Feuille d'exercices n°6 (bis) : Variables aléatoires discrètes - intro

Fonction de répartition

Exercice 1

La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$F_X(t) = \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant t < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

a. Dessiner le graphe de F_X.

b. Sachant que $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$, déterminer la loi de X.

Exercice 2

Soit un réel $p \in\,]0, 1[$.

La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_X(n) = \mathbb{P}\big(\{X \leqslant n\}\big) = 1 - (1-p)^n$$

- Donner la loi de X.

Loi de probabilité paramétrée

Exercice 3

Soit Y une variable aléatoire vérifiant :

1) $Y(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \mid k \in [\![1, n]\!] \right\}$

2) $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(\{Y = y\}) = \alpha\, y$.

- Déterminer α pour que l'on ait bien défini une loi de probabilité.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = a\, 3^{-k}$$

a. Déterminer a pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.

b. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?

c. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

d. On considère la variable aléatoire $Y = X(X-1)$.
Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Loi, espérance et variance de X variable aléatoire discrète finie

Exercice 5

Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$.

Si elle est discrète finie, donner la loi de X sous forme de tableau et tracer sa fonction de répartition.

a. X_1 est le nombre de « piles » obtenus en lançant quatre pièces de monnaie.

b. X_2 est le minimum de deux dés à six faces.

c. X_3 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche (on tire sans remise des boules dans une urne contenant 4 boules noires et 2 boules blanches).

d. X_4 est le produit de 4 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

Exercice 6

Pour chacune des variables aléatoires de l'exercice précédent, calculer les moments d'ordre 1, 2 et 3, et donner espérance et variance.

Exercice 7

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

- Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 8

Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points et celui d'une dame coûte 1 point. Du paquet on tire simultanément et au hasard 2 cartes.

On désigne par X la variable aléatoire discrète égale au total des points marqués.

- Calculer la loi de X, son espérance et son écart type.

Exercice 9

Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de champagne. On fixe un entier $1 \leqslant n \leqslant 25$ et on retourne n cases au hasard.

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de champagne découvertes.

- Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 10

Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'une équipe arrive en retard à la suite d'un appel est $p = 1/4$.

1) Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi.

   a. Reconnaître la loi de probabilité de X.

   b. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2) On considère un ensemble de 8 clients différents, 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés.

   a. Quelle est la loi de M ? L'expliciter sous forme de tableau.

   b. Calculer $\mathbb{E}(M)$.

Loi hypergéométrique

Exercice 11

Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules vertes.

On pioche simultanément 6 boules et on note R (resp. V) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues.

- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de R (resp. V).

Exercice 12

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires.

Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

1) On suppose que les tirages sont sans remise.

   a. Déterminer la loi de B (resp. N).

   b. Calculer $\mathbb{E}(B)$, $\mathbb{V}(B)$ (resp. $\mathbb{E}(N)$, $\mathbb{V}(N)$).

2) Refaire les questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 13

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires.

Un joueur tire successivement avec remise 5 boules. Chaque fois qu'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il perd 3 points. Soit X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.

a. Déterminer la loi de X, puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

b. Exprimer Y en fonction de X.

c. En déduire la loi de Y, puis $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

d. Que deviennent les résultats précédents si le jeu est sans remise ?

Lois discrètes infinies

Exercice 14

On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces.

On jette un premier dé et on note sa valeur. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier.

Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.

a. Établir la loi de probabilité de X.

b. Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 15

Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10.

Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres.

Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet 1 en une heure.

a. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.

b. Quelle est la proba qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet 1 ?

c. Calculer $\mathbb{P}_{\{N=n\}}(\{X_1 = k\})$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. Et pour $k > n$?

d. Justifier que $\mathbb{P}(\{X_1 = k\}) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{\{N=n\}}(\{X_1 = k\}) \times \mathbb{P}(\{N = n\})$ puis montrer : $\mathbb{P}(\{X_1 = k\}) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\frac{1}{10}\right)^k \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!}$.

e. En déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance.

Exercice 16

On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes.

On appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) En utilisant une approximation (que l'on justifiera) calculer les probabilités des événements suivants.

- ***a.*** Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon.
- ***b.*** Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Exercice 17

On effectue des lancers d'une pièce équilibrée.

On note X le nombre de lancers de pièces nécessaires pour obtenir pile.

Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.

