Feuille d'exercices n°5 (bis) : Variables alétoire discrètes - intro

Exercice 29

Une pièce de monnaie est déséquilibrée de telle sorte que la probabilité d'apparition de Pile est égale à $\frac{1}{3}$. On effectue avec cette pièce une suite de lancers indépendants et on considère, pour tout $n \geqslant 2$, l'événement :

A_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. Calculer a_2, a_3 et a_4.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^n}$. Calculer a_n, pour tout $n \geqslant 2$.

3. Calculer la probabilité que la séquence Pile-Face n'apparaisse jamais.

4. On considère alors la variable aléatoire X égale au nombre de lancers nécessaires pour qu'apparaisse pour la première fois la séquence Pile-Face. Déterminer la loi de X et son espérance.

5. *a)* Soit, pour tout $n \geqslant 2$, B_n l'événement :

B_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer, et il n'y a pas eu avant de séquence Face-Pile »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note b_n la probabilité de l'événement B_n.
Calculer b_n, pour tout $n \geqslant 2$.

b) En déduire la probabilité pour que la première séquence Pile-Face apparaisse avant la première séquence Face-Pile.

Démonstration.
Dans la suite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants.

× P_k : « on obtient Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer »,

× F_k : « on obtient Face au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

1. • $A_2 = P_1 \cap F_2$. Par indépendance des lancers, on en déduit :

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$$

• $A_3 = (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3)$.
Or $F_1 \cap P_2 \cap F_3$ et $P_1 \cap P_2 \cap F_3$ sont incompatibles. En effet :

$$\begin{aligned} & (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cap (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \\ = \ & (P_1 \cap F_1) \cap (P_2 \cap F_3) \\ = \ & \varnothing \cap (P_2 \cap F_3) \\ = \ & \varnothing \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_3) \\ = \ & \mathbb{P}\left((F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3)\right) \\ = \ & \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) && \textit{(par additivité)} \\ = \ & \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(F_3) + \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(F_3) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ = \ & \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ = \ & \frac{2^2}{3^3} + \frac{2}{3^3} = \frac{6}{27} \end{aligned}$$

• L'événement A_4 est réalisé si, et seulement si, l'événement $P_3 \cap F_4$ est réalisé et $P_1 \cap F_2$ n'est pas réalisé.
En considérant le résultat du premier lancer, on obtient :

$$A_4 = (F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_4)\\
=\ &\mathbb{P}\left((F_1\cap P_2\cap P_3\cap F_4)\cup(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)\cup(P_1\cap P_2\cap P_3\cap F_4)\right)\\
=\ &\mathbb{P}\left(F_1\cap P_2\cap P_3\cap F_4\right)+\mathbb{P}\left(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4\right)+\mathbb{P}\left(P_1\cap P_2\cap P_3\cap F_4\right)\\
=\ &\mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}(P_2)\times\mathbb{P}(P_3)\times\mathbb{P}(F_4)\ +\ \mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}(F_2)\times\mathbb{P}(P_3)\times\mathbb{P}(P_4)\\
&+\mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}(P_2)\times\mathbb{P}(P_3)\times\mathbb{P}(F_4)\\
=\ &\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\\
=\ &\frac{2^2}{3^4}+\frac{2^3}{3^4}+\frac{2}{3^4}\ =\ \frac{14}{81}
\end{aligned}$$

Comme précédemment, la deuxième égalité est justifiée par l'incompatibilité des événements considérés *(réunion disjointe)* et la suivante par l'indépendance des lancers.

2. Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente, la formule de l'énoncée est vérifiée aux rangs 2, 3 et 4.
- Dire que A_n est réalisé signifie que la séquence Pile-Face est apparue pour la première fois au $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancers.
  Notons k le rang d'apparition du dernier Face lors des $(n-2)$ premiers lancers (on note $k=0$ si Face n'est pas apparu lors de ces lancers).

  0) Si $k=0$ alors :
  A_n est réalisé $\Leftrightarrow$ $P_1\cap\ldots\cap P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ est réalisé

  1) Si $k=1$ alors :
  A_n est réalisé $\Leftrightarrow$ $F_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ est réalisé

  2) Si $k=2$ alors :
  A_n est réalisé $\Leftrightarrow$ $F_1\cap F_2\cap P_3\cap\ldots\cap P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ est réalisé

  ...

  n-2) Si $k=n-2$ alors :
  A_n est réalisé $\Leftrightarrow$ $F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ est réalisé

- On en déduit que :

$$\begin{aligned}
A_n\ =\ &(P_1\cap\ldots\cap P_{n-1}\cap F_n)\\
\cup\ &\left(\bigcup_{k=1}^{n-2}(F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_k\cap P_{k+1}\cap\ldots\cap P_{n-1}\cap F_n)\right)
\end{aligned}$$

- Par incompatibilité des événements de la réunion et par indépendance des lancers, on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_n)\\
=\ &\mathbb{P}\left(P_1\cap P_2\ldots P_{n-1}\cap F_n\right)\\
&+\sum_{k=1}^{n-2}\mathbb{P}\left(F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_k\cap P_{k+1}\cap\ldots\cap P_{n-1}\cap F_n\right)\\
=\ &\mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}(P_2)\times\ldots\times\mathbb{P}(P_{n-1})\times\mathbb{P}(F_n)\\
&+\sum_{k=1}^{n-2}\mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}(F_2)\times\ldots\times\mathbb{P}(F_k)\times\mathbb{P}(P_{k+1})\times\ldots\times\mathbb{P}(P_{n-1})\times\mathbb{P}(F_n)\\
=\ &\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-(k+1)+1}\times\frac{2}{3}\\
=\ &\frac{2}{3^n}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{2^{k+1}}{3^n}\ =\ \frac{2^1}{3^n}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{2^k}{3^n}\ =\ \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k}{3^n}
\end{aligned}$$

- Calculons a_n. On reconnaît la somme des $n-1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $2\neq 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k}{3^n}\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{k=1}^{n-1}2^k\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{2^1-2^n}{1-2}\\
&= \frac{2^n-2}{3^n}\ =\ \left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

3. Notons J l'événement « la séquence Pile-Face n'apparaît jamais ».
Son événement contraire $\overline{J}$ « la séquence Pile-Face apparaît » s'écrit :

$$\overline{J} \;=\; \bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n$$

Les événements de la suite (A_n) sont deux à deux incompatibles.
En effet, si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (la **première** séquence Pile-Face ne peut apparaître à la fois au $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lancer).
On en déduit par additivité que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{J}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n\right) \;=\; \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) \;=\; \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\,\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad (*) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\,\left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 2\,\frac{1}{3^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \;=\; 1
\end{aligned}$$

$(*)$: les séries $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ de raisons respectives $\frac{2}{3} \in\,]-1,1[$ et $\frac{1}{3} \in\,]-1,1[$ étant convergentes, on peut séparer les deux sommes.

