Feuille d'exercices n°4 : Endomorphismes et matrices carrées

Généralités sur les espaces vectoriels et les applications linéaires (révisions)

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$.
On note P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite définie par le système d'équations $\begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases}$.

1. Vérifier que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

On note p la projection sur P parallèlement à D.

2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Calculer $p(u)$ et déterminer la matrice de p dans $\mathscr{B}$.

Exercice 2

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, g_1, $g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$, et h_1, $h_2 \in \mathscr{L}(G,E)$.

a) Montrer que si f est injective et si $f \circ h_1 = f \circ h_2$ alors $h_1 = h_2$.

b) Montrer que si f est surjective et si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, alors $g_1 = g_2$.

2. **Application.**

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $(AB)^2$ et en déduire BA.

Exercice 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soit V un sous-espace vectoriel de E.
On note $\mathcal{A} = \{f \in \mathscr{L}(E,F) \mid V \subset \mathrm{Ker}(f)\}$.
Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et calculer sa dimension.

Exercice 4

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer :

$$\Big(\exists u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{Im}(u) = F \text{ et } \mathrm{Ker}(u) = G\Big) \Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = n$$

2. **Exemple**.
Dans $\mathbb{R}^3$, F est le plan d'équation $x+y+z=0$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1,-1,0)\right)$.

a) Déterminer un endomorphisme u dont l'image est F et le noyau est G.

b) Exprimer la matrice de u dans la base canonique.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces supplémentaires de E.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note p_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{k \neq i} F_k$.

1. Montrer :

(i) $\mathrm{id}_E = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ *(ii)* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$

2. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des endomorphismes de E vérifiant *(i)* et *(ii)*.
On note $F_i = \mathrm{Im}(p_i)$.

a) Montrer : $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'application p_i est la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{k \neq i} F_k$.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E linéairement indépendantes. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note : $H_j = \mathrm{Ker}(\varphi_j)$.

1. Justifier que les espaces H_1, …, H_p sont des hyperplans deux à deux distincts de E.

2. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E & \to & \mathbb{K}^p \\ & & x & \mapsto & \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)\big) \end{array}$$

a) Justifier que φ est linéaire, surjective et de noyau $H_1 \cap \dots \cap H_p$.

b) En déduire : $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) = n - p$.

Exercice 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective.

Soit H un sous-espace vectoriel de F.

Montrer que si H est un hyperplan de F, alors $u^{-1}(H)$ (sous-espace vectoriel de E) est un hyperplan de E.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$.

On suppose : $\forall f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0_E \ \Rightarrow\ f = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Exercice 9

Montrer que si H_1 et H_2 sont deux hyperplans d'un espace vectoriel E, alors H_1 et H_2 ont un supplémentaire commun dans E.

Exercice 10

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de formes linéaires sur E.

Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre ;

(ii) $\varphi : x \in E \mapsto \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big) \in \mathbb{C}^p$ est surjective ;

(iii) $\exists (x_1, \dots, x_p) \in E^p,\ \det\big((f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}\big) \neq 0$.

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i^* l'application qui à tout $x \in E$ associe la i-ème coordonnée de x dans $\mathscr{B}$.

Montrer que la famille $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

2. Soit $\mathcal{C} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

a) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & E & \to & \mathbb{K}^n \\ & & x & \mapsto & \big(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

b) En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathcal{C} = \mathscr{B}^*$.

Exercice 12

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle **trace** de M, et on note $\mathrm{tr}(M)$, la somme des coefficients diagonaux de M.

1. ***a)*** Montrer : $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

b) Montrer : $\forall (M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$.

2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

a) Montrer qu'il existe une unique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$$

b) On suppose de plus : $\forall (M,N) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right)^2$, $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{tr}$.

Projecteurs et symétries

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).

Pour tout élément $x \in E$, on note $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$. On appelle alors projection sur F parallèlement à G, l'application p définie par :

$$p : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application s :

$$s : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

1. ***a)*** Démontrer : $p \circ p = p$ *(on dit que p est idempotente)*.

b) Démontrer : $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.

c) On note $q = \mathrm{id}_E - p$. Démontrer que q est un projecteur.

d) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer :

$$f \circ f = f \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \\ f \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Im}(f) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(f) \end{array} \right.$$

2. ***a)*** Démontrer : $s \circ s = \mathrm{id}_E$ *(on dit que s est involutive)*.

b) Démontrer : $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

c) Démontrer : $s = 2\,p - \mathrm{id}_E = p - q$.

d) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer :

$$g \circ g = \mathrm{id}_E \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}_E) \\ g \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E) \\ \text{parallèlement à } \mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}_E) \end{array} \right.$$

3. ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$.

b) Démontrer : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$.

