Feuille d'exercices n°11 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

- On lance indéfiniment un dé à 6 faces.
  Les lancers sont indépendants et le dé n'est pas pipé.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale à la valeur obtenue au $k^{\text{ème}}$ lancer.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle fonction de répartition de X et on note F_X :

$$F_X \quad : \quad \begin{array}{ccc} x & \mapsto & \mathbb{P}\big(\{X \leqslant x\}\big) \\ \mathbb{R} & \to & [0,1] \end{array}$$

1. Déterminer la loi de X_k et la fonction de répartition F associée à X_k.

2. On note Z_n la valeur maximale obtenue au bout de n lancers.
Déterminer la fonction de répartition F_n de Z_n en fonction de F.

3. Déterminer la limite de (F_n) lorsque n tend vers l'infini.
La convergence est-elle uniforme ?

4. On note Y_n la valeur minimale obtenue au bout de n lancers.
Déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 2

- On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
- Soit X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur :
  × le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux fois face.
  × -1 dans le cas où on n'obtient jamais deux fois face.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3

- On effectue une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
- On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

1. Déterminer la loi de X_n.

2. Détrerminer l'espérance de X_n.

3. On note Y_n le rang du premier tirage à l'issue duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois.
Donner la loi de Y_2 puis celle de Y_3.

Exercice 4

- On considère un jeu dans lequel le joueur doit répondre à une infinité de questions numérotées et indépendantes.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note p_k la probabilité de répondre juste à la $k^{\text{ème}}$ question, et $r_k = p_1 \times \cdots \times p_k$.

1. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses avant le premier échec.
Déterminer la loi de X.

2. Montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum r_n$ converge.
Montrer qu'on a alors $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} r_n$.

3. Déterminer l'espérance de X dans les cas suivants :

a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \dfrac{1}{2}$,

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \dfrac{1}{k}$,

c) $p_1 = 1$ et $\forall k \geqslant 2$, $p_k = 1 - \dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 5

- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big)$.

2. On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise et on note X_N le plus grand des numéros tirés.

  a) Calculer $\mathbb{E}(X_N)$ sans simplifier l'expression.

  b) Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(X_N)$.

Exercice 6

- On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue n tirages successifs sans remise.
- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
  - × on note X_k la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la boule tirée à la $k^{\text{ème}}$ étape.
  - × on dit qu'il y a un pic à la $k^{\text{ème}}$ étape si $X_k > \max\ \big(X_1, \dots, X_{k-1}\big)$.
  - × on note T_k la variable indicatrice de l'événement : il y a un pic au $k^{\text{ème}}$ tirage.
    (T_k prend la valeur 1 s'il y a un pic au $k^{\text{ème}}$ tirage et la valeur 0 sinon)

  On convient qu'il y a toujours un pic au premier tirage.
- On note S_n le nombre de pics au cours des n tirages.

1. Déterminer $\mathbb{P}\big(\{S_n = 1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{S_n = n\}\big)$.

2. Déterminer la loi de T_k.

3. Donner l'espérance de S_n.

Exercice 7

- Soit X une variable aléatoire telle que : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

1. Démontrer que $\mathbb{P}\big(\{X \geqslant \lambda + 1\}\big) \leqslant \lambda$

2. Démontrer : $\mathbb{P}\left(\left\{X \leqslant \dfrac{\lambda}{3}\right\}\right) \leqslant \dfrac{9}{4\lambda}$.

Exercice 8

1. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^n}$ pour $n = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $p_k = \dbinom{n+k-1}{k}\, p^n\, q^k$ avec $p \in\,]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
Montrer que la suite (p_k) définit une probabilité sur $\mathbb{N}$.

3. On définit la loi d'une variable aléatoire X par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = p_k$$

Déterminer la fonction génératrice de X.

4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 9

- Soit X une variable aléatoire telle que : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.
- On définit Y de la façon suivante :
  - × si la valeur prise par X est paire, $Y = X/2$,
  - × si la valeur prise par X est impaire, $Y = 0$.

1. Donner la loi de Y.

2. Déterminer l'espérance de Y.

3. Déterminer la variance de Y.

Exercice 10

- Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- On suppose que X est d'espérance finie.

1. Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{X}$ est d'espérance finie.

2. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$.
Montrer : $\dfrac{1}{\mathbb{E}(X)} \leqslant \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

3. Montrer cette inégalité dans le cas général.

Fonction génératrice (des probabilités)

Exercice 11 *(d'après* `CCINP-1 2019 - MP`*)*
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$, la fonction génératrice de X est :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, t^n$$

1. Démontrer que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer :

$$\forall t \in\,]-1,1[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t)$$

On utilisera deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

3. Un sac contient quatre boules :

- × une boule numérotée 0,
- × deux boules numérotées 1,
- × et une boule numérotée 2.

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.

Déterminer pour tout $t \in\,]-1,1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

Exercice 12 *(d'après* `Centrale 1 2019 - PSI`*)*

- On dispose d'un stock infini de boules noires et blanches. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.
- On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :
  - × on tire au hasard une boule de l'urne ;
  - × on replace dans l'urne la boule tirée ;
  - × on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.
- On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires par $X_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, X_n donne le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages.
- On note g_n la fonction génératrice de la variable X_n.
  On rappelle que $g_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\, t^k$.

1. Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3 puis les fonctions g_1, g_2 et g_3.

2. Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Établir :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = \frac{k-1}{n+1}\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k-1\}\big) + \frac{n+1-k}{n+1}\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)$$

3. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout réel t :

$$g_n(t) = \frac{t^2 - t}{n+1}\, g'_{n-1}(t) + g_{n-1}(t)$$

4. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t :

$$g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k$$

5. Identifier la loi de X_n et donner son espérance.

Exercice 13 *(d'après* `Centrale 1 2020 - PSI`*)*

- On considère un processus industriel automatisé au cours duquel une tâche répétitive est effectuée à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant n. On admet que le système parvient à corriger ces erreurs et à maintenir son fonctionnement si le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant n, noté $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, reste inférieur à une quantité de la forme amn où $a > 1$ est une constante fixée et m est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On est donc amené à estimer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{S_n > nam\}\big)$, dans le but de montrer qu'elle tend vers 0 très rapidement lorsque n tend vers l'infini.
- Dans la première partie, on étudie le cas particulier où les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $1/2$. Dans la deuxième partie, on démontre partiellement le théorème de Perron-Frobenius, qui permet, dans la troisième, d'étudier le cas où les variables aléatoires X_n forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire où le nombre d'erreurs enregistrées à l'instant $n+1$ dépend uniquement de celui enregistré à l'instant n.

I. Cas de la loi de Poisson

- Dans cette partie, on étudie le modèle élémentaire où la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du nombre d'erreurs aux instants successifs est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre $1/2$. L'objectif de cette partie est de donner un équivalent de $\mathbb{P}\big(\{S_n > n\}\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$, afin de s'assurer que celle-ci converge vers 0 avec une vitesse de convergence exponentielle.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et G_{X_n} la fonction génératrice de X_n.

I.A Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

2. Expliciter le calcul de la fonction génératrice G_{X_1} de la v.a. X_1.

3. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{S_n}(t) = \big(G_{X_1}(t)\big)^n$.

4. Montrer que la variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

I.B

5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n!\left(\frac{2}{n}\right)^n \mathbb{P}\big(\{S_n > n\}\big) = \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!\,n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k = \frac{n!\,n^k}{(n+k)!} \leqslant 1$$

7. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$, où, pour tout $k \in N^*$, la fonction u_k est définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$u_k : x \mapsto (1+kx)^{-k}(1/2)^k$$

est normalement convergente sur $[0,+\infty[$.

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge et :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

9. En déduire :

$$\mathbb{P}\big(\{S_n > n\}\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-n/2}}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

10. À l'aide de la formule de Stirling, en déduire qu'il existe un réel $\alpha \in\,]0,1[$ tel que $\mathbb{P}\big(\{S_n > n\}\big) = \underset{n\to+\infty}{O}(\alpha^n)$.