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(J) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\overline{J}\right) \;=\; 1 - 1 \;=\; 0$$

L'événement J est négligeable.

4.
- D'après l'énoncé :
  - × $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
  - × $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{2^n - 2}{3^n}$.
- Par définition, X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\ \mathbb{P}(X = n)$ est absolument convergente. Comme X est à valeurs positives, cela revient à dire que $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\ \mathbb{P}(X = n)$ est convergente.
  ($\forall n \geqslant 2,\ |n\ \mathbb{P}(X = n)| \;=\; |n|\ |\mathbb{P}(X = n)| \;=\; n\ \mathbb{P}(X = n)$)
- Soit $n \geqslant 2$.

$$n\ \mathbb{P}(X = n) \;=\; n\ \frac{2^n - 2}{3^n} \;=\; \frac{2}{3}\ n\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\ n\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

On reconnaît les termes généraux de deux séries géométriques dérivée prémière de raison respective $\frac{2}{3} \in\,]-1,1[$ et $\frac{1}{3} \in\,]-1,1[$.
On en déduit que ces deux séries sont convergentes. Par linéarité des séries convergentes, on en conclut que X admet une espérance, et que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n\ \mathbb{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\ n\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\ n\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{2}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} n\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} n\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2}{3}\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^0\right) - \frac{2}{3}\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^0\right) \\
&= \frac{2}{3}\ \left(\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - 1\right) - \frac{2}{3}\ \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - 1\right) \\
&= \frac{2}{3}\ (9-1) - \frac{2}{3}\ \left(\frac{9}{4} - 1\right) \;=\; \frac{2}{3}\ \left(9 - \frac{9}{4}\right) \;=\; \frac{2}{3}\ \frac{27}{4} \;=\; \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

5. a) Soit $n \geqslant 2$.

- Si B_n est réalisé, alors la séquence Pile-Face est apparue pour la première fois au $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancers, et donc A_n est réalisé (autrement dit, $B_n \subset A_n$).
- Démontrons que si B_n est réalisé, alors les $(n-2)$ premiers lancers sont forcément des Pile.
  Supposons par l'absurde que Face apparaît lors des $n-2$ premiers lancers. On note alors k le rang de la dernière apparition de Face lors de ces lancers.
  L'événement $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1} \cap P_{k+2} \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n$ est alors réalisé puisque cela assure que la première séquence Pile-Face apparaît au rang n.
  Mais alors B_n n'est pas réalisé puisque la séquence Face-Pile est apparue avant la séquence Pile-Face.
  Contradiction !
- On en déduit que : $B_n = P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n$.
  Par indépendance des lancers, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}\left(P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n\right) \\
&= \mathbb{P}(P_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(F_n) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^n}
\end{aligned}$$

b)
- Notons B l'événement « la première séquence Pile-Face apparaît avant la première séquence Face-Pile ». Si cette propriété est vérifiée, cela signifie que B_n est réalisé pour un certain $n \geqslant 2$.
  Autrement dit : $B = \bigcup\limits_{n=2}^{+\infty} B_n$.
- Les événements de la réunion étant deux à deux incompatibles, on en déduit la probabilité recherchée :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B) \\
= \ &\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} B_n\right) \\
= \ &\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) \\
= \ &\sum_{n=2}^{+\infty} b_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
= \ &2\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n && \textit{(par linéarité des sommes de séries convergentes)} \\
= \ &2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1\right) \\
= \ &2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}\right) && \textit{(somme d'une série géométrique convergente)} \\
= \ &3 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Remarque

On remarque que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(P_1)$. En effet, B est réalisé si, et seulement si, on obtient Pile au premier lancer : on obtiendra alors forcément Face par la suite car l'événement « on n'obtient que des Piles au cours d'une infinité de lancers » est négligeable. Et ce Face sera lui-même suivi d'un Pile pour une raison similaire.

□

Exercice 30 *(d'après* `HEC 1982 Maths III`*)*

On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2.

- Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir « face » est p_1 (avec $0 < p_1 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_1 = 1 - p_1$.
- De même, lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir « face » est p_2 (avec $0 < p_2 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_2 = 1 - p_2$.

On effectue une suite de parties de la façon suivante :

× à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce ;

si le résultat est « face », on joue la deuxième partie avec A_1,

si le résultat est « pile », on joue la deuxième partie avec A_2 ;

× ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$:

si on a obtenu « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_1,

si on a obtenu « pile » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_2.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la probabilité d'avoir « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie.

a) Exprimer u_1, puis u_2 en fonction de p_1 et p_2.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite u que l'on calculera.

Dans quels cas a-t-on $u = \dfrac{1}{2}$?

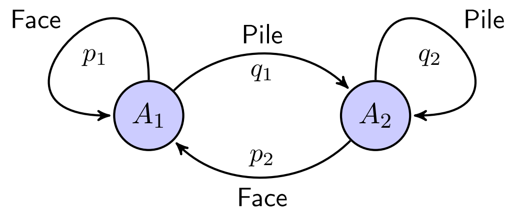
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire, associée à la $n^{\text{ème}}$ partie, qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « face », la valeur 0 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « pile ».

a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

On peut résumer la situation par le graphique suivant.



Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :

× F_n : « obtenir face au $n^{\text{ème}}$ lancer »,

× P_n : « obtenir pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

× U : « on joue le premier lancer avec A_1 »,

× V : « on joue le premier lancer avec A_2 ».

On note que : $P_n = \overline{F_n}$ et $V = \overline{U}$.

D'après les données de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) = p_1, \quad \mathbb{P}_{F_n}(P_{n+1}) = q_1, \quad \mathbb{P}_{P_n}(F_{n+1}) = p_2, \quad \mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) = q_2$$

Et enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}(F_n)$.