4. On note $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On note enfin $\mathscr{B}$ la famille obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

a) Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$.

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer : $p + q$ est un projecteur de E $\Leftrightarrow$ $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. On suppose dans cette question que $p + q$ est un projecteur de E.
Montrer :

$$\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$$

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$$

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$$

Déterminant et trace

Exercice 15

Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2(1+a_1) & \cdots & n(a_1^{n-2}+a_1^{n-1}) \\ 1 & 2(1+a_2) & \cdots & n(a_2^{n-2}+a_2^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2(1+a_n) & \cdots & n(a_n^{n-2}+a_n^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Exercice 16

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soient $(A,B,C,D)\in\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^4$.

On suppose $AC=CA$.

1. On suppose dans cette question que A est inversible.
Démontrer : $\det\left(\begin{pmatrix} A & C \\ B & D\end{pmatrix}\right)=\det(DA-BC)$.

2. Même question si la matrice A est non inversible.

Exercice 17

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $(A,B)\in\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.

Démontrer : $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix}\right)=\det(A+B)\,\det(A-B)$.

Exercice 18

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle. On considère l'application f :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & M+\mathrm{tr}(M)\cdot A \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Déterminer ses points fixes, son noyau et son image.
On discutera selon la valeur de $\mathrm{tr}(A)$.

3. Calculer la trace de f.

Exercice 19

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient p_1, …, p_k des projecteurs de E.

Notons p l'application définie par : $p=p_1+\cdots+p_k$.

1. On suppose : $\forall (i,j)\in[\![1,k]\!]^2,\ i\neq j\Rightarrow p_i\circ p_j=0_{\mathscr{L}(E)}$.
Montrer que p est un projecteur de E.

2. On suppose que p est un projecteur de E.

a) Que dire de $\mathrm{tr}(p)$ et de $\mathrm{tr}(p_i)$ pour $i\in[\![1,k]\!]$?

b) Montrer : $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}(p_1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}(p_k)$
puis : $\forall (i,j)\in[\![1,k]\!]^2,\ i\neq j\Rightarrow p_i\circ p_j=0_{\mathscr{L}(E)}$.

Polynômes de matrices carrées et d'endomorphismes

Exercice 20

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Montrer que A^3 est combinaison linéaire de A et A^2, puis calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 21

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$.

1. Trouver un polynôme $P_0\in\mathbb{C}[X]$ de degré 3 annulant A.

2. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B\in\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ semblable à A.

Exercice 22

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(0) \neq 0 \end{cases}$$

1. Si E est de dimension finie, montrer : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. Montrer la propriété précédente dans le cas général.

Exercice 23

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $\mathscr{B} = \big(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e)\big)$ est une base de E (on dit que f est **cyclique**).

1. Soit $(a_0, \dots, a_{n-1})$ le n-uplet de coordonnées de $f^n(e)$ dans la base $\mathscr{B}$.

a) Expliciter la matrice de f dans $\mathscr{B}$. Que peut-on dire du rang de f ?

b) Montrer que $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_2X^2 - a_1X - a_0$ est un polynôme annulateur de f.

2. Montrer que les endomorphismes de E qui commutent avec f sont les polynômes en f.

Matrices semblables - Changement de base

Exercice 24

Montrer que les matrices A et B ci-dessous sont semblables, et que les matrices C et D ne le sont pas, où :

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Trouver les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 26

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que ces deux matrices sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 27

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A) = 1$.

Montrer : $A^2 = A$.

Exercice 28

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f^2 = g^2 = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Sous-espaces stables

Exercice 29

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer : u stabilise $H \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver tous les sous-espaces stabilisés par u.

Exercice 30

On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.
Donner alors un élément de $\mathrm{Ker}(f^2) \setminus \mathrm{Ker}(f)$.

2. Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose : $g^2 = f$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par g.

b) En déduire qu'un tel g n'existe pas.

Exercice 31

Notons $\mathscr{G} = \{u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), u\big({}^tM\big) = {}^t\big(u(M)\big)\}$.

1. Montrer que $\mathscr{G}$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que les éléments de $\mathscr{G}$ sont les éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ qui stabilisent $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $\mathscr{G}$.

Matrices carrées par blocs

Exercice 32

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $M = \left(\begin{array}{c|c} A & (0) \\ \hline (0) & B \end{array}\right)$ et $N = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$.

