Feuille d'exercices n°3 : Endomorphismes et matrices carrées

Généralités sur les espaces vectoriels et les applications linéaires (révisions)

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$.
On note P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite définie par le système d'équations $\begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases}$.

1. Vérifier que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

On note p la projection sur P parallèlement à D.

2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Calculer $p(u)$ et déterminer la matrice de p dans $\mathscr{B}$.

Exercice 2

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, g_1, $g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$, et h_1, $h_2 \in \mathscr{L}(G,E)$.

a) Montrer que si f est injective et si $f \circ h_1 = f \circ h_2$ alors $h_1 = h_2$.

b) Montrer que si f est surjective et si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, alors $g_1 = g_2$.

2. **Application.**

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $(AB)^2$ et en déduire BA.

Exercice 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soit V un sous-espace vectoriel de E.
On note $\mathcal{A} = \{f \in \mathscr{L}(E,F) \mid V \subset \ker(f)\}$.
Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et calculer sa dimension.

Exercice 4

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer :

$$\Big(\exists u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{Im}(u) = F \text{ et } \ker(u) = G\Big) \Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = n$$

2. **Exemple**.
Dans $\mathbb{R}^3$, F est le plan d'équation $x+y+z=0$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1,-1,0))$.

a) Déterminer un endomorphisme u dont l'image est F et le noyau est G

b) Exprimer la matrice de u dans la base canonique.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces supplémentaires de E.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note p_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{k \neq i} F_k$.

1. Montrer :

$$\textit{(i)}\ \mathrm{id}_E = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \qquad \textit{(ii)}\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ p_i \circ p_j = 0$$

2. Soient p_1, ..., p_n des endomorphismes de E vérifiant ***(i)*** et ***(ii)***.
On note $F_i = \mathrm{Im}(p_i)$.

a) Montrer : $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'application p_i est la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{k \neq i} F_k$.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E linéairement indépendantes. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note : $H_j = \ker(\varphi_j)$.

1. Justifier que les espaces H_1, …, H_p sont des hyperplans deux à deux distincts de E.

2. On considère l'application :

$$\begin{array}{cccl} \varphi & : & E & \to & \mathbb{K}^p \\ & & x & \mapsto & \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)\big) \end{array}$$

a) Justifier que φ est linéaire, surjective et de noyau $H_1 \cap \cdots \cap H_p$.

b) En déduire : $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) = n - p$.

Exercice 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective.

Soit H un sous-espace vectoriel de F.

Montrer que si H est un hyperplan de F, alors $u^{-1}(H)$ (sous-espace vectoriel de E) est un hyperplan de E.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$.

On suppose : $\forall f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0 \ \Rightarrow\ f = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$.

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Exercice 9

Montrer que si H_1 et H_2 sont deux hyperplans d'un espace vectoriel E, alors H_1 et H_2 ont un supplémentaire commun dans E.

Exercice 10

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de formes linéaires sur E.

Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre ;

(ii) $\varphi : x \in E \mapsto \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big) \in \mathbb{C}^p$ est surjective ;

(iii) $\exists (x_1, \dots, x_p) \in E^p,\ \det\big((f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}\big) \neq 0$.

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i^* l'application qui à tout $x \in E$ associe la i-ème coordonnée de x dans $\mathscr{B}$.

Montrer que la famille $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

2. Soit $\mathcal{C} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

a) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{cccl} \psi & : & E & \to & \mathbb{K}^n \\ & & x & \mapsto & \big(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

b) En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathcal{C} = \mathscr{B}^*$.

Exercice 12

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle **trace** de M, et on note $\mathrm{tr}(M)$, la somme des coefficients diagonaux de M.

1. ***a)*** Montrer : $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

b) Montrer : $\forall (M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$.

2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

a) Montrer qu'il existe une unique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$$

b) On suppose de plus : $\forall (M,N) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right)^2$, $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{tr}$.

Projecteurs et symétries

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).