1. a) • Lors de la première partie, on choisit une pièce au hasard. Ainsi :

$$\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(V) = \frac{1}{2} \quad (\neq 0)$$

- La famille (U, V) forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_1) &= \mathbb{P}(U \cap F_1) + \mathbb{P}(V \cap F_1) \\
&= \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}_U(F_1) + \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(F_1) \quad \textit{(car } \mathbb{P}(U) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}(V) \neq 0\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \times p_1 + \frac{1}{2} \times p_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}
\end{aligned}$$

- Comme (F_1, P_1) forme un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_2) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) \\
&= \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}(F_2) + \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}_{P_1}(F_2) \quad \textit{(car } \mathbb{P}(F_1) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}(P_1) \neq 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}(F_1) \times p_1 + \mathbb{P}(P_1) \times p_2 \\
&= p_1 \times u_1 + (1 - u_1) \times p_2 = (p_1 - p_2)\, u_1 + p_2
\end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme (F_n, P_n) forme un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_{n+1}) &= \mathbb{P}(F_n \cap F_{n+1}) + \mathbb{P}(P_n \cap F_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(F_n) \times \mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) + \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}_{P_n}(F_{n+1}) \quad \textit{(car } \mathbb{P}(F_n) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}(P_n) \neq 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}(F_n) \times p_1 + \mathbb{P}(P_n) \times p_2 \\
&= p_1 \times u_n + (1 - u_n) \times p_2 = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2
\end{aligned}$$

(même raisonnement que dans la question précédente)
On obtient bien : $u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$.

c) D'après la formule trouvée dans la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :

$$x = (p_1 - p_2)\, x + p_2$$

Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2}$.

Cette écriture est valide car $p_1 + p_2 \neq 1$.
En effet, comme $0 < p_2 < 1$, $-1 < -p_2 < 0$ et, comme $0 < p_1 < 1$:

$$-1 < p_1 - p_2 < 1$$

- On écrit :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= (p_1 - p_2) \times u_n + p_2 \quad (L_1) \\
\lambda &= (p_1 - p_2) \times \lambda + p_2 \quad (L_2)
\end{aligned}$$

et donc $\quad u_{n+1} - \lambda = (p_1 - p_2) \times (u_n - \lambda) \quad (L_1)-(L_2)$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison $p_1 - p_2$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = (p_1 - p_2)^{n-1} \times v_1 = (p_1 - p_2)^{n-1} \times (p_1 - \lambda)$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = v_n + \lambda = (p_1 - p_2)^{n-1} \times (p_1 - \lambda) + \lambda$$

- Or : $-1 < p_1 - p_2 < 1$. Ainsi $(p_1 - p_2)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite :

$$u = \lambda = \frac{p_2}{1 - p_1 + p_2}$$

d) Enfin, on remarque que :

$$\begin{aligned}
u = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{p_2}{1 - p_1 + p_2} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 2\, p_2 = 1 - p_1 + p_2 \\
&\Leftrightarrow p_2 = 1 - p_1 \\
&\Leftrightarrow p_2 = q_1
\end{aligned}$$

Ainsi, $u = \frac{1}{2}$ si, et seulement si, $p_2 = q_1$, c'est-à-dire losrque la probabilité d'obtenir Pile avec la pièce A_1 est égale à la probabilité d'obtenir Face avec la pièce A_2.

2. ***a)*** Considérons tout d'abord X_1.

- $X_1(\Omega) = \{0,1\}$.
- $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(F_1) = \dfrac{p_1+p_2}{2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 0) &= \mathbb{P}(P_1) = 1 - \mathbb{P}(F_1) = 1 - \frac{p_1+p_2}{2} \\ &= \frac{(p_1+q_1)-(p_1+p_2)}{2} = \frac{q_1-p_2}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{p_1+p_2}{2}\right)$.

On en déduit que X_1 admet pour espérance : $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{p_1+p_2}{2}$.

De même :

- $X_2(\Omega) = \{0,1\}$.
- $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(F_2) = (p_1 - p_2)\, u_1 + p_2$

$$\begin{aligned} &= (p_1-p_2)\,\frac{p_1+p_2}{2} + p_2 = \frac{{p_1}^2 - {p_2}^2 + 2\,p_2}{2}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(P_2) = 1 - \mathbb{P}(F_2) = 1 - \frac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2}$$

Ainsi, $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2}\right)$.

On en déduit que X_2 admet pour espérance : $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2}$.

b) Les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes si, et seulement si :

$$\forall i \in \{0,1\}, \forall j \in \{0,1\},\ \mathbb{P}\left((X_1 = i) \cap (X_2 = j)\right) = \mathbb{P}(X_1 = i) \times \mathbb{P}(X_2 = j)$$

Autrement dit, il s'agit de démontrer que les événements $\{X_1 = i\}$ et $\{X_2 = j\}$ sont indépendants.

- Étudions l'indépendance des événements $\{X_1 = 1\}$ et $\{X_2 = 1\}$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\,(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\,\right) \\ = \ & \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2\right) \\ = \ & \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(F_1) \neq 0\textit{)} \\ = \ & \frac{p_1+p_2}{2} \times p_1 \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{p_1+p_2}{2} \times \frac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\,(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\,\right) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) \\ \Leftrightarrow \ & \cancel{\frac{p_1+p_2}{2}} \times p_1 = \cancel{\frac{p_1+p_2}{2}} \times \frac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2} \\ \Leftrightarrow \ & p_1 = \frac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2} \\ \Leftrightarrow \ & 2\,p_1 - {p_1}^2 = 2\,p_2 - {p_2}^2 \end{aligned}$$

Considérons la fonction f définie sur $]0,1[$ par $f : x \mapsto 2\,x - x^2$.
f est dérivable sur $]0,1[$ en tant que fonction polynomiale.

$$\forall x \in\ ]0,1[,\ \ f'(x) = 2 - 2\,x = 2\,(x-1)$$

Ainsi, pour tout $x \in\ ]0,1[$, $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0,1[$. Elle est donc injective sur cet intervalle. On en déduit que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) \\ \Leftrightarrow \ & 2\,p_1 - {p_1}^2 = 2\,p_2 - {p_2}^2 \\ \Leftrightarrow \ & f(p_1) = f(p_2) \\ \Leftrightarrow \ & p_1 = p_2 \end{aligned}$$

- Si $\{X_1 = 1\}$ et $\{X_2 = 1\}$ son indépendants :
  - × les événements $\{X_1 = 0\}$ et $\{X_2 = 1\}$ sont eux aussi indépendants. En effet, par le lemme des coalitions, $\overline{\{X_1 = 1\}} = \{X_1 = 0\}$ et $\{X_2 = 1\}$ sont indépendants.
  - × de même, $\{X_1 = 1\}$ et $\overline{\{X_2 = 1\}} = \{X_2 = 0\}$ sont indépendants.
  - × et, $\overline{\{X_1 = 1\}} = \{X_1 = 0\}$ et $\overline{\{X_2 = 1\}} = \{X_2 = 0\}$ sont indépendants.