Connaître les caractéristiques des lois usuelles

Exercice 18

Calculer l'espérance et la variance de X dans les cas suivants :

a. $X \sim \mathcal{U}(\llbracket -5, 10 \rrbracket)$ ***b.*** $X \sim \mathcal{B}\left(20, \frac{3}{7}\right)$ ***c.*** $X \sim \mathcal{G}(\pi)$

Transformation d'une variable aléatoire X

Exercice 19

Soient $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(\{X = -1\}) = \frac{p}{2}, \qquad \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{p}{2}$$

- Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 20

On suppose que X est une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

1) $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2) $\mathbb{P}(\{X = -2\}) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(\{X = -1\}) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{5}$, et $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{2}{5}$.

- Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 21

On suppose que X est une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

1) $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$

2) $\mathbb{P}\big(\{X = -1\}\big) = \dfrac{1}{4}$, $\mathbb{P}\big(\{X = 1\}\big) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \dfrac{1}{4}$.

- Déterminer la loi de $Y = X^2$ et $Z = \mathrm{e}^X$.

Théorème de transfert

Exercice 22

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Déterminer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

(on pourra utiliser la formule : $\forall x \in]-1, 1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$*)*

Exercice 23

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- Déterminer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 24

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

- Déterminer la loi de $Y = n - X$.

Exercice 25

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

- Calculer $\mathbb{E}\left(2^X\right)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Fonction génératrice

Exercice 26

Soit X une variable aléatoire discrète. On définit la *fonction génératrice* G associée à X par :

$$G(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = k\})\ t^k$$

pour tous les réels x tels que la série converge (si convergence il y a).

Déterminer la fonction génératrice de X dans les cas suivants :

a. $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ où $p \in]0, 1[$.

b. $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

d. $X \sim \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

e. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 27 `(E3A 2024 - MPI) et ...(ECRICOME 2008)`

Question de cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n, de a, de b et de u_1.

b) Préciser le comportement de u à l'infini.

* * * * *

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$.

Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.

Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.

On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.

3. Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geqslant 2$.

4. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}\big(\ \{T_n = 1\}\ \big)$ et $\mathbb{P}\big(\ \{T_n = 2\}\ \big)$.

5. Calculer $\mathbb{P}\big(\ \{T_n = n\}\ \big)$.
On pourra distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.

6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\big(\ \{T_{n+1} = k\}\ \big) = \frac{k}{N}\mathbb{P}\big(\ \{T_n = k\}\ \big) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}\big(\ \{T_n = k-1\}\ \big)$$

7. On considère dans cette question la fonction génératrice :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{T_n = k\}\ \big)x^k$$

a) Montrer que $G_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\ \{T_n = k\}\ \big)x^k$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + xG_n(x)$$

c) En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbb{E}\left(T_{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left(T_n\right) + 1$$

d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left(T_n\right)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

e) Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ cas est pleine, 0 sinon.

Exercice 28 ***(Fonction génératrice d'une variable aléatoire)***

Soient a, b, et N trois entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $N = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires.

On effectue des tirages successifs dans cette urne, au hasard et avec remise en procédant de la façon suivante :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'une avant de procéder au tirage suivant ;
- si la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche dans cette urne, et l'on procède au tirage suivant.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Déterminer la loi de Y. Montrer alors que :

$$\forall k \in [\![1, b]\!],\ \mathbb{P}(\{Y = k\}) = \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right)$$

2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \sum_{k \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y = k\})\, x^k$$

On dit que G est la fonction génératrice de la variable aléatoire Y.

a) Justifier l'égalité : $G(x) = \mathbb{E}\left(x^Y\right)$.

b) Quelle est la valeur de $G(1)$?

c) Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $G'(1)$.

d) Exprimer la variance de Y en fonction de $G'(1)$, et de $G''(1)$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = 1 + \dfrac{b!}{N^b}(x-1)\sum\limits_{k=0}^{b} \dfrac{N^{b-k}}{(b-k)!}\, x^k$.

4. En déduire l'espérance de Y.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

5. De même calculer la variance de Y à l'aide de la fonction génératrice G.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

Utilisation de la formule des probabilités totales

Exercice 29

Une pièce de monnaie est déséquilibrée de telle sorte que la probabilité d'apparition de Pile est égale à $\dfrac{1}{3}$.

