k = \frac{n!\, n^k}{(n+k)!} \leqslant 1$$

7. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$, où, pour tout $k \in N^*$, la fonction u_k est définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$u_k : x \mapsto (1+kx)^{-k}(1/2)^k$$

est normalement convergente sur $[0, +\infty[$.

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{-k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ converge et :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

9. En déduire :

$$\mathbb{P}\big(\{S_n > n\}\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-n/2}}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

10. À l'aide de la formule de Stirling, en déduire qu'il existe un réel $\alpha \in\,]0, 1[$ tel que $\mathbb{P}\big(\{S_n > n\}\big) = \underset{n\to+\infty}{O}(\alpha^n)$.

Exercice 8 *(d'après* `Centrale 2 2021 - PSI`*)*

- On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Soient deux entiers naturels A et n tels que $n \leqslant A$ et p un nombre réel compris entre 0 et 1. On suppose $pA \in \mathbb{N}$ et on note $q = 1 - p$.
- Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que X suit la *loi hypergéométrique* de paramètres n, p et A lorsque :

$$\begin{cases} X(\Omega) \subset [\![0, n]\!], \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{pA}{k}\ \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} \end{cases}$$

- On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

1. Premiers résultats

1. Vérifier qu'on a bien défini une loi de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$. Calculer l'espérance de X.

On rappelle que, pour tous entiers naturels non nuls k et N, $k\ \binom{N}{k} = N\ \binom{N-1}{k-1}$.

3. Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique. En déduire une expression de la fonction génératrice de X à l'aide d'une fonction hypergéométrique.

2. Modélisation

- On considère deux urnes contenant chacune A boules dont pA sont blanches et qA sont noires.
- On tire simultanément, de manière équiprobable, n boules dans la première urne. On note Y le nombre de boules blanches obtenues.
- On tire également, de manière équiprobable, n boules dans la deuxième urne, mais successivement et avec remise. On note Z le nombre de boules blanches obtenues.

4. Quelle est la loi de la variable Z ? Donner l'espérance et la variance de Z.

5. Démontrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

3. Calcul de la variance

- On se propose d'utiliser la modélisation du tirage dans la première urne pour retrouver la valeur de l'espérance et pour calculer la variance d'une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, p, A)$.
- Pour cela, on numérote de 1 à pA chacune des boules blanches contenues dans la première urne et, pour tout entier naturel $i \in [\![1, pA]\!]$, on pose :

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \textit{si la boule numérotée } i \textit{ a été tirée,} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

6. Exprimer Y à l'aide des Y_i et retrouver la valeur de l'espérance de Y.
La comparer à celle de Z.

7. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant pA$, démontrer que la variable aléatoire $Y_i Y_j$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

8. En déduire la valeur de la variance de Y.
La comparer à celle de Z.

4. Résultats asymptotiques

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{H}(n, p, A)$.
- On fixe n et p. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

9. Montrer que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, (1 - p)^{n-k}$.

10. Interpréter ce résultat en lien avec ceux obtenus pour l'espérance et la variance de Y.

Fonction génératrice des moments

Exercice 9 *(d'après* `CCINP 2018 - PSI`*)*

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ cette espérance.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
- Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[-1,1]$.
- On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbb{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

1. On ne suppose pas X centrée dans cette question.
Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée.*

2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

3. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|X| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big(|X|\big)}{\alpha}$$

4. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\big) \leqslant \frac{\big(\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}$$

Majoration de $\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$

5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-a}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1,1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

6. En déduire :

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1,1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$$

7. En déduire :

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant \mathrm{ch}(t)$$

8. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$$

En déduire :

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$$

Majoration de $\mathbb{P}\big(\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}\big)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

9. Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{ccc} t & \mapsto & \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + nt^2/2} \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

10. En déduire que $\mathbb{P}\big(\{S_n \geqslant \varepsilon\}\big) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis :

$$\mathbb{P}\big(\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}\big) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}$$

Conclusion

11. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}\big(\{|S_n| > \varepsilon\}\big)$ converge.

12. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geqslant n} \{\omega \in \Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement est que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

13. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.

Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \lim\limits_{n \to \infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

14. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 10 *(d'après* `Centrale 1 2017 - PSI`*)*

Notations et rappels

- Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi de X. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$
- Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1, on note $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance de Y.
- Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, on note $\mathbb{V}(Y)$ la variance de Y.
- Si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on abrège « Y est d'espérance finie » en « $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ ».
- Si $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit que X vérifie (C_τ) si $\mathbb{E}(e^{\tau|X|}) < +\infty$.
- On pourra utiliser la propriété suivante :
$$\mathcal{P} : \text{si } Y, Z \text{ sont des variables aléatoires réelles telles que } 0 \leqslant Y \leqslant Z, \quad \mathbb{E}(Z) < +\infty \ \Rightarrow\ \mathbb{E}(Y) < +\infty.$$
- Etant données deux variables aléatoires réelles Y et Z sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on dit que Y *est presque surement égale à* Z lorsque $\mathbb{P}\big(\{Y = Z\}\big) = 1$.
- On admet le résultat suivant (lemme des coalitions) : soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient A et B des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ disjoints. Alors, toute variable aléatoire fonction de Y_n, $n \in A$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des Y_n, $n \in B$.

I. Premiers résultats

I.1. Une classe de variables aléatoires

1. Soient U et V deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ possédant un moment d'ordre 2 et telles que V n'est pas presque surement nulle.
Montrer :

$$\mathbb{E}(U^2)\ \mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(UV)^2 \geqslant 0$$

et :

$$\mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(UV)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda V + U \text{ est presque surement nulle}$$

2. ***a)*** On suppose que X est bornée.
Justifier que X vérifie (C_τ) pour tout τ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

b) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = p(1-p)^{k-1}$$

Quels sont les réels t tels que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$?
Pour ces t, donner une expression simple de $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$.

c) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

Quels sont les réels t tels que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$?
Pour ces t, donner une expression simple de $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$.

3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
On suppose que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{aX}) < +\infty$ et $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{bX}) < +\infty$.

a) Montrer :

$$\forall t \in [a,b],\ \mathrm{e}^{tX} \leqslant \mathrm{e}^{aX} + \mathrm{e}^{bX}$$

En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$.
Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} /\ \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty\}$?

b) Soient $k \in \mathbb{N}$, t dans $]a,b[$. On note $\theta_{k,t,a,b}$ la fonction :

$$\begin{array}{ccc} y & \mapsto & \dfrac{y^k \mathrm{e}^{ty}}{\mathrm{e}^{ay} + \mathrm{e}^{by}} \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

Déterminer les limites de $\theta_{k,t,a,b}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
Montrer que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\mathbb{E}(|X|^k \mathrm{e}^{tX}) < +\infty$.

d) On reprend les notations de la question (b). Soient $k \in \mathbb{N}$, c et d deux réels tels que $a < c < d < b$.
Montrer qu'il existe $M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in [c,d]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant M_{k,a,b,c,d}$$

4. Dans cette question, τ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et X vérifie (C_τ).

a) Montrer que l'ensemble des réels t tels que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$ est un intervalle I contenant $[-\tau, \tau]$.
Pour tout t dans I, on note $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$.

b) Montrer que si $X(\Omega)$ est fini, φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I.

c) On suppose maintenant que $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n /\ n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels deux à deux distincts et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)$.
En utilisant les résultats établis en **1.1.3** et deux théorèmes relatifs aux séries de fonctions que l'on énoncera complétement, montrer que φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I.

d) Vérifier que pour t dans l'intérieur de I et $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(X^k \mathrm{e}^{tX})$.

e) Soit $\psi_X = \dfrac{(\varphi_X)'}{\varphi_X}$.
Montrer que ψ_X est croissante sur l'intérieur de I et que, si X n'est pas presque surement égale à une constante, ψ_X est strictement croissante sur l'intérieur de I.

I.2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

5. Soit δ un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big(\{|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geqslant n\delta\}\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}$$

6. Si u et v sont deux nombres réels tels que $u < \mathbb{E}(X) < v$, déterminer la limite de la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = \mathbb{P}\big(\{nu \leqslant S_n \leqslant nv\}\big)$$

I.3. Suites sur-additives

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ u_{m+n} \geqslant u_m + u_n$.
On suppose que l'ensemble $\left\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré et on note s sa borne supérieure.

7. Soient m, q, r des éléments de $\mathbb{N}$. On note $n = mq + r$. Comparer les deux nombres réels u_n et $qu_m + u_r$ et montrer que $u_n - ns \geqslant q(u_m - ms) + u_r - rs$.

8. On fixe m dans $\mathbb{N}^*$ et ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. En utilisant la division euclidienne de n par m, montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$,

$$\frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \varepsilon$$

9. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = s$.

II. Le théorème des grandes déviations

Soit a un nombre réel.