Fonction génératrice des moments

Exercice 14 *(d'après* `CCINP 2018 - PSI`*)*

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ cette espérance.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
- Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[-1,1]$.
- On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbb{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

1. On ne suppose pas X centrée dans cette question.
Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

3. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|X| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big(|X|\big)}{\alpha}$$

4. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\big) \leqslant \frac{\big(\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}$$

Majoration de $\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$

5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}\, a^{-1} + \frac{1+x}{2}\, a - a^x$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1,1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

6. En déduire :

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1,1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$$

7. En déduire :

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant \mathrm{ch}(t)$$

8. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$$

En déduire :

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$$

Majoration de $\mathbb{P}\big(\,\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}\,\big)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

9. Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{ccc} t & \mapsto & \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}} \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

10. En déduire que $\mathbb{P}\big(\,\{S_n \geqslant \varepsilon\}\,\big) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis :

$$\mathbb{P}\big(\,\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}\,\big) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 15 *(d'après* `CCINP-1 2020 - MP`*)*

- Dans cette partie, $(T_{n,N})_{n\geqslant 1, N\geqslant 2}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et vérifiant : $\forall n \geqslant 1,\ \forall N \geqslant 2,\ T_{n,N}(\Omega) = \{0;1;2\}$
  avec $\mathbb{P}\big(\{T_{n,N}=0\}\big) = \mathbb{P}\big(\{T_{n,N}=1\}\big) = \dfrac{1}{N}$ et $\mathbb{P}\big(\{T_{n,N}=2\}\big) = 1 - \dfrac{2}{N}$.
- Soit $N \geqslant 2$ fixé. On pose : $X_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{T_{n,N}}{3^n}$.
- On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que X_N admet une espérance et une variance et donner leur valeur en fonction de N.

2. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geqslant \varepsilon) = 0$.

3. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer :

$$\mathbb{P}\big(\{|X_N - 1| \geqslant \varepsilon\}\big) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{|X_N - 1| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0$.

Exercice 16 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Rappler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de mêm loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

Prouver : $\forall a \in \,]0, +\infty[,\ \mathbb{P}\left(\left\{\left|\dfrac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right\}\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Y_1)}{n\,a^2}$.

3. **Application**

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Écrits de concours - E3A

Exercice 17 *(d'après* `E3A 2020 - PSI`*)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = \prod\limits_{i=1}^{n} \big(X - a_{i,i}\big)$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

a) Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

b) Exprimer l'évènement $\{X_1 = X_2\}$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

c) Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}$$

On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

Exercice 18 *(d'après* `E3A 2019 - PSI1`*)*

Soit X_1 une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire X_2 par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X_2(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1(\omega) = 0 \text{ ou si } X_1(\omega) \text{ est impair} \\ \dfrac{X_1(\omega)}{2} & \text{si } X_1(\omega) \text{ est pair et non nul} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_2 et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 19 *(d'après* `E3A 2024 - PSI`*)*

Soit n un entier naturel non nul. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. **Calcul d'une somme**

a) Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.

b) En remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n\,(1+X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.

c) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

3. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$.

On utilisera la question *1.c)* pour simplifier le résultat.

4. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est inversible}\}$.

Exercice 20 *(d'après* `E3A 2024 - PC`*)*

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. **Questions de cours**

a) Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.

b) Écrire les développements en séries entières des fonctions sh et ch ainsi que leurs domaines de validité.

c) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

a) Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la loi de Y et son espérance.

On donnera les résultats en utilisant les fonctions exp, sh, et ch.

3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\}, \text{ avec } \mathbb{P}\big(\ \{Z = 1\}\ \big) = \mathbb{P}\big(\ \{Z = 2\}\ \big) = \frac{1}{2}$$

On pose $T = XZ$.

a) Préciser $T(\Omega)$.

b) Soit k un entier naturel.

En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}\big(\ \{T = k\}\ \big)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer la loi de T.

d) Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?

On donnera le résultat en utilisant les fonctions exp, sh, et ch.

Exercice 21 *(d'après* `E3A 2023 - MP`*)*

Soit n un entier naturel non nul.

Questions de cours

Soit p une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.

1. Donner, en fonction de r, une matrice W de p dans une base adaptée.

2. Donner les spectres possibles de W.

3. Comparer $\mathrm{rg}(W)$ et $\mathrm{tr}(W)$.

4. Calculer $\det(W)$.

* * * * *

On considère la famille $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω, $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à :

$$\Delta(\omega) = \mathrm{diag}\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right)$$

5. On note T la variable aléatoire $\mathrm{tr}(M)$.

- ***a)*** Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.
- ***b)*** Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.

6. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \mathrm{rg}(M)$.

7. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.

- ***a)*** Déterminer $D(\Omega)$.
- ***b)*** Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.

8. On se propose de déterminer la probabilité de l'événement Z défini par :

« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »

- ***a)*** On note V l'événement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbb{P}(V)$.
- ***b)*** On suppose n impair. Déterminer $\mathbb{P}(Z)$.
- ***c)*** On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $\mathbb{P}\big(\ \{T = r\}\ \big)$. En déduire $\mathbb{P}(Z)$.

9. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = (a_{ij}(\omega))_{[\![1,n]\!]^2}$.

- ***a)*** Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij}(\omega)$.
- ***b)*** Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.
- ***c)*** Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
- ***d)*** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.
- ***e)*** Pour tout ω dans Ω, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.
- ***f)*** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.

Exercice 22 *(d'après* `E3A 2023 - MPI`*)*

1. Rappeler la définition d'un événement négligeable et d'un événement presque sûr.

* * * * *

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$.

2. Étude de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- ***a)*** Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
- ***b)*** Démontrer que $\ell \in [0,1[$.
- ***c)*** Soit $q \in [0,1[$. Montrer que si à partir d'un certain rang n_0, on a $u_n \leqslant q$, alors $\ell = 0$.

d) Que peut-on dire de ℓ si la suite (u_n) est décroissante ?

e) Déterminer la valeur de ℓ dans le cas où $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ avec :

× X_0 est constante et égale à 1,

× X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,

× pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de telle sorte que : $\mathbb{P}_{\{X_n=0\}}\big(\ \{X_{n+1} = 1\}\ \big) = 0$ et $\mathbb{P}_{\{X_n=1\}}\big(\ \{X_{n+1} = 1\}\ \big) = u_{n+1}$.

a) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\ \{X_n = 1\}\ \big) = p_n$.

b) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles les deux variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes.

4. On suppose : $\ell = 0$.

a) Soit deux entiers naturels non nuls m et n tels que $m < n$.
Montrer : $\mathbb{P}\big(\{X_m = 0\} \cap \{X_{m+1} = 1\} \cap \ldots \cap \{X_n = 1\}\big) = 0$.

b) Quelle est la probabilité de l'événement $\bigcap\limits_{k=0}^{n} \{X_k = 1\}$?

c) En déduire que la probabilité de l'événement $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 1\}$ est nulle.

d) On définit les variables aléatoires Y et Z par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} \max\ \big\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) = 1\big\} & \textit{s'il existe} \\ -1 & \textit{sinon} \end{cases}$$

et $$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega) & \textit{si la série converge} \\ +\infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

Démontrer : $\mathbb{P}\big(\ \{Y \neq Z\}\ \big) = 0$.

Que peut-on en conclure pour l'événement $\{Y = Z\}$?

Exercice 23 *(d'après* `E3A 2022 - PC`*)*

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$.
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \ldots, n$.

En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au $n^{\text{ème}}$ saut est $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi le premier saut est toujours réussi.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : « le sauteur a réussi son $k^{\text{ème}}$ saut » et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

4. Déterminer $\mathbb{P}\big(\ \{X = 1\}\ \big)$.

5. Justifier que $\{X = 2\} = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}\big(\ \{X = 2\}\ \big)$.

6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'événement $\{X = n\}$ en fonction d'événements du type S_k.

7. Déterminer la loi de X.

8. Vérifier par **le calcul** : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{X = n\}\ \big) = 1$.

9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Exercice 24 *(d'après* `E3A 2020 - MP`*)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) = p\,q^k$$

où $p \in\ ]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.

2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.

3. Calculer $\mathbb{P}\big(\{X = Y\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X < Y\}\big)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

Exercice 25 *(d'après* E3A 2024 - MP*)*

Pour tout réel x, on rappelle que la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

$$k \leqslant x < k+1$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y, la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$$

1. Représenter dans un repère orthonormal la fonction $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

3. Soit k un entier naturel non nul.

Écrire l'événement $\{Y = k\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où j est un entier naturel non nul.

4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 26 *(d'après* E3A 2023 - PSI*)*

Soit n un entier naturel non nul.