On en conclut que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes si, et seulement si, $p_1 = p_2$. $\square$

Exercice 27 ***(Fonction génératrice d'une variable aléatoire)***
Soient a, b, et N trois entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $N = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs dans cette urne, au hasard et avec remise en procédant de la façon suivante :

× si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'une avant de procéder au tirage suivant ;

× si la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche dans cette urne, et l'on procède au tirage suivant.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Déterminer la loi de Y. Montrer alors que :

$$\forall k \in [\![1, b]\!],\ \mathbb{P}(Y = k) = \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right)$$

2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \sum_{k \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = k)\, x^k$$

On dit que G est la fonction génératrice de la variable aléatoire Y.

a) Justifier l'égalité : $G(x) = E\left(x^Y\right)$.

b) Quelle est la valeur de $G(1)$?

c) Exprimer $E(Y)$ en fonction de $G'(1)$.

d) Exprimer la variance de Y en fonction de $G'(1)$, et de $G''(1)$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = 1 + \dfrac{b!}{N^b}(x-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{b} \dfrac{N^{b-k}}{(b-k)!}\, x^k$.

4. En déduire l'espérance de Y.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

5. De même calculer la variance de Y à l'aide de la fonction génératrice G.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

Démonstration.
Dans la suite, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on considère les événements suivants

× N_i : « on tire une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage »,

× B_i : « on tire une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

1. • D'après l'énoncé, l'urne contient a boules blanches et b boules noires.

× Au pire, la première boule blanche est tirée lors du $(b+1)^{\text{ème}}$ lancer *i.e.* après le tirage successif de toutes les boules noires.

× On peut tirer une boule blanche à la place de n'importe laquelle de ces boules noires.

On en conclut que $Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!]$.

• Soit $k \in [\![1, b+1]\!]$.

× Si $k = 1$, $\{Y = 1\} \ = \ B_1$.
Et donc $\mathbb{P}(\{Y = 1\}) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{a}{N}$ par équiprobabilité des tirages.

× Si $k \geqslant 2$, $\{Y = k\} \ = \ N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k$.

Comme $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1}) \neq 0$ (la probabilité de tirer successivement $k-1$ boules noires est non nulle), d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(Y = k) \\
= \ & \mathbb{P}\left(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k\right) \\
= \ & \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-2}}(N_{k-1}) \times \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1}}(B_k) \\
= \ & \frac{b}{N} \times \frac{b-1}{N} \times \ldots \times \frac{b-(k-2)}{N} \times \frac{a+(k-1)}{N} \\
= \ & \frac{b\,(b-1)\ \ldots\ (b-k+2)\,(a+k-1)}{N^k} \\
= \ & b\,(b-1)\ \ldots\ (b-k+2)\ \frac{a+k-1}{N^k} \\
= \ & \frac{b!}{(b-k+1)!}\ \frac{a+k-1}{N^k}
\end{aligned}$$

Or $a + b = N$ donc $a = N - b$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \frac{b!\,(N-b+k-1)}{(b-k+1)!\,N^k} = \frac{b!\,(N-(b-k+1))}{(b-k+1)!\,N^k} \\
&= \frac{b!}{N^k}\left(\frac{N}{(b-k+1)!} - \frac{b-k+1}{(b-k+1)!}\right) \\
&= \frac{b!}{N^k}\left(\frac{N}{(b-k+1)!} - \frac{1}{(b-k)!}\right) \\
&= \frac{b!\,N^{b-k}}{N^k\,N^{b-k}}\left(\frac{N}{(b-k+1)!} - \frac{1}{(b-k)!}\right) \\
&= \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right)
\end{aligned}$$

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que $Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!]$.
La v.a.r. $Z = x^Y$ est une variable aléatoire finie.
En effet $Z(\Omega) = \{x, x^2, \dots, x^{b+1}\}$.
(rigoureusement, on devrait écarter le cas $x = 0$, $x = -1$ et $x = 1$ car dans ces cas les éléments précédents ne sont pas tous différents)
On en déduit que Z admet une espérance.
D'après la théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(x^Y\right) = \sum_{k=1}^{b+1} x^k\,\mathbb{P}(Y=k) = G(x)$$

b) D'après la question précédente :

$$G(1) = \sum_{k=1}^{b+1} 1^k \times \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{b+1} \mathbb{P}(Y=k)$$

Or $(\{Y=k\})_{1\leqslant k\leqslant b+1}$ est le système complet d'événements associé à Y. On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{b+1} \mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{b+1} \{Y=k\}\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

D'où $G(1) = 1$.

c) La fonction G est C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation :

$$G'(x) = \sum_{k=1}^{b+1} \mathbb{P}(Y=k)\ k\ x^{k-1}$$

Or on sait que Y est finie, d'ensemble image $Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!]$.
Donc Y admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k\in Y(\Omega)} k\ \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{b+1} k \times \mathbb{P}(Y=k) = G'(1)$$

d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $G''(x) = \sum_{k=2}^{b+1} \mathbb{P}(Y=k)\ k\,(k-1)\,x^{k-2}$.
On en déduit que :

$$\begin{aligned}
G''(1) &= \sum_{k=2}^{b+1} k(k-1)\ \mathbb{P}(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{b+1} k(k-1)\ \mathbb{P}(Y=k) && \textit{(car } k(k-1)=0 \textit{ lorsque } k=1\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{b+1} k^2\ \mathbb{P}(Y=k) - \sum_{k=1}^{b+1} k\ \mathbb{P}(Y=k) \\
&= \mathbb{E}(Y^2) - G'(1) && \textit{(par théorème de transfert)}
\end{aligned}$$

Comme Y est finie, Y admet une variance. D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\
&= (G''(1) + G'(1)) - (G'(1))^2 && \textit{(d'après l'égalité précédente)} \\
&= G''(1) - (G'(1))^2 + G'(1)
\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $G(x) = \sum\limits_{k=1}^{b+1} x^k \mathbb{P}(Y = k)$. En distingant les cas $k \in [\![1; b$ et $k = b+1$, et en utilisant la question 1, on obtient :

$$\begin{aligned}
&G(x)\\
&= \sum_{k=1}^{b+1} x^k\ \mathbb{P}(Y=k)\\
&= \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right) + \frac{b!}{N^b}\ x^{b+1}\\
&= \frac{b!}{N^b}\sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{b!}{N^b}\sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + \frac{b!}{N^b}\ x^{b+1}\\
&= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + x^{b+1}\right)\\
&= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=0}^{b-1} x^{k+1}\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} - \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + x^{b+1}\right)\\
&= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=0}^{b} x^{k+1}\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} - \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right)\\
&= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=0}^{b} x^{k+1}\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} - \left(\sum_{k=0}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} - \frac{N^b}{b!}\right)\right)\\
&= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=0}^{b} (x^{k+1} - x^k)\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + \frac{N^b}{b!}\right)\\
&= \frac{b!}{N^b}\left((x-1)\sum_{k=0}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + \frac{N^b}{b!}\right)\\
&= \frac{b!}{N^b}(x-1)\sum_{k=0}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + 1
\end{aligned}$$

4. D'après la question ***2.c)*** : $\mathbb{E}(Y) = G'(1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$G'(x) \;=\; \frac{b!}{N^b}\sum_{k=0}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + \frac{b!}{N^b}(x-1)\sum_{k=1}^{b} k\, x^{k-1}\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; G'(1) \;=\; \frac{b!}{N^b}\sum_{k=0}^{b} 1^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + 0 \;=\; \frac{b!}{N^b}\sum_{k=0}^{b}\frac{N^k}{k!}$$

par changement d'indice (sommation dans l'autre sens).