II.1. Exposant des grandes déviations

10. Montrer que $\mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{S_n \geqslant na\}\big) = 0$.

11. Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $S_{m+n} - S_m$ et S_n ont même loi.

b) Soit b un nombre réel. Montrer :

$$\mathbb{P}\big(\{S_{m+n} \geqslant (n+m)b\}\big) \geqslant \mathbb{P}\big(\{S_n \geqslant nb\}\big)\mathbb{P}\big(\{S_m \geqslant mb\}\big)$$

On suppose dans toute la suite du problème que $\mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big) > 0$.

12. Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(\mathbb{P}(\{S_n \geqslant na\}))}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et admet une limite $\gamma_a \leqslant 0$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{S_n \geqslant na\}\big) \leqslant e^{n\gamma_a}$$

- Dans toute la suite du problème, on suppose que X vérifie (C_τ) pour un certain $\tau > 0$ et n'est pas presque surement constante. On suppose également que $a > \mathbb{E}(X)$.
- On se propose d'établir que $\gamma_a < 0$ (ce qui montre que la suite $(\mathbb{P}(\{S_n \geqslant na\}))_{n\geqslant 1}$ converge géométriquement vers 0) puis de déterminer γ_a.

II.2. Majoration des grandes déviations

L'intervalle I et la fonction φ_X sont définis comme dans la question **1.1.4**.

13. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I \cap \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) = (\varphi_X(t))^n,\ \mathbb{P}\big(\{S_n \geqslant na\}\big) \leqslant \frac{\varphi_X(t)^n}{\mathrm{e}^{nta}}$$

14. On définit la fonction χ : $\left|\begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(\varphi_X(t)) - ta \end{array}\right.$

a) Montrer que la fonction χ est minorée sur $I \cap \mathbb{R}^+$.
On note η_a la borne inférieure de χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

b) Donner un équivalent de $\chi(t)$ lorsque t tend vers 0. En déduire $\eta_a < 0$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{S_n \geqslant na\}\big) \leqslant \mathrm{e}^{n\eta_a}$. En déduire que $\gamma_a < 0$.

d) Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels a vérfiant les conditions $\mathbb{P}\big(\{X \geqslant a\}\big) > 0$ et $a > \mathbb{E}(X)$; puis, pour a vérifiant ces conditions, calculer η_a.

(i) X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

(ii) X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

II.3. Le théorème de Cramer

- On suppose ici que la borne inférieure η_a de la fonction χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$ est atteinte en un point σ intérieur à $I \cap \mathbb{R}^+$.
- Soient t un nombre réel intérieur à I et tel que $t > \sigma$, b un nombre réel tel que $b > \dfrac{(\varphi_X)'(t)}{\varphi_X(t)}$.

15. ***a)*** Calculer $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{\mathrm{e}^{tx}}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})}\, \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$.

On admet alors (quitte à modifier $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) :

- qu'il existe une variable aléatoire X' sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $X'(\Omega) = X(\Omega)$ et dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big(\{X' = x\}\big) = \frac{\mathrm{e}^{tx}}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})}\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$$

- qu'il existe une suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes la même loi que X.

a) Montrer :

$$\mathbb{E}(X') = \frac{(\varphi_X)'(t)}{\varphi_X(t)},\ \mathbb{E}(X') > a$$

16. On admet que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si f est une application de $X(\Omega)^n$ dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\mathbb{E}(f(X'_1, \ldots, X'_n)) = \frac{\mathbb{E}(f(X_1, \ldots, X_n)\mathrm{e}^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X'_k$.

Montrer : $\mathbb{P}\big(\{na \leqslant S'_n \leqslant nb\}\big) \leqslant \mathbb{P}\big(\{S_n \geqslant na\}\big)\dfrac{\mathrm{e}^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}$.

On pourra introduire l'application f définie de $X(\Omega)^n$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & si\ na \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant nb \\ 0 & sinon \end{cases}$$

b) En utilisant les questions **1.2.2**, **2.2.2c** et le (a) ci-dessus, montrer finalement que $\eta_a = \gamma_a$.

17. Dans cette question, on pourra utiliser les résultats de **2.2.2d**.

a) Soit α dans $]0, 1/2[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \{k \in \{0, \ldots, n\},\ |k - \frac{n}{2}| \geqslant \alpha n\},\ U_n = \sum_{k \in A_n} \binom{n}{k}$$

Déterminer la limite de la suite $(U_n^{1/n})_{n \geqslant 1}$.

b) Soit $\lambda > 0$, $\alpha > \lambda$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geqslant \alpha n}} \frac{n^k \lambda^k}{k!}$$

Déterminer la limite de la suite $(T_n^{1/n})_{n \geqslant 1}$.