On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ p_{ij} = \mathbb{P}\big(\ \{X = i\} \cap \{Y = j\}\ \big) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Déterminer la valeur du réel α.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.

3. Les deux variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$.
En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

5. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{\{X=j\}}\big(\ \{Y = i\}\ \big)$$

Calculer les b_{ij}.

6. Déterminer $\mathrm{rg}(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(B)$.

7. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que $B = CL$.

8. Démontrer que $B^2 = \mathrm{tr}(B)\ B$.

9. Déterminer les valeurs propres de B.
La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 27 *(d'après* `E3A 2023 - PC`*)*

Questions de cours

1. Soit α un réel non nul.
Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$.
En déduire un équivalent de $1-(1-x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0.

2. Soient a et b deux réels avec $a > 0$.
Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

(A) $\mathrm{e}^{b\ \ln(a)}$
(B) $\mathrm{e}^{a\ \ln(b)}$
(C) $\mathrm{e}^{\ln(a)\ \ln(b)}$.

* * * * *

$$\boxed{\text{Soit } n \text{ un entier supérieur ou égal à 2 .}}$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

a) Montrer que la série de terme général u_k est convergente et calculer sa somme.

b) Montrer que la série de terme général a_k est convergente.
On notera S_n sa somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

4. **Étude d'une variable aléatoire**

a) Démontrer que $\forall k \geqslant 1, u_k > 0$.

b) Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on considère la variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k > 0$, $\mathbb{P}\big(\ \{X_n = k\}\ \big) = \lambda u_k$, où λ est un réel. Déterminer λ.

c) Montrer que X_n admet une espérance et que $\mathbb{E}\,(X_n) = S_n$.

Exercice 28 *(d'après* `E3A 2022 - MP`*)*

1. **Questions de cours**

a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression :
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.

c) Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d' une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

* * * * * **

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.

3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}\big(\ \{X_n \leqslant j\}\ \big)$ et prouver : $\mathbb{P}\big(\ \{X_n = j\}\ \big) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}\,(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :
$$\mathbb{E}\,(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}\,(X_n > j)$$

5. Calculer $\mathbb{E}\,(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 29 *(d'après* `E3A 2022 - PSI`*)*

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on ait :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}$$

2. Déterminer le nombre réel α tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \mathbb{P}\big(\ \{X = n\}\ \big) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\ \alpha$$

3. **Espérance et variance de X**

a) Après avoir justifié l'existence, déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ *afin d'introduire un télescopage.*

b) Déterminer $\mathbb{E}(X(X+1))$.

c) En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 30 *(d'après* `E3A 2021 - PSI`*)*

On note S l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $\dfrac{-1}{\gamma}$.

2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$.
Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de γ_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

(1) $\quad y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; $\qquad$ (2) $\quad y_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\,\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$;

(3) $\quad y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les propriétés suivantes :

— X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;

— pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

a) Montrer que X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

b) Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = y_{n-1}\,X_0 + y_n\,X_1$.

d) **Étude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in \mathbb{N}$**

(i) Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

(ii) Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

f) Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Calculer, en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n), la covariance $Cov\,(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires X_p et X_q.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 31 *(d'après* `E3A 2021 - MP`*)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$.
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X.

2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.

3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}\big(\ \{X = n\}\ \big)$ et $\mathbb{P}\big(\ \{Y = n\}\ \big)$.

5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}\big(\ \{S = n\}\ \big)$.

6. **Calculs d'espérances et de variances.**

a) Justifier que la variable aléatoire $X+1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.

b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

c) Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.

d) En déduire la variance de la variable aléatoire Y.

e) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 32 *(d'après* `E3A 2020 - PC`*)*

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \dfrac{1}{2}\, I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n$$

a) On note $F = \operatorname{Vect}\big(I_n, M, M^2\big)$. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k \in F$.
Déterminer la dimension de F et en donner une base.

b) Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

c) Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \dfrac{1}{2} I_n$.
Justifier que $\mathscr{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathscr{B}$.

d) Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}\big(\{X = n+2\}\big) = 3\mathbb{P}\big(\{X = n+1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$$

a) On note $p_n = \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$. Exprimer p_n en fonction de n. En déduire la loi de la variable aléatoire X.

b) Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.