5. D'après la question ***2.d)*** : $\mathbb{V}(Y) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
G''(x) \;&=\; \frac{b!}{N^b}\sum_{k=1}^{b}\frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\,k\ x^{k-1} + \frac{b!}{N^b}\sum_{k=1}^{b}\frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\,k\ x^{k-1}\\
&\quad + \frac{b!}{N^b}\,(x-1)\ \sum_{k=2}^{b}\frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\,k\ (k-1)\ x^{k-2}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
G''(1) \;&=\; \frac{b!}{N^b}\sum_{k=1}^{b}\frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\,k + \frac{b!}{N^b}\sum_{k=1}^{b}\frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\,k\\
&=\; 2\,\frac{b!}{N^b}\sum_{k=1}^{b}\frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\,k \;=\; 2\,\frac{b!}{N^b}\sum_{k=0}^{b-1}\frac{N^k}{k!}(b-k)
\end{aligned}$$

par changement d'indice (sommation dans l'autre sens). Enfin

$$\begin{aligned}
V(Y) \;&=\; G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2\\
&=\; 2\,\frac{b!}{N^b}\sum_{k=0}^{b-1}\frac{N^k}{k!}(b-k) + G'(1) - (G'(1))^2
\end{aligned}$$

(pas vraiment de simplification possible ...)

□

Exercice 31

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités vers la droite suivant la procédure suivante :

× au départ la puce est en O ;

× si, à un instant, la puce est sur la case d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera soit sur la case d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit sur la case $k+2$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

× les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.
Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. On note X_n la v.a.r. égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
Exprimer X_n en fonction de S_n.
En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts qu'il a fallu à la puce pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n au cours des n premiers sauts.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$ et pour tout entier $k \geqslant 1$

$$\mathbb{P}(\{Y_n = k\}) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k-1\}) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k-1\})$$

c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

4. Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na$$

vérifie une relation récurrente linéaire d'ordre 2.
Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n, puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de n.

Démonstration.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ puisque chaque saut de la puce peut être double.
- Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
  Un déplacement qui réalise $\{S_n = k\}$ est entièrement déterminé par :
  × le moment où les k doubles sauts ont lieu.
  Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités différentes.
  Comme les sauts sont indépendants et que chaque saut a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être double, la probabilité d'un tel déplacement est : $\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$.
  Ainsi : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{S_n = k\}) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Autement dit, $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que S_n admet pour espérance $\mathbb{E}(S_n) = n\,\frac{1}{2}$ et pour variance $\mathbb{V}(S_n) = n\,\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}$.

Remarque

On pouvait rédiger autrement.

- On est dans une situation d'équiprobabilité (du saut simple ou double).
  On peut donc écrire :
  $$\mathbb{P}(\{S_n = k\}) = \frac{\text{Card}(\{S_n = k\})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$
  car il y a 2^n déplacements contenant n sauts.
- On pouvait aussi constater que la v.a.r. S_n compte le nombre de succès (on considère qu'un saut double est un succès) lors de la répétition de l'expérience consistant à faire sauter la puce. On en conclut directement que $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

2. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lors des n premiers sauts, la puce fait S_n sauts doubles et $n - S_n$ sauts simples. Ainsi :

$$X_n = 2\,S_n + (n - S_n) = n + S_n$$

- Comme $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, l'ensemble image de X_n est $X_n(\Omega) = [\![n, 2\,n]\!]$.
- Soit $k \in [\![n, 2\,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X_n = k\}) &= \mathbb{P}(\{n + S_n = k\}) = \mathbb{P}(\{S_n = k - n\}) \\ &= \binom{n}{k-n} \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

- Enfin, X_n admet une espérance et une variance en tant que somme de deux v.a.r. qui admettent une variance (S_n et la v.a.r. constante n).
  Par linéarité de l'espérance, on a alors :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(n + S_n) = \mathbb{E}(n) + \mathbb{E}(S_n) = n + \frac{n}{2} = \frac{3\,n}{2}$$

  Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(n + S_n) = \mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{4}$$

3. *a)* On considère les n premiers sauts.

- Si la puce ne fait que des sauts doubles, elle atteint ou dépasse l'abscisse n au bout de :
  × $\frac{n}{2}$ sauts doubles si n est pair,
  × $\frac{n+1}{2}$ sauts doubles si n est impair.

  Autrement dit, au bout de $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ sauts doubles.
- Si la puce ne fait que des sauts simples, il lui faut n sauts pour atteindre l'abscisse n.
- Tous les cas intermédiaires sont possibles.
  Ainsi $Y_n(\Omega) = [\![\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, n]\!]$.

b) Soient $n \geqslant 3$ et $k \geqslant 1$.
Lors de son premier saut, la puce fait soit un saut simple, soit un saut double. Ainsi, $([X_1 = 1], [X_1 = 2])$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{Y_n = k\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{Y_n = k\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \{Y_n = k\})$$

- Or $\{X_1 = 1\} \cap \{Y_n = k\} = \{X_1 = 1\} \cap \{Y_{n-1} = k - 1\}$.
  En effet, un déplacement qui réalise $\{X_1 = 1\} \cap \{Y_n = k\}$:
  × comporte n sauts dont les k premiers permettent d'atteindre l'abscisse n,
  × commence par un saut double,
  × se poursuit par un déplacement contenant $n - 1$ sauts et dont les $k-1$ premiers sauts permettent une avancées de $k-1$ cases. Autrement dit, se poursuit par un déplacement qui réalise $\{Y_{n-1} = k - 1\}$.
- De même, $\{X_1 = 2\} \cap \{Y_n = k\} = \{X_1 = 2\} \cap \{Y_{n-2} = k - 1\}$.