Pour tout élément $x \in E$, on note $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$. On appelle alors projection sur F parallèlement à G, l'application p définie par :

$$p \ : \ \begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application s :

$$s \ : \ \begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

1. ***a)*** Démontrer : $p \circ p = p$ *(on dit que p est idempotente)*.

b) Démontrer : $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.

c) On note $q = \mathrm{id}_E - p$. Démontrer que q est un projecteur.

d) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer :

$$f \circ f = f \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \\ f \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Im}(f) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(f) \end{array} \right.$$

2. ***a)*** Démontrer : $s \circ s = \mathrm{id}_E$ *(on dit que s est involutive)*.

b) Démontrer : $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

c) Démontrer : $s = 2\,p - \mathrm{id}_E = p - q$.

d) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer :

$$g \circ g = \mathrm{id}_E \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}_E) \\ g \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E) \\ \text{parallèlement à } \mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}_E) \end{array} \right.$$

3. ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$.

b) Démontrer : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$.

4. On note $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On note enfin $\mathscr{B}$ la famille obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

a) Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$.

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer : $p + q$ est un projecteur de $E \ \Leftrightarrow \ p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. On suppose dans cette question que $p + q$ est un projecteur de E.
Montrer :

$$\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$$

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$$

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$$

Déterminant et trace

Exercice 15

Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2(1+a_1) & \cdots & n(a_1^{n-2}+a_1^{n-1}) \\ 1 & 2(1+a_2) & \cdots & n(a_2^{n-2}+a_2^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2(1+a_n) & \cdots & n(a_n^{n-2}+a_n^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Exercice 16

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soient $(A,B,C,D)\in\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^4$.

On suppose $AC=CA$.

1. On suppose dans cette question que A est inversible.
Démontrer : $\det\left(\begin{pmatrix} A & C \\ B & D\end{pmatrix}\right)=\det(DA-BC)$.

2. Même question si la matrice A est non inversible.

Exercice 17

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $(A,B)\in\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$.

Démontrer : $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix}\right)=\det(A+B)\,\det(A-B)$.

Exercice 18

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle. On considère l'application f :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & M+\mathrm{tr}(M)\cdot A \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Déterminer ses points fixes, son noyau et son image.
On discutera selon la valeur de $\mathrm{tr}(A)$.

3. Calculer la trace de f.

Exercice 19

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient $p_1,\dots,p_k$ des projecteurs de E.

Notons p l'application définie par : $p=p_1+\cdots+p_k$.

1. On suppose : $\forall(i,j)\in[\![1,k]\!]^2,\ i\neq j\Rightarrow p_i\circ p_j=0_{\mathscr{L}(E)}$.
Montrer que p est un projecteur de E.

2. On suppose que p est un projecteur de E.

a) Que dire de $\mathrm{tr}(p)$ et de $\mathrm{tr}(p_i)$ pour $i\in[\![1,k]\!]$?

b) Montrer : $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}(p_1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}(p_k)$
puis : $\forall(i,j)\in[\![1,k]\!]^2,\ i\neq j\Rightarrow p_i\circ p_j=0_{\mathscr{L}(E)}$.

Polynômes de matrices carrées et d'endomorphismes

Exercice 20

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Montrer que A^3 est combinaison linéaire de A et A^2, puis calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 21

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} i&1&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$.

1. Trouver un polynôme $P_0\in\mathbb{C}[X]$ de degré 3 annulant A.

2. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B\in\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ semblable à A.

Exercice 22

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(0) \neq 0 \end{cases}$$

1. Si E est de dimension finie, montrer : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. Montrer la propriété précédente dans le cas général.

Exercice 23

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $\mathscr{B} = \big(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e)\big)$ est une base de E (on dit que f est **cyclique**).

1. Soit $(a_0, \dots, a_{n-1})$ le n-uplet de coordonnées de $f^n(e)$ dans la base $\mathscr{B}$.

a) Expliciter la matrice de f dans $\mathscr{B}$. Que peut-on dire du rang de f ?

b) Montrer que $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_2X^2 - a_1X - a_0$ est un polynôme annulateur de f.

2. Montrer que les endomorphismes de E qui commutent avec f sont les polynômes en f.

Matrices semblables - Changement de base

Exercice 24

Montrer que les matrices A et B ci-dessous sont semblables, et que les matrices C et D ne le sont pas, où :

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Trouver les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Im}(B) = \ker(A)$, $\ker(B) = \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 26

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que ces deux matrices sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 27

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A) = 1$.