On effectue avec cette pièce une suite de lancers indépendants et on considère, pour tout $n \geqslant 2$, l'événement :

A_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. Calculer a_2, a_3 et a_4.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^n}$. Calculer a_n, pour tout $n \geqslant 2$.

3. Calculer la probabilité que la séquence Pile-Face n'apparaisse jamais.

4. On considère alors la variable aléatoire X égale au nombre de lancers nécessaires pour qu'apparaisse pour la première fois la séquence Pile-Face. Déterminer la loi de X et son espérance.

5. ***a)*** Soit, pour tout $n \geqslant 2$, B_n l'événement

B_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer, et il n'y a pas eu avant de séquence Face-Pile »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note b_n la probabilité de l'événement B_n.
Calculer b_n, pour tout $n \geqslant 2$.

b) En déduire la probabilité pour que la première séquence Pile-Face apparaisse avant la première séquence Face-Pile.

Exercice 30 *(d'après* `HEC 1982 Maths III`*)*

On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2.

- Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir « face » est p_1 (avec $0 < p_1 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_1 = 1 - p_1$.
- De même, lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir « face » est p_2 (avec $0 < p_2 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_2 = 1 - p_2$.

On effectue une suite de parties de la façon suivante :

× à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce ;
  si le résultat est « face », on joue la deuxième partie avec A_1,
  si le résultat est « pile », on joue la deuxième partie avec A_2 ;

× ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$:
  si on a obtenu « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_1,
  si on a obtenu « pile » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_2.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la probabilité d'avoir « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie.

a) Exprimer u_1, puis u_2 en fonction de p_1 et p_2.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite u que l'on calculera.
Dans quels cas a-t-on $u = \dfrac{1}{2}$?

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire, associée à la $n^{\text{ème}}$ partie, qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « face », la valeur 0 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « pile ».

a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 31

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités vers la droite suivant la procédure suivante :

- au départ la puce est en O ;
- si, à un instant, la puce est sur la case d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera soit sur la case d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, soit sur la case $k+2$, avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
- les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.

Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts.

Exprimer X_n en fonction de S_n.
En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts qu'il a fallu à la puce pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n au cours des n premiers sauts.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$ et pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$P(\{Y_n = k\}) = \frac{1}{2} P(\{Y_{n-1} = k-1\}) + \frac{1}{2} P(\{Y_{n-2} = k-1\})$$

c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

4. Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na$$

vérifie une relation récurrente linéaire d'ordre 2.
Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n, puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de n.

Écrits de concours

Exercice 32 *(d'après* `E3A 2020 - PSI`*)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

a) Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

b) Exprimer l'évènement $\{X_1 = X_2\}$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

c) Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}$$

On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

Exercice 33 *(d'après* `E3A 2019 - PSI1`*)*

Soit X_1 une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire X_2 par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X_2(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1(\omega) = 0 \text{ ou si } X_1(\omega) \text{ est impair} \\ \dfrac{X_1(\omega)}{2} & \text{si } X_1(\omega) \text{ est pair et non nul} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_2 et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 34 *(d'après* `E3A 2024 - PSI`*)*

Soit n un entier naturel non nul. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. **Calcul d'une somme**

a) Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.

b) En remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n\ (1+X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.

c) En déduire une expression simplifiée de $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dbinom{n}{k} \right)^2$.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

3. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$.

On utilisera la question ***1.c)*** pour simplifier le résultat.

4. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est inversible}\}$.

Exercice 35 *(d'après* `E3A 2024 - PC`*)*

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. **Questions de cours**

a) Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.

b) Écrire les développements en séries entières des fonctions sh et ch ainsi que leurs domaines de validité.

c) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

a) Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la loi de Y et son espérance.

On donnera les résultats en utilisant les fonctions exp, sh, et ch.

3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\}, \text{ avec } \mathbb{P}\big(\ \{Z = 1\}\ \big) = \mathbb{P}\big(\ \{Z = 2\}\ \big) = \frac{1}{2}$$

On pose $T = XZ$.

a) Préciser $T(\Omega)$.

b) Soit k un entier naturel.

En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}\big(\ \{T = k\}\ \big)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer la loi de T.

d) Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?

On donnera le résultat en utilisant les fonctions exp, sh, et ch.

Exercice 36 *(d'après* `E3A 2023 - MP`*)*

Soit n un entier naturel non nul.

