Feuille d'exercices n°5 (bis) : Variables alétoire discrètes - intro

Fonction de répartition

Exercice 1
La fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant t < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

a. Dessiner le graphe de F_X.

b. Sachant que $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$, déterminer la loi de X.

Exercice 2
Soit un réel $p \in]0,1[$.
La fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_X(n) = 1 - (1-p)^n$$

- Donner la loi de X.

Loi de probabilité paramétrée

Exercice 3
Soit Y une v.a.r. telle que :

1) $Y(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \mid k \in [\![1, n]\!] \right\}$

2) $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(\{Y = y\}) = \alpha\, y$.

- Déterminer α pour que l'on ait bien défini une loi de probabilité.

Exercice 4
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = a\, 3^{-k}$$

a. Déterminer a pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.

b. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?

c. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

d. On considère la v.a.r. $Y = X(X-1)$.
Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Loi, espérance et variance de X v.a.r. discrète finie

Exercice 5
Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$.
Si elle est discrète finie, donner la loi de X sous forme de tableau et tracer sa fonction de répartition.

a. X_1 est le nombre de « piles » obtenus en lançant quatre pièces de monnaie.

b. X_2 est le minimum de deux dés à six faces.

c. X_3 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche (on tire sans remise des boules dans une urne contenant 4 boules noires et 2 boules blanches).

d. X_4 est le produit de 4 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

Exercice 6
Pour chacune des variables aléatoires de l'exercice précédent, calculer les moments d'ordre 1, 2 et 3, et donner espérance et variance.

Exercice 7
Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points et celui d'une dame coûte 1 point.
Du paquet on tire simultanément et au hasard 2 cartes.
On désigne par X la v.a.r. discrète égale au total des points marqués.

- Calculer la loi de X, son espérance et son écart type.

Exercice 8
On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

- Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 9
Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de champagne. On fixe un entier $1 \leqslant n \leqslant 25$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de champagne découvertes.

- Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 10
Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'une équipe arrive en retard à la suite d'un appel est $p = 1/4$.

1) Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi.

  a. Reconnaître la loi de probabilité de X.

  b. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2) On considère un ensemble de 8 clients différents, 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés.

  a. Quelle est la loi de M ? L'expliciter sous forme de tableau.

  b. Calculer $\mathbb{E}(M)$.

Loi hypergéométrique

Exercice 11
Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules vertes. On pioche simultanément 6 boules et on note R (resp. V) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues.

- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de R (resp. V).

Exercice 12
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

1) On suppose que les tirages sont sans remise.

  a. Déterminer la loi de B (resp. N).

  b. Calculer $\mathbb{E}(B)$, $\mathbb{V}(B)$ (resp. $\mathbb{E}(N)$, $\mathbb{V}(N)$).

2) Refaire les questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 13
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement avec remise 5 boules. Chaque fois qu'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il perd 3 points. Soit X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.

a. Déterminer la loi de X, puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

b. Exprimer Y en fonction de X.

c. En déduire la loi de Y, puis $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

d. Que deviennent les résultats précédents si le jeu est sans remise ?

Lois discrètes infinies

Exercice 14
On effectue des lancers d'une pièce équilibrée.
On note X le nombre de lancers de pièces nécessaires pour obtenir pile.
Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.

Exercice 15

On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces.

On jette un premier dé et on note sa valeur. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier.

Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.

a. Établir la loi de probabilité de X.

b. Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 16

On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la v.a.r. dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) En utilisant une approximation (que l'on justifiera) calculer les probabilités des événements suivants.

  a. Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon.

  b. Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Exercice 17

Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. Soit X_1 la v.a.r. égale au nombre de voitures se présentant au guichet 1 en une heure.

a. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.

b. Quelle est la proba qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet 1 ?

c. Calculer $\mathbb{P}_{\{N=n\}}(\{X_1 = k\})$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. Et pour $k > n$?

d. Justifier que $\mathbb{P}(\{X_1 = k\}) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{\{N=n\}}(\{X_1 = k\}) \times \mathbb{P}(\{N = n\})$ puis montrer que $\mathbb{P}(\{X_1 = k\}) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\dfrac{1}{10}\right)^k \dfrac{\lambda^k}{k!} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{9}{10}\right)^n \dfrac{\lambda^n}{n!}$.

e. En déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance.