1. ***a)*** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.

b) Expliciter l'inverse de M en fonction de A et B lorsque cette condition est remplie.

c) Déterminer le rang de M en fonction des matrices A et B.

2. Même question avec N.

Exercice 33

Soient n et p des entiers tels que $1 \leqslant p < n$.

On note : $q = n - p$.

1. Soit $A \in GL_p(\mathbb{R})$, soit $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, soit $C \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et soit $D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$.
On note : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Justifier : $\mathrm{rg}(M) \geqslant p$, avec égalité si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

2. Soit V un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formé de matrices de rang $\leqslant p$, et contenant $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer : $\dim(V) \leqslant np$.

Indication : considérer $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix} \mid B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R}) \right\}$.

Exercice 34

Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur B pour que A soit inversible.

2. Expliciter l'inverse de A lorsque cette condition est remplie.

Exercice 35

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ un p-uplet de scalaires deux à deux distincts.

Soit $(n_1, \dots, n_p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^p$.

On note $n = n_1 + \cdots + n_p$.

On note A la matrice diagonale définie par blocs par :

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_p I_{n_p})$$

1. On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$ l'espace des matrices qui commutent avec A.

a) Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si M est diagonale par blocs selon le découpage $(n_1, \dots, n_p)$.

b) En déduire la dimension de $\mathcal{C}(A)$ de A.

2. On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'espace des polynômes en A.

a) Montrer que $P_0(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de A.
En déduire : $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Vect}\left(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1}\right)$.

b) Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$ est libre.
Quelle est la dimension de $\mathbb{K}[A]$?

3. Justifier : $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(A)$.
À quelle condition sur n_1, ..., n_p y a-t-il égalité ?

Énoncés de concours

Exercice 36

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\, du$.

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x\,t)\, dt$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montre que Ψ est un endomorphisme de E.

***5.* Surjectivité de Ψ**

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textit{pour } x > 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) La fonction h est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?

c) Soit $g \in \operatorname{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\, g(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

d) A-t-on $h \in \operatorname{Im}(\Psi)$?

e) Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

***7.* Recherche des éléments propres de Ψ**

a) Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\, y = 0$$

b) Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

d) Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $f_i : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f_i(x) = x^i$

$$\text{et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \textit{pour } x > 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

a) **On veut montrer que la famille $B = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est une base de F_n**

Soient $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ des familles de scalaires tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, g_j = 0 \qquad (*)$$

(i) Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression (*) par x lorsque x est non nul.

(ii) Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.
On suppose : $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

(iii) Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

b) **Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n**

(i) Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\, dt$ est convergente et la calculer.

(ii) En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

c) Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathscr{B}$.

d) Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

e) Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right) \ln(x) & \textit{pour } x > 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

Exercice 37

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que :

$$u^2 - 3\,u + 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

1. L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira α inférieure à β.

3. On pose alors $v = u - \alpha\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\mathrm{id}_E$.

a) Déterminer $v - w$ et en déduire : $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

b) Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

c) Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

d) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

4. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

5. Application

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que u satisfait à la relation ($\star$).

b) Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question 3.

c) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.

d) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

Exercice 38 (E3A MP 2023)

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X-\alpha, \dots, (X-\alpha)^n)$ est une base de E_n.
2. Soit P un polynôme de E_n.
   Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.
3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.

   Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^r$.

* * * * *

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}\left(X^2-1\right)P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T(P_k)$.
5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.
6. écrire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E_n.
7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.
   - ***a)*** Montrer que P est de degré n.
   - ***b)*** Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.
   - ***c)*** En déduire une expression de P.
8. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T.
   L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Exercice 39

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient $q \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

   Donner, sans démonstration, une autre expression de $\sum\limits_{k=0}^{r} q^k$.
2. Soit p un entier naturel non nul.

   Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.
3. Soit $P \in E_n$. Montrer qu'il existe un polynôme Q de E_n tel que :

$$\forall x \neq 1,\ Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\ dt$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.
5. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.

   Déterminer A et A^{-1}.
7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.
8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?
9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'un polynôme Q de E_n.

   À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?

   On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.
10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.
11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Exercice 40

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe :

$$\varphi(P) = \int_0^1 P(t)\ dt$$

1. Démontrer que $\mathscr{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. **Généralités sur φ.**

a) Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x P(t)\ dt$$

a) Justifier que l'application ψ est linéaire.

b) Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^{n+1}\right)$.

c) Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}\left(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)\right)$.

d) Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])\mathbb{R}$.

a) Donner la dimension de $\mathcal{H}$.

b) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

c) Déterminer les composantes de φ dans cette base.