Questions de cours

Soit p une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.

1. Donner, en fonction de r, une matrice W de p dans une base adaptée.

2. Donner les spectres possibles de W.

3. Comparer $\mathrm{rg}(W)$ et $\mathrm{tr}(W)$.

4. Calculer $\det(W)$.

* * * * *

On considère la famille $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω, $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à :

$$\Delta(\omega) = \mathrm{diag}\left(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\right)$$

5. On note T la variable aléatoire $\mathrm{tr}(M)$.

a) Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.

b) Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.

6. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \mathrm{rg}(M)$.

7. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.

a) Déterminer $D(\Omega)$.

b) Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.

8. On se propose de déterminer la probabilité de l'événement Z défini par :

« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »

a) On note V l'événement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbb{P}(V)$.

b) On suppose n impair. Déterminer $\mathbb{P}(Z)$.

c) On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $\mathbb{P}\big(\ \{T = r\}\ \big)$. En déduire $\mathbb{P}(Z)$.

9. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = (a_{ij}(\omega))_{[\![1,n]\!]^2}$.

a) Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij}(\omega)$.

b) Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.

c) Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

d) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.

e) Pour tout ω dans Ω, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.

f) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.

Exercice 37 *(d'après* `E3A 2023 - MPI`*)*

1. Rappeler la définition d'un événement négligeable et d'un événement presque sûr.

* * * * *

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$.

2. Étude de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

b) Démontrer que $\ell \in [0,1[$.

c) Soit $q \in [0,1[$. Montrer que si à partir d'un certain rang n_0, on a $u_n \leqslant q$, alors $\ell = 0$.

d) Que peut-on dire de ℓ si la suite (u_n) est décroissante ?

e) Déterminer la valeur de ℓ dans le cas où $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ avec :

× X_0 est constante et égale à 1,

× X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,

× pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de telle sorte que : $\mathbb{P}_{\{X_n=0\}}\big(\ \{X_{n+1} = 1\}\ \big) = 0$ et $\mathbb{P}_{\{X_n=1\}}\big(\ \{X_{n+1} = 1\}\ \big) = u_{n+1}$.

a) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\ \{X_n = 1\}\ \big) = p_n$.

b) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles les deux variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes.

4. On suppose : $\ell = 0$.

a) Soit deux entiers naturels non nuls m et n tels que $m < n$.
Montrer : $\mathbb{P}\big(\{X_m = 0\} \cap \{X_{m+1} = 1\} \cap \ldots \cap \{X_n = 1\}\big) = 0$.

b) Quelle est la probabilité de l'événement $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} \{X_k = 1\}$?

c) En déduire que la probabilité de l'événement $A = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 1\}$ est nulle.

d) On définit les variables aléatoires Y et Z par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} \max\ \big\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) = 1\big\} & \textit{s'il existe} \\ -1 & \textit{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega) & \textit{si la série converge} \\ +\infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

Démontrer : $\mathbb{P}\big(\ \{Y \neq Z\}\ \big) = 0$.

Que peut-on en conclure pour l'événement $\{Y = Z\}$?

Exercice 38 *(d'après* `E3A 2022 - PC`*)*

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \ldots, n$.

En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au $n^{\text{ème}}$ saut est $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi le premier saut est toujours réussi.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : « le sauteur a réussi son $k^{\text{ème}}$ saut » et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

4. Déterminer $\mathbb{P}\big(\ \{X = 1\}\ \big)$.

5. Justifier que $\{X = 2\} = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}\big(\ \{X = 2\}\ \big)$.

6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'événement $\{X = n\}$ en fonction d'événements du type S_k.

7. Déterminer la loi de X.

8. Vérifier par **le calcul** : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{X = n\}\ \big) = 1$.

9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Exercice 39 *(d'après* `E3A 2020 - MP`*)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) = p\, q^k$$

où $p \in\ ]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.

2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.

3. Calculer $\mathbb{P}\big(\{X = Y\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X < Y\}\big)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

Exercice 40 *(d'après* `E3A 2024 - MP`*)*

Pour tout réel x, on rappelle que la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

$$k \leqslant x < k+1$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y, la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$$

1. Représenter dans un repère orthonormal la fonction $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

3. Soit k un entier naturel non nul.

Écrire l'événement $\{Y = k\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où j est un entier naturel non nul.