Connaître les caractéristiques des lois usuelles

Exercice 18

Calculer l'espérance et la variance de X dans les cas suivants :

a. $X \sim \mathcal{U}(⟦-5, 10⟧)$ ***b.*** $X \sim \mathcal{B}\left(20, \frac{3}{7}\right)$ ***c.*** $X \sim \mathcal{G}(\pi)$

Transformation d'une v.a.r. X

Exercice 19

Soient $p \in]0,1[$ et X une v.a.r. dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(\{X = -1\}) = \frac{p}{2}, \qquad \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{p}{2}$$

- Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 20

On suppose que X est une v.a.r. dont la loi est donnée par

1) $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2) $\mathbb{P}(\{X = -2\}) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(\{X = -1\}) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{5}$, et $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{2}{5}$.

- Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 21

On suppose que X est une v.a.r. dont la loi est donnée par :

1) $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$

2) $\mathbb{P}(\{X = -1\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{1}{4}$.

- Déterminer la loi de $Y = X^2$ et $Z = \mathrm{e}^X$.

Théorème de transfert

Exercice 22

Soit X une v.a.r. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Déterminer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

(on pourra utiliser la formule : $\forall x \in]-1,1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$*)*

Exercice 23
Soit X une v.a.r. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- Déterminer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 24
Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(n,p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$.

- Déterminer la loi de $Y = n - X$.

Exercice 25
Soit X une v.a.r. suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

- Calculer $\mathbb{E}\left(2^X\right)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Fonction génératrice

Exercice 26
Soit X une variable aléatoire discrète. On définit la *fonction génératrice* G associée à X par :

$$G(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = k\})\ t^k$$

pour tous les réels x tels que la série converge (si convergence il y a).

Déterminer la fonction génératrice de X dans les cas suivants :

a. $X \sim \mathcal{B}(1,p)$ où $p \in \,]0,1[$.

b. $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$.

d. $X \sim \mathcal{G}(p)$ où $p \in \,]0,1[$.

e. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 27 ***(Fonction génératrice d'une variable aléatoire)***
Soient a, b, et N trois entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $N = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs dans cette urne, au hasard et avec remise en procédant de la façon suivante :

× si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'une avant de procéder au tirage suivant ;

× si la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche dans cette urne, et l'on procède au tirage suivant.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Déterminer la loi de Y. Montrer alors que :

$$\forall k \in \llbracket 1, b \rrbracket, \ \mathbb{P}(\{Y = k\}) = \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right)$$

2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ G(x) = \sum_{k \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = k\})\, x^k$$

On dit que G est la fonction génératrice de la variable aléatoire Y.

a) Justifier l'égalité : $G(x) = E\left(x^Y\right)$.

b) Quelle est la valeur de $G(1)$?

c) Exprimer $E(Y)$ en fonction de $G'(1)$.

d) Exprimer la variance de Y en fonction de $G'(1)$, et de $G''(1)$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = 1 + \dfrac{b!}{N^b}(x-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{b} \dfrac{N^{b-k}}{(b-k)!}\, x^k$.

4. En déduire l'espérance de Y.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

5. De même calculer la variance de Y à l'aide de la fonction génératrice G.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

Exercice 28 (ECRICOME 2008)

Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant une probabilité $1/N$ de tomber dans chacune des N cases (et les lancers de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n, égale au nombre de cases non vides après n lancers.

a. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.

b. Donner les lois de T_1 et de T_2.

c. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $\mathbb{P}(\{T_n = 1\})$, $\mathbb{P}(\{T_n = 2\})$ et $\mathbb{P}(\{T_n = n\})$ (en distingant suivant que $n \leqslant N$ ou $n > N$).

d. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\mathbb{P}(\{T_{n+1} = k\}) \;=\; \frac{k}{N}\,\mathbb{P}(\{T_n = k\}) + \frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}(\{T_n = k-1\})$$

e. On considère dans les questions qui suivent le polynôme :

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{T_n = k\})\, x^k$$

Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

f. Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.

g. En utilisant la relation démontrée à la question ***d.***, montrer que

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)\, G_n'(x) + x\, G_n(x)$$

h. Dériver l'expression précédente et en déduire que

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1$$

i. Prouver enfin que : $\quad \mathbb{E}(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right)$

et déterminer la limite de $\mathbb{E}(T_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Utilisation de la formule des probabilités totales

Exercice 29

Une pièce de monnaie est déséquilibrée de telle sorte que la probabilité d'apparition de Pile est égale à $\dfrac{1}{3}$. On effectue avec cette pièce une suite de lancers indépendants et on considère, pour tout $n \geqslant 2$, l'événement :

A_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. Calculer a_2, a_3 et a_4.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^n}$. Calculer a_n, pour tout $n \geqslant 2$.

3. Calculer la probabilité que la séquence Pile-Face n'apparaisse jamais.

4. On considère alors la variable aléatoire X égale au nombre de lancers nécessaires pour qu'apparaisse pour la première fois la séquence Pile-Face. Déterminer la loi de X et son espérance.

5. ***a)*** Soit, pour tout $n \geqslant 2$, B_n l'événement

B_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer, et il n'y a pas eu avant de séquence Face-Pile »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note b_n la probabilité de l'événement B_n.
Calculer b_n, pour tout $n \geqslant 2$.

b) En déduire la probabilité pour que la première séquence Pile-Face apparaisse avant la première séquence Face-Pile.

Exercice 30 *(d'après* `HEC 1982 Maths III`*)*

On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2.

- Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir « face » est p_1 (avec $0 < p_1 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_1 = 1 - p_1$.
- De même, lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir « face » est p_2 (avec $0 < p_2 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_2 = 1 - p_2$.

On effectue une suite de parties de la façon suivante :

× à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce ;

si le résultat est « face », on joue la deuxième partie avec A_1,

si le résultat est « pile », on joue la deuxième partie avec A_2 ;

× ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$:

si on a obtenu « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_1,

si on a obtenu « pile » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_2.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la probabilité d'avoir « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie.

a) Exprimer u_1, puis u_2 en fonction de p_1 et p_2.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite u que l'on calculera.
Dans quels cas a-t-on $u = \dfrac{1}{2}$?

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire, associée à la $n^{\text{ème}}$ partie, qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « face », la valeur 0 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « pile ».

a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 31

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités vers la droite suivant la procédure suivante :

× au départ la puce est en O ;

× si, à un instant, la puce est sur la case d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera soit sur la case d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, soit sur la case $k+2$, avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;

× les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.
Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. On note X_n la v.a.r. égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
Exprimer X_n en fonction de S_n.
En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts qu'il a fallu à la puce pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n au cours des n premiers sauts.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$ et pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$P(\{Y_n = k\}) = \frac{1}{2}\, P(\{Y_{n-1} = k-1\}) + \frac{1}{2}\, P(\{Y_{n-2} = k-1\})$$

c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$

$$E(Y_n) = \frac{1}{2}\, E(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\, E(Y_{n-2}) + 1$$

4. Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = E(Y_n) - na$$

vérifie une relation récurrente linéaire d'ordre 2.
Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n, puis $E(Y_n)$ en fonction de n.

Exercice 32 *(d'après* `ECRICOME 2015`*)*
Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement « on tire une boule noire lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
- B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».

1. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $\mathbb{P}(\{X=1\})$, $\mathbb{P}(\{X=2\})$ et $\mathbb{P}(\{X=3\})$.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

3. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués. On note :

- C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
- C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

6. Démontrer, pour tout entier $j \in [\![1,N]\!]$: $\mathbb{P}_{C_1}(\{Y=j\}) = \dfrac{1}{N}$.

7. Calculer $\mathbb{P}_{C_2}(\{Y=j\})$ pour tout entier $j \in [\![1,N]\!]$.
(On distinguera les cas $j=N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).