Exercice 11 *(d'après* `Centrale 2 2018 - PSI`*)*
Notations

- Si f est une fonction de classe C^∞ et p un entier naturel, on note $f^{(p)}$ la dérivée $p^{\text{ème}}$ de f.
- On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Si a et b sont deux entiers naturels, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b.
- Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ admettant une espérance, celle-ci est notée $\mathbb{E}(X)$.

Préambule

On admet le résultat suivant.

Si $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que :

(i) pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{q\geqslant 0}|u_{p,q}|$ converge,

(ii) la série $\sum\limits_{p\geqslant 0}\left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ converge,

alors, en notant $S_p=\sum\limits_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_n=\sum\limits_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}}u_{p,q}$:

× pour tout $q\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{p\geqslant 0}u_{p,q}$ converge ; on note S'_q sa somme ;

× les séries $\sum\limits_{p\geqslant 0}S_p$, $\sum\limits_{q\geqslant 0}S'_q$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}W_n$ convergent ;

× $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}S_p=\sum\limits_{q=0}^{+\infty}S'_q=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}W_n$, c'est-à-dire :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}}u_{p,q}\right)$$

I. Moments d'une variable aléatoire

- Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On suppose que $X(\Omega)\subset\mathbb{R}^{+*}$.
- Si $p\in\mathbb{N}$, on dit que X admet un moment d'ordre p si la variable aléatoire X^p admet une espérance. On note alors $m_p(X)$, appelé *moment d'ordre p de X*, l'espérance de X^p.
- On remarque que $m_0(X)=1$.

1. Justifier que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $0\leqslant X^k\leqslant 1+X^n$.

2. En déduire que, si X admet un moment d'ordre n ($n\in\mathbb{N}^*$), alors X admet des moments d'ordre k pour tous $k\in[\![1,n-1]\!]$.

I.A - Fonction génératrice des moments

- On suppose que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre n et que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}m_n(X)\frac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R_X>0$.
- Pour tout $t\in\,]-R_X,R_X[$, on note $M_X(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}m_n(X)\,\dfrac{t^n}{n!}$.
- La fonction M_X s'appelle la *fonction génératrice* des moments de la variable aléatoire X.

3. Justifier que la connaissance de la fonction M_X permet de déterminer de manière unique la suite $\big(m_n(X)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. En utilisant les résultats du préambule, montrer que, pour tout t élément de $]-R_X,R_X[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance et :

$$M_X(t)=\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$$

5. Montrer réciproquement que, s'il existe un réel $R>0$ tel que, pour tout $t\in\,]-R,R[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, alors l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $]-R,R[$ et pour tout $t\in\,]-R,R[$, $M_X(t)=\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs strictement positives admettant des moments de tous ordres. On note R_X (respectivement R_Y) le rayon de convergence (supposé strictement positif) associé à la fonction M_X (respectivement M_Y).

6. Montrer que la variable aléatoire $X+Y$ admet des moments de tous ordres et :

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y),\ M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$$

I.B - Exemples

- λ est un nombre réel fixé.

7. On suppose que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

a) Montrer que Z admet des moments de tous ordres.

b) Calculer la fonction génératrice des moments de Z. En déduire les valeurs de $m_1(Z)$ et $m_2(Z)$.

8. Soit n un entier naturel non nul. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre λ/n. On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et on pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

a) Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire S_n.

b) Pour $t \in \mathbb{C}$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_{S_n}(t)$.

c) Comparer avec les résultats de la question 8.

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y_n = \frac{1}{n} U_n$.

a) Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y_n.

b) Pour $t \in \mathbb{C}$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_{Y_n}(t)$.

Loi faible des grands nombres

Exercice 12 *(d'après* `CCINP-1 2020 - MP`*)*

- Dans cette partie, $(T_{n,N})_{n \geqslant 1, N \geqslant 2}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et vérifiant :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall N \geqslant 2,\ T_{n,N}(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

avec $\mathbb{P}\big(\{T_{n,N} = 0\}\big) = \mathbb{P}\big(\{T_{n,N} = 1\}\big) = \dfrac{1}{N}$ et $\mathbb{P}\big(\{T_{n,N} = 2\}\big) = 1 - \dfrac{2}{N}$.

- Soit $N \geqslant 2$ fixé. On pose :

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n,N}}{3^n}$$

- On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que X_N admet une espérance et une variance et donner leur valeur en fonction de N.

2. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geqslant \varepsilon) = 0$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer :

$$\mathbb{P}\big(\{|X_N - 1| \geqslant \varepsilon\}\big) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{|X_N - 1| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0$$