4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 41 *(d'après* `E3A 2023 - PSI`*)*

Soit n un entier naturel non nul.

On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ p_{ij} = \mathbb{P}\big(\ \{X = i\} \cap \{Y = j\}\ \big) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Déterminer la valeur du réel α.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.

3. Les deux variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$.
En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

5. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{\{X=j\}}\big(\ \{Y = i\}\ \big)$$

Calculer les b_{ij}.

6. Déterminer $\mathrm{rg}(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(B)$.

7. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que $B = CL$.

8. Démontrer que $B^2 = \mathrm{tr}(B)\ B$.

9. Déterminer les valeurs propres de B.
La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 42 *(d'après* `E3A 2023 - PC`*)*

Questions de cours

1. Soit α un réel non nul.

Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$.

En déduire un équivalent de $1-(1-x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0.

2. Soient a et b deux réels avec $a > 0$.
Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

(A) $\mathrm{e}^{b\ \ln(a)}$

(B) $\mathrm{e}^{a\ \ln(b)}$

(C) $\mathrm{e}^{\ln(a)\ \ln(b)}$.

* * * * *

$\boxed{\text{Soit } n \text{ un entier supérieur ou égal à 2 .}}$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

a) Montrer que la série de terme général u_k est convergente et calculer sa somme.

b) Montrer que la série de terme général a_k est convergente.

On notera S_n sa somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

4. **Étude d'une variable aléatoire**

a) Démontrer que $\forall k \geqslant 1, u_k > 0$.

b) Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on considère la variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k > 0$, $\mathbb{P}\big(\ \{X_n = k\}\ \big) = \lambda u_k$, où λ est un réel. Déterminer λ.

c) Montrer que X_n admet une espérance et que $\mathbb{E}\left(X_n\right) = S_n$.

Exercice 43 *(d'après* `E3A 2022 - MP`*)*

1. **Questions de cours**

a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.

c) Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d' une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

* * * * * *

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.

3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}\big(\ \{X_n \leqslant j\}\ \big)$ et prouver : $\mathbb{P}\big(\ \{X_n = j\}\ \big) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}\left(X_n\right)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(X_n > j\right)$$

5. Calculer $\mathbb{E}\left(X_n\right)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 44 *(d'après* `E3A 2022 - PSI`*)*

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on ait :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}$$

2. Déterminer le nombre réel α tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \mathbb{P}\big(\ \{X = n\}\ \big) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\ \alpha$$

3. **Espérance et variance de X**

a) Après avoir justifié l'existence, déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ *afin d'introduire un télescopage.*

b) Déterminer $\mathbb{E}(X(X+1))$.

c) En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 45 *(d'après* `E3A 2021 - PSI`*)*

On note S l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $\dfrac{-1}{\gamma}$.

2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$.
Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de γ_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

(1) $\quad y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; $\qquad$ (2) $\quad y_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$;

(3) $\quad y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les propriétés suivantes :

— X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;

— pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

a) Montrer que X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

b) Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = y_{n-1}\,X_0 + y_n\,X_1$.

d) **Étude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in \mathbb{N}$**

(i) Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

(ii) Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

f) Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Calculer, en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n), la covariance $Cov\,(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires X_p et X_q.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 46 *(d'après* `E3A 2021 - MP`*)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$.
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X.

2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.

3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}\big(\ \{X = n\}\ \big)$ et $\mathbb{P}\big(\ \{Y = n\}\ \big)$.

5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}\big(\ \{S = n\}\ \big)$.

6. **Calculs d'espérances et de variances.**

a) Justifier que la variable aléatoire $X+1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.

b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

c) Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.

d) En déduire la variance de la variable aléatoire Y.

e) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 47 *(d'après* `E3A 2020 - PC`*)*

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \dfrac{1}{2} I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n$$

a) On note $F = \operatorname{Vect}\left(I_n, M, M^2\right)$. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Déterminer la dimension de F et en donner une base.

b) Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

c) Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \dfrac{1}{2} I_n$.
Justifier que $\mathscr{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathscr{B}$.

d) Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}\big(\{X = n+2\}\big) = 3\mathbb{P}\big(\{X = n+1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$$

a) On note $p_n = \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$. Exprimer p_n en fonction de n. En déduire la loi de la variable aléatoire X.

b) Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.