Comme $\mathbb{P}(\{X_1 = 1\}) = \frac{1}{2} \neq 0$ et $\mathbb{P}(\{X_1 = 2\}) = \frac{1}{2} \neq 0$, on obtient :

$$\mathbb{P}(\{Y_n = k\}) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k - 1\}) + \frac{1}{2}\, \mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k - 1\})$$

c) Soit $n \geqslant 3$.
Comme Y_n est une v.a.r. finie, elle admet une espérance définie par :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k \in Y_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}(\{Y_n = k\})$$

Soit $k \geqslant 1$. D'après la question précédente :

$$k\,\mathbb{P}(\{Y_n = k\}) = \frac{1}{2}\ k\,\mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k - 1\}) + \frac{1}{2}\ k\,\mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k - 1\})$$

En sommant ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y_n)\\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} k\ \mathbb{P}(\{Y_n = k\})\\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} \left(\frac{1}{2}\ k\,\mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k-1\}) + \frac{1}{2}\ k\,\mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k-1\})\right)\\
=\ & \frac{1}{2} \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} k\,\mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k-1\}) + \frac{1}{2} \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} k\,\mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k-1\})\\
=\ & \frac{1}{2} \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}^{n-1} (k+1)\,\mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k\}) + \frac{1}{2} \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}^{n-1} (k+1)\,\mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k\})
\end{aligned}$$

On remarque alors que : $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

- Considérons la première somme.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-1} (k+1)\,\mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k\})\\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} (k+1)\,\mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k\}) && (*)\\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} k\,\mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k\}) \quad + \quad \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k\})\\
=\ & \qquad \mathbb{E}(Y_{n-1}) \qquad\qquad + \qquad\qquad 1
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que $Y_{n-1}(\Omega) = [\![\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-1]\!]$ et donc que $(\{Y_{n-1} = k\})_{k \in [\![\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-1]\!]}$ est le système complet d'événements associé à Y_{n-1}.

L'égalité $(*)$ est plus subtile. Il faut remarquer que :
- × si n est impair : $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- × si n est pair : $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor < \frac{n-1}{2}$.

  Et donc $\left\{Y_{n-1} = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\right\} = \varnothing$: on ne peut atteindre l'abscisse $n-1$ en effectuant seulement $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ sauts (doubles).

- On procède de même pour la deuxième somme.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-1} (k+1)\,\mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k\})\\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-2} (k+1)\,\mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k\}) && (*)\\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-2} k\,\mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k\}) \quad + \quad \sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-2} \mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k\})\\
=\ & \qquad \mathbb{E}(Y_{n-2}) \qquad\qquad + \qquad\qquad 1
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que $Y_{n-2}(\Omega) = [\![\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, n-2]\!]$ (*cf* raisonnement précédent).

L'égalité $(*)$ provient du fait que $\{Y_{n-2} = n-1\} = \varnothing$: lors d'une série de $n-2$ sauts, le premier saut qui permet d'atteindre l'abscisse $n-2$ ne peut être le $n-1^{\text{ème}}$ puisqu'il n'est même pas effectué.

d) On en conclut que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n) &= \frac{1}{2}\ (\mathbb{E}(Y_{n-1}) + 1) + \frac{1}{2}\ (\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1)\\
&= \frac{1}{2}\ \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\ \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1
\end{aligned}$$

4. Soit $n \geqslant 3$. Par définition de u_n, u_{n-1}, u_{n-2} :

$$\begin{aligned} u_n &= \mathbb{E}(Y_n) - na \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Y_{n-2}) - na + 1 \\ &= \frac{1}{2}\,u_{n-1} + \frac{1}{2}\,u_{n-2} + \frac{(n-1)a}{2} + \frac{(n-2)a}{2} - na + 1 \\ &= \frac{1}{2}\,u_{n-1} + \frac{1}{2}\,u_{n-2} + \frac{2-3a}{2} \end{aligned}$$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 si est seulement si $2-3a=0$ c'est-à-dire $a = \dfrac{2}{3}$, ce que nous supposons désormais.
- L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est $x^2 = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{2}$.
  Il s'agit donc de chercher les racines du polynôme :
  $$P(X) = X^2 - \frac{1}{2}\,X - \frac{1}{2}$$
  P admet pour racine évidente $r_1 = 1$.
  On en déduit la seconde racine $r_2 = -\dfrac{1}{2}$.
- La formule explicite de (u_n) est donc :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ = \ \alpha\, {r_1}^n + \beta\, {r_2}^n$$
  où les valeurs α et β sont données par le système :
  $$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_1 & = & \alpha\, r_1 & + & \beta\, r_2 \\ u_2 & = & \alpha\, {r_1}^2 & + & \beta\, {r_2}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_1 & = & \alpha & - & \frac{1}{2}\,\beta \\ u_2 & = & \alpha & + & \frac{1}{4}\,\beta \end{array} \right.$$
- Déterminons tout d'abord u_1.
  $Y_1(\Omega) = [\![1,1]\!] = \{1\}$ donc Y_1 est la variable certaine égale à 1.
  Ainsi, $\mathbb{E}(Y_1) = 1$ et $u_1 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.
- Déterminons maintenant u_2.
  $Y_2(\Omega) = \{1,2\}$
  $\mathbb{P}(\{Y_2 = 1\}) = \mathbb{P}(\{S_1 = 1\}) = \dfrac{1}{2}$
  $\mathbb{P}(\{Y_2 = 2\}) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\{Y_2 = 2\}}\right) = 1 - \mathbb{P}(\{Y_2 = 1\}) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$
  Ainsi : $Y_2 \sim \mathcal{U}([\![1,2]\!])$.
  Donc $\mathbb{E}(Y_2) = \dfrac{3}{2}$ et $u_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{6}$.
- On en déduit que :
  $$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \frac{1}{3} & = & \alpha & - & \frac{1}{2}\,\beta \\ \frac{1}{6} & = & \alpha & + & \frac{1}{4}\,\beta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} \frac{1}{3} & = & \alpha & - & \frac{1}{2}\,\beta \\ -\frac{1}{6} & = & & + & \frac{3}{4}\,\beta \end{array} \right.$$
  Et donc $\beta = -\dfrac{1}{6}\,\dfrac{4}{3} = -\dfrac{2}{9}$.
  Et enfin $\alpha = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{-2}{9} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9}$.
- Ainsi pour tout entier n non nul :
  $$u_n = \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(Y_n) = \frac{2}{9} + \frac{2n}{3} - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

□

Exercice 37 *(d'après* `CCP 2020 - PSI`*)*

Objectifs

- Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.
- À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.
- Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1, 3, 4 et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.
  - × Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
  - × Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.

  Remarque

  La présentation faite dans cette exercice porte à confusion. Écrire $N_1 = 2$ signifie que la v.a.r. N_1 est constante égale à 2. Il serait préférable d'écrire que, dans le cas évoqué dans l'énoncé, N_1 prend la valeur 2.

- Pour $\ell \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{k,\ell}$ l'évènement $(N_k = \ell)$ et $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(E_{k,\ell})$ sa probabilité.
- On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $\big(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n}\big)$?