8. Démontrer : $\mathbb{P}(\{Y=j\}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1,N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2N} & \text{si } j=N \end{cases}$

9. Calculer l'espérance de Y.

III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1.
On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,..., alors $T=4$ et $U=1$.

10. Préciser les valeurs prises par T.

11. Démontrer soigneusement, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(\{T=k\}) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

12. Montrer que la v.a.r. T admet une espérance que l'on calculera.

13. ***a)*** Calculer $\mathbb{P}(\{U=1\} \cap \{T=2\})$.

b) Calculer $\mathbb{P}(\{U=1\} \cap \{T=k\})$ pour tout entier $k \geqslant 3$.

14. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$.

a) Calculer $\mathbb{P}(\{U=j\} \cap \{T=j+1\})$.

b) Que vaut $\mathbb{P}(\{U=j\} \cap \{T=k\})$ pour tout entier $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$?

15. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?

16. Calculer $\mathbb{P}(\{U=1\})$ puis déterminer la loi de U.

Exercice 33 *(d'après* `EDHEC 2020`*)*
Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Démontrer :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = \begin{cases} \dbinom{k}{i}\, p^i\,(1-p)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

4. ***a)*** Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égale à $[\![0, n]\!]$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}(\,\{Y = 0\}\,) \;=\; \frac{q\,(1-q^n)}{n\,(1-q)}$$

b) Écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(\,\{Y = i\}\,)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

5. ***a)*** Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Démontrer :

$$i\,\binom{k}{i} = k\,\binom{k-1}{i-1}$$

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\,p^i\,q^{k-i}\right)$$

c) En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\,p}{2}$.

6. ***a)*** Établir :

$$\forall n \geqslant 1,\quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k\,(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}\,p^i\,q^{k-i}\right)$$

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2,\quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 34 *(d'après* `EDHEC 2017`*)*

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1.
On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}(\{X_2 = 1\}) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(\{X_2 = 2\}) = \mathbb{P}(\{X_2 = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_2 = 4\}) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3. ***a)*** Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{1}{3}(\mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}))$$

b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \frac{1}{3}$$

d) Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. ***a)*** En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\}) = \frac{1}{3}\,(\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}))$$

b) En déduire une relation entre $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\})$ et $\mathbb{P}(\{X_n = 2\})$.

c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 3\}) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 4\}) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}(\{X_n = 4\}) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) & \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) & \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) & \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) \end{pmatrix}$$

7. ***a)*** Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A$.

b) Établir par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0\ A^n$.

c) En déduire la première ligne de A^n.

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Exercice 35 *(d'après* `ECRICOME 2017`*)*
Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages : $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

2. ***a)*** Déterminer $T_n(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(\{T_n = 1\})$.

c) Montrer : $\mathbb{P}(\{T_n = n\}) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier : $\mathbb{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{S_{k+1} = i\}) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(\{S_k = j\}).$$

7. ***a)*** Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$« \forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}(\{S_k = i\}) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} ».$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

8. ***a)*** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(\{T_n > k\}) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\{T_n > k\})$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de
variables $(T_n)_{n \geqslant 1}$.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{Y = k\}) = \dfrac{k-1}{k!}$.

a) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = k\}) = 1$.

b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\{T_n > k\}) = \frac{1}{k!}$$

Écrits de concours PSI

Exercice 36 *(d'après* `E3A 2020 - PSI`*)*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

   3.1. Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

   3.2. Exprimer l'évènement $(X_1 = X_2)$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

   3.3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

   On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

   Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

Exercice 37 *(d'après* `E3A 2019 - PSI1`*)*
Soit X_1 une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire X_2 par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } X_1(\omega) = 0 \text{ ou si } X_1(\omega) \text{ est impair} \\ \dfrac{X_1(\omega)}{2} \text{ si } X_1(\omega) \text{ est pair et non nul} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_2 et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 38 *(d'après* `CCP 2020 - PSI`*)*
Objectifs
Dans cette **partie**, on donne une application probabiliste de l'étude de la matrice A_n.
Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.
À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.
Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1, 3, 4 et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.