Montrer : $A^2 = A$.

Exercice 28

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f^2 = g^2 = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Sous-espaces stables

Exercice 29

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer : u stabilise $H \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver tous les sous-espaces stabilisés par u.

Exercice 30

On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer : $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\mathrm{id})$.
Donner alors un élément de $\ker(f^2) \setminus \ker(f)$.

2. Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose : $g^2 = f$.

a) Montrer que $\ker(f^2)$ est stable par g.

b) En déduire qu'un tel g n'existe pas.

Exercice 31

Notons $\mathscr{G} = \{u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), u({}^tM) = {}^t(u(M))\}$.

1. Montrer que $\mathscr{G}$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que les éléments de $\mathscr{G}$ sont les éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ qui stabilisent $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $\mathscr{G}$.

Matrices carrées par blocs

Exercice 32

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $M = \left(\begin{array}{c|c} A & (0) \\ \hline (0) & B \end{array}\right)$ et $N = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$.

1. *a)* Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.

b) Expliciter l'inverse de M en fonction de A et B lorsque cette condition est remplie.

c) Déterminer le rang de M en fonction de celui de A et de B.

d) Dans le cas où M est inversible, déterminer M^{-1} en fonction de A et B.

2. Même question avec N.

Exercice 33

Soient n et p des entiers tels que $1 \leqslant p < n$.

On note : $q = n - p$.

1. Soit $A \in GL_p(\mathbb{R})$, soit $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, soit $C \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et soit $D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$.
On note : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Justifier : $\mathrm{rg}(M) \geqslant p$, avec égalité si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

2. Soit V un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formé de matrices de rang $\leqslant p$, et contenant $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer : $\dim(V) \leqslant np$.

Indication : considérer $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix} \mid B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R}) \right\}$.

Exercice 34

Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur B pour que A soit inversible.

2. Expliciter l'inverse de A lorsque cette condition est remplie.

Exercice 35

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ un p-uplet de scalaires deux à deux distincts.

Soit $(n_1, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$.

On note $n = n_1 + \cdots + n_p$.

On note A la matrice diagonale définie par blocs par :

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_p I_{n_p})$$

1. On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$ l'espace des matrices qui commutent avec A.

a) Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si M est diagonale par blocs selon le découpage $(n_1, \dots, n_p)$.

b) En déduire la dimension de $\mathcal{C}(A)$ de A.

2. On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'espace des polynômes en A.

a) Montrer que $P_0(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de A.
En déduire : $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Vect}\left(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1}\right)$.

b) Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$ est libre.
Quelle est la dimension de $\mathbb{K}[A]$?

3. Justifier : $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(A)$.
À quelle condition sur n_1, …, n_p y a-t-il égalité ?

Énoncés de concours

Exercice 36 (Centrale 2019 - M2)

Notations et rappels

- Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
- Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de M.
- Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $M^{k+1} = M\,M^k$.
- De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $u^{k+1} = u \circ u^k$.
- Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.
- Soit $\mathscr{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est nilpotente d'indice p.
- On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $\alpha \geqslant 2$:

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_\alpha(\mathbb{C})$$

- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{C})$$

- Plus généralement, si $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \cdots, A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note :

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C})$$

I. Premiers résultats

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

I.A - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$.
Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

2. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

3. Vérifier que la famille $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égaleà J_2.

6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

I.B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

7. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.

8. On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E tels que la famille $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E.

9. Donner la matrice de u dans cette base.

10. On suppose $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$.

Montrer qu'il existe des vecteurs :

× $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E,

× et des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ appartenantà $\mathrm{Ker}(u)$,

tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

11. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Exercice 37 (`CCINP 2018`)

Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul et a et b sont des constantes réelles.

1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = XP'$$

Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^k)$.

2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]})$.

3. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P) \ = \ X^2P'' + aXP'$$

Montrer : $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\,\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$$

8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0$$

10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières m_1, $m_2 \in [\![0, n]\!]$.

11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.