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Rappelons que N_k prend la valeur du nombre de boules dans l'urne U_1 une fois le $k^{\text{ème}}$ échange réalisé. L'urne pouvant contenir au maximum n et au minimum 0, on en conclut : $N_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
- On en déduit donc que la famille $\Big(\{N_k = 0\}, \{N_k = 1\}, \dots, \{N_k = n\}\Big)$ est un système complet d'événements.

Remarque

- Dans cette question, on ne détermine pas précisément $N_k(\Omega)$ mais une sur-approximation $[\![0, n]\!]$. L'inclusion $N_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ est suffisante pour pouvoir conclure que la famille $\big(\{N_k = \ell\}\big)_{\ell \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
- Afin de bien comprendre ce point, considérons une v.a.r. Z d'ensemble image $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ (par exemple). La famille $\Big(\{Z = 0\}, \{Z = 1\}\Big)$ est un système complet d'événements (c'est le système complet d'événements associé à Z). On peut alors écrire :

$$Z(\Omega) \;\subset\; \{0, 1, 2\}$$

  Comme Z ne prend que les valeurs 0 et 1 alors $\{Z = 2\} = \varnothing$. La famille $\Big(\{Z = 0\}, \{Z = 1\}, \{Z = 2\}\Big)$ est un système complet d'événéments. Ceci provient du fait qu'ajouter un nombre fini (ou infini dénombrable) de fois l'événement impossible $\varnothing$, ne modifie pas les propriétés de définition d'un systeme complet d'événements. La nouvelle famille obtenue :
  - × la réunion de tous les événements de la famille n'est pas modifiée :

$$\{Z = 0\} \cup \{Z = 1\} \cup \varnothing \cup \varnothing = \{Z = 0\} \cup \{Z = 1\} = \Omega$$

  - × est toujours constituée d'événements 2 à 2 incompatibles. En effet :

$$\{Z = 0\} \cap \{Z = 1\} = \varnothing, \qquad \{Z = 0\} \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$\{Z = 1\} \cap \varnothing = \varnothing, \qquad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

□

2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?

Démonstration.
Supposons que l'urne U_1 contient j boules à l'instant k.
Deux cas se présentent.

- Si $j = 0$, alors l'urne U_1 ne contient aucune boule.
  Ainsi, l'urne U_2 contient les n boules.
  On choisit alors une boule qui est forcément dans l'urne U_2. Cette boule est alors placée dans l'urne U_1 de sorte que celle-ci contient 1 boule à l'instant $k+1$.
- Si $j = n$, alors l'urne U_1 contient toutes les boules.
  On choisit alors une boule qui provient forcément de cette urne et qui est placée dans l'urne U_2. À l'instant $k+1$, l'urne U_1 contient donc $n-1$ boules.
- Si $1 \leqslant j \leqslant n$, deux cas se présentent alors :
  × si on choisit un numéro dans l'urne U_1, alors la boule portant ce numéro est échangée et placée dans l'urne U_2.
  Ainsi, à l'instant $k+1$, l'urne U_1 contient $j-1$ boules.
  × si on choisit un numéro dans l'urne U_2, alors la boule portant ce numéro est échangée et placée dans l'urne U_1.
  Ainsi, à l'instant $k+1$, l'urne U_1 contient $j+1$ boules.

Remarque

- Cette question a pour but de s'assurer de la bonne compréhension des candidats vis-à-vis de l'expérience. Il n'y a pas d'aspect mathématique dans cette question. Elle est faite pour aider les candidats pour la question qui suit.
- Il est à noter que j n'est introduit nulle part dans l'énoncé. La question n'est donc pas correctement écrite (si $j = \sqrt{2}$, l'hypothèse que U_1 contient j boules est infondée).
- On retiendra de ce point qu'il faut garder un esprit critique sur les énoncés. Attention à ne pas sur-interpréter ce propos : si un énoncé peut parfois être imprécis, il est rare que l'étape de cobayage ne décèle pas les erreurs. Si on repère ce que l'on pense être une erreur dans un sujet, il est préférable de se poser avant tout la question de notre bonne compréhension. Il est probable que la coquille qu'on pense avoir repérée n'en soit pas une !

□

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $(j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, déterminer : $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big)$.
On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $(j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$.

- Remarquons tout d'abord que si l'urne U_1 contient j boules à l'instant $k+1$ alors elle contenait forcément, à l'instant précédent :
  × $j-1$ boules.
  Attention, ce cas n'est évidemment pas envisageable si $j = 0$.
  OU × $j+1$ boules.
  Attention, ce cas n'est évidemment pas envisageable si $j = n$.

  On en conclut :
  $$\forall (j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2,\ \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ 0 \quad \text{si } \ell \notin \{j-1, j+1\}$$
- Il convient alors de déterminer, dans les cas où cela a du sens, les valeurs de $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big)$ et $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big)$. Trois cas se présentent.
  × Si $j = 0$, on détermine $\mathbb{P}_{E_{k,1}}\big(E_{k+1,0}\big)$.
  Si $E_{k,1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient 1 boule (après l'échange effectué à l'instant k.
  Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,0}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 ne contient plus aucune boule à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de moins qu'à l'instant précédent. Plus précisément, $E_{k+1,0}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1, n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_1 qui contient 1 seule boule.

Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,1}}\big(E_{k+1,0}\big) \;=\; \frac{1}{n}$$

× Si $j = n$, on détermine $\mathbb{P}_{E_{k,n-1}}\big(E_{k+1,n}\big)$.
Si $E_{k,n-1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient $n-1$ boules (après l'échange effectué à l'instant k.
Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,n}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 contient n boules à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de plus qu'à l'instant précédent. Plus précisément, $E_{k+1,n}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1,n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_2 qui contient 1 seule boule.
Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,n-1}}\big(E_{k+1,n}\big) \;=\; \frac{1}{n}$$

× Si $j \in [\![1, n-1]\!]$.
Commençons par déterminer $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big)$.
Si $E_{k,j-1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient $j-1$ boules (après l'échange effectué à l'instant k.
Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,j}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 contient j boules à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de plus qu'à l'instant précédent. Plus précisément, $E_{k+1,j}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1,n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_2 qui contient $n-(j-1)$ boules.
Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big) \;=\; \frac{n-j+1}{n}$$

Déterminons maintenant $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big)$.
Si $E_{k,j+1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient $j+1$ boules (après l'échange effectué à l'instant k.
Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,j}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 contient j boules à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de moins qu'à l'instant précédent. Dans ce cas, $E_{k+1,j}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1,n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_1 qui contient $j+1$ boules.
Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big) \;=\; \frac{j+1}{n}$$

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $(j,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$:

$$\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \;=\; \begin{cases} \dfrac{n-j+1}{n} & \text{si } j \in [\![1,n]\!] \text{ et } \ell = j-1 \\[2ex] \dfrac{j+1}{n} & \text{si } j \in [\![0,n-1]\!] \text{ et } \ell = j+1 \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

- En question *2*, la démarche s'effectue en avant : on s'intéresse à ce qui se produit à l'instant $k+1$ en ayant comme hypothèse le contenu de l'urne à l'instant k. Dans la question suivante, on demande de réaliser une disjonction de cas en fonction des valeurs de j, qui correspond au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$. On doit alors procéder en arrière et réfléchir au nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant précédent. C'est un changement de point de vue qui rend la question *2* inutile et la question *3* inutilement complexe.
- Il est à noter un certain manque d'homogénéité dans l'énoncé. En effet, dans la question *2*, on n'insiste pas sur l'obligation de mettre en place une disjonction de cas. On le fait en revanche en question *3* (ce qui s'avère fort utile pour la question d'après).