Pour $l \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{k,l}$ l'évènement $(N_k = l)$ et $p_{k,l} = \mathbb{P}(E_{k,l})$ sa probabilité.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$?
2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, l \in [\![0, n]\!]$, déterminer :
$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}),$$
On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.
4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,n-1})$$
et que :
$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j+1}).$$
5. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$Z_k = \frac{1}{n^k}A_n^k Z_0,$$
où A_n est la matrice :
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Exercice 39 *(d'après* `Centrale 2 2021 - PSI`*)*

Loi hypergéométrique

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soient deux entiers naturels A et n tels que $n \leqslant A$ et p un nombre réel compris entre 0 et 1. On suppose $pA \in \mathbb{N}$ et on note $q = 1 - p$.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que X suit la *loi hypergéométrique* de paramètres n, p et A lorsque
$$\begin{cases} X(\Omega) \subset [\![0, n]\!], \\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\dbinom{pA}{k}\dbinom{qA}{n-k}}{\dbinom{A}{n}} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, n]\!]. \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

Premiers résultats

Q 6. Vérifier qu'on a bien défini une loi de probabilité.

Q 7. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$. Calculer l'espérance de X.

On rappelle que, pour tous entiers naturels non nuls k et N, $k\dbinom{N}{k} = N\dbinom{N-1}{k-1}$.

Q 8. Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique. En déduire une expression de la fonction génératrice de X à l'aide d'une fonction hypergéométrique.

Modélisation

On considère deux urnes contenant chacune A boules dont pA sont blanches et qA sont noires. On tire simultanément, de manière équiprobable, n boules dans la première urne. On note Y le nombre de boules blanches obtenues.

On tire également, de manière équiprobable, n boules dans la deuxième urne, mais successivement et avec remise. On note Z le nombre de boules blanches obtenues.

Q 9. Quelle est la loi de la variable Z ?
Donner l'espérance et la variance de Z.

Q 10. Démontrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

Calcul de la variance

On se propose d'utiliser la modélisation du tirage dans la première urne pour retrouver la valeur de l'espérance et pour calculer la variance d'une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, p, A)$.

Pour cela, on numérote de 1 à pA chacune des boules blanches contenues dans la première urne et, pour tout entier naturel $i \in [\![1, pA]\!]$, on pose

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la boule numérotée } i \text{ a été tirée,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 11. Exprimer Y à l'aide des Y_i et retrouver la valeur de l'espérance de Y. La comparer à celle de Z.

Q 12. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant pA$, démontrer que la variable aléatoire Y_iY_j suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

Q 13. En déduire la valeur de la variance de Y. La comparer à celle de Z.

Résultats asymptotiques

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{H}(n, p, A)$. On fixe n et p. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Q 14. Montrer que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$.

Q 15. Interpréter ce résultat en lien avec ceux obtenus pour l'espérance et la variance de Y.

Exercice 40 *(d'après* `Centrale 2019 - PSI`*)*

Un modèle particulier d'urne de Pòlya

On dispose d'un stock infini de boules noires et blanches. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

— on tire au hasard une boule de l'urne ;

— on replace dans l'urne la boule tirée ;

— on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires par $X_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, X_n donne le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages. On note g_n la fonction génératrice de la variable X_n. On rappelle que $g_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = k)\,t^k$.

Q 7. Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3 puis les fonctions g_1, g_2 et g_3.

Q 8. Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Établir que

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n+1} P(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1} P(X_{n-1} = k).$$

Q 9. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout réel t,

$$g_n(t) = \frac{t^2 - t}{n+1}\,g'_{n-1}(t) + g_{n-1}(t)$$

Q 10. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t,

$$g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k.$$

Q 11. Identifier la loi de X_n et donner son espérance.