- L'énoncé paraît assez peu pertinent dans sa manière de procéder. Il aurait été certainement préférable de supprimer la question *2* et de découper alors la question *3* comme suit.
  - ***a)*** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k,j}\big)$.
  - ***b)*** En procédant de même, donner la valeur de $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k,j}\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$.
  - ***c)*** Que vaut $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k,j}\big)$ dans les autres cas ?
- Il est à noter que la quantité $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big)$ ne dépend pas de la valeur de k. Plus précisément, qu'importe l'étape de l'expérience où on se trouve : l'étape de l'urne U_1 à l'instant suivant ne dépend que de l'état de l'urne à l'instant présent. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \;=\; \mathbb{P}_{E_{0,\ell}}\big(E_{1,j}\big)$$

  ce que l'on peut encore écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{\{N_k=\ell\}}\big(\{N_{k+1} = j\}\big) \;=\; \mathbb{P}_{\{N_0=\ell\}}\big(\{N_1 = j\}\big)$$

- Dans cet énoncé, on travaille sur l'évolution d'une grandeur aléatoire (le nombre de boules dans l'urne U_1) qui varie dans le temps discret (initialement, puis à l'étape suivante, puis à celle d'après etc.). Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (c'est-à-dire la valeur de N_{k+1}, nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$) ne dépend du passé (nombre de boules dans l'urne U_1 à les instants précédents) que par le présent (c'est-à-dire la valeur de N_k, nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant k). On dit alors que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov**. On peut par ailleurs préciser les points suivants :
  - × la grandeur évaluée (ici, le nombre de boules dans l'urne U_1) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$) appelées des **états** de la chaîne de Markov. Lorsque cette grandeur prend une valeur i un jour k donné, on dit que la chaîne de Markov $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ entre dans l'état i à l'instant k.
  - × comme on l'a vu, l'évolution de la chaîne de Markov est indépendante du jour k considéré. On dit alors que cette chaîne est **homogène**.

  Pour résumer, on a affaire dans cet énoncé à une **chaîne de Markov homogène ayant un ensemble fini d'états**. Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme. Cependant, il arrive fréquemment qu'un sujet propose l'étude d'une chaîne de Markov (`Centrale 1 2021 - PSI` et `Mines 1 2017 - PSI`). Le problème est, de ce point de vue, plutôt classique. □

4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(E_{k+1,0}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,1}\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(E_{k+1,n}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,n-1}\big)$$

et :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\; \mathbb{P}\big(E_{k+1,j}\big) = \frac{n-j+1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,j-1}\big) + \frac{j+1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,j+1}\big)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La famille $\big(E_{k,0}, E_{k,1}, \ldots, E_{k,n}\big)$ est un système complet d'événéments. Ainsi, par la formule des probabilités totales, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(E_{k+1,j}\big) &= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}\big(E_{k,\ell} \cap E_{k+1,j}\big) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \times \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \\
&= \sum_{\ell\in[\![0,n]\!]} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)
\end{aligned}$$

- Trois cas se présentent.
  - × Si $j = 0$, la formule s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(E_{k+1,0}\big) &= \sum_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell = 1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \neq 1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)} \\
&= \mathbb{P}_{E_{k,1}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,1}\big) \;=\; \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(E_{k,1}\big)
\end{aligned}$$

× Si $j = n$, la formule s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(E_{k+1,n}\big) &= \sum_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell = n-1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \neq n-1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)} \\
&= \mathbb{P}_{E_{k,n-1}}\big(E_{k+1,n}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,n-1}\big) \ = \ \frac{1}{n}\, \mathbb{P}\big(E_{k,n-1}\big)
\end{aligned}$$

× Si $j \in [\![1, n-1]\!]$, la formule s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(E_{k+1,j}\big) &= \sum_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \in \{j-1,\, j+1\}}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \notin \{j-1,\, j+1\}}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)} \\
&= \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,j-1}\big) \\
&\quad + \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,j+1}\big) \\
&= \frac{n-j+1}{n}\, \mathbb{P}\big(E_{k,j-1}\big) + \frac{j+1}{n}\, \mathbb{P}\big(E_{k,j+1}\big)
\end{aligned}$$

□

5. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0,$$

où A_n est la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & n-1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & n-2 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & & 0 & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & n \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Démonstration.
Notons : $C_n = \Big(\mathbb{P}_{E_{0,j-1}}\big(E_{1,i-1}\big)\Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n+1}} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Démontrons : $\forall k \in \mathbb{N},\ Z_{k+1} = C_n \times Z_k$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $i \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\Big(C_n \times Z_k\Big)_{i+1,1} &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \Big(C_n\Big)_{i+1,\ell} \times \Big(Z_k\Big)_{\ell,1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \Big(C_n\Big)_{i+1,\ell+1} \times \Big(Z_k\Big)_{\ell+1,1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{0,\ell}}\big(E_{1,i}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,i}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(E_{k+1,i}\big) \\
&= \Big(Z_{k+1}\Big)_{i+1,1}
\end{aligned}$$

- On en déduit alors, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = C_n^k \times Z_0$$

Il suffit alors pour conclure de remarquer : $A_n = \dfrac{C_n}{n}$.

Remarque

- La matrice C_n est appelée matrice de transition associée à la chaîne de Markov $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Elle permet de décrire l'évolution aléatoire de la grandeur considérée (c'est-à-dire le nombre de boules dans l'urne U_1).
- On peut remarquer que pour chaque colonne j de la matrice de transition, la somme des coefficients vaut 1. Cela se démontre à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{N_k=j\}}$ et du système complet d'événements $\Big(\{N_{k+1}=0\}, \ldots, \{N_{k+1}=n\}\Big)$. Plus précisément :

$$\sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{\{N_k=j\}}\big(\{N_{k+1}=\ell\}\big) \ = \ 1$$

□