Exercices : préparation de la réduction

Il s'agit ici de s'habituer au vocabulaire à venir ainsi qu'à certaines techniques calculatoires dans l'objectif de mieux appréhender le cours sur la réduction (à venir).

Polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f, le polynôme défini par :

$$\boxed{\chi_f(X) \;=\; \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big)} \;=\; (-1)^n \det\big(f - X\,\mathrm{id}_E\big)$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **polynôme caractéristique** de A, et on note χ_A, le polynôme défini par :

$$\boxed{\chi_A(X) \;=\; \det\big(X\,I_n - A\big)} \;=\; (-1)^n \det\big(A - X\,I_n\big)$$

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\chi_f(X) \;=\; \chi_A(X)$$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Bien comprendre cette définition

- Par définition, χ_f est le polynôme caractéristique de n'importe quelle représentation matricielle de f. Si $\mathscr{B}$ est une base de E :

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) \\
&= \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big)\big) && \textit{(par définition du déterminant d'un endomorphisme)} \\
&= \det\big(X\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{id}_E\big) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big)\big) && \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \textit{ est linéaire)} \\
&= \det\big(X\ I_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big)\big) \\
&= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X)
\end{aligned}$$

- Dans la suite, on appelle spectre réel d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ l'ensemble des racines réelles de χ_f.
- Les éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ (c'est-à-dire les racines réelles de χ_f) sont appelées les valeurs propres réelles de f.

(on verra dans le chapitre de réduction qu'il s'agit là d'une caractérisation plutôt que d'une définition)

Sous-espaces propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que λ **est une valeur propre** de f (respectivement de A).

1) Cas des endomorphismes

On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} E_\lambda(f) & = & \big\{u \in E \mid f(u) = \lambda \cdot u\big\} \\ & = & \big\{u \in E \mid (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(u) = 0_E\big\} \;=\; \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \end{array}$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} E_\lambda(A) & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AU = \lambda \cdot U\} \\ & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \;=\; \mathrm{Ker}\left(A - \lambda\, I_n\right) \end{array}$$

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$u \in E_\lambda(f) \;\Leftrightarrow\; f(u) = \lambda \cdot u \;\Leftrightarrow\; AU = \lambda \cdot U \;\Leftrightarrow\; U \in E_\lambda(A)$$

Déterminant (rappels)

Déterminant d'une matrice carrée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **déterminant** et on note $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'unique application qui vérifie les propriétés suivantes *(existence et unicité sont admises)* :

- $\det$ est n-linéaire relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- $\det$ est alternée relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- $\det(I_n) = 1$.

Calcul en pratique du déterminant d'une matrice

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriétés usuelles

1) $\det\left({}^tA\right) = \det\left(A\right)$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\lambda \cdot A\right) = \lambda^n\ \det(A)$

3) $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)$

Formules explicites (cas $n \leqslant 2$ - cas triangulaire - cas non inversible)

1) $$\det\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}$$

2) Si A est triangulaire (ou diagonale), alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est non inversible $\Leftrightarrow$ Il existe une relation de dépendance linéaire entre les colonnes (resp. lignes) de A

En particulier :

- si A a une colonne (resp. ligne) nulle, alors $\det(A) = 0$.
- si A possède deux lignes (resp. colonnes) colinéaires, alors $\det(A) = 0$.
- si l'une des colonnes (resp. lignes) de A s'exprime comme combinaison linéaire des autres colonnes de A (resp. lignes), alors $\det(A) = 0$.

On en déduit aussi : $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible

De plus, dans le cas où A est inversible : $\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}$

Développement par rapport à une ligne/colonne (si $n \geqslant 2$)

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, on appelle mineur de position (i,j) et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa ligne i et sa colonne j.

1) Développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\ a_{i,k} \times \Delta_{i,k}(A)$$

2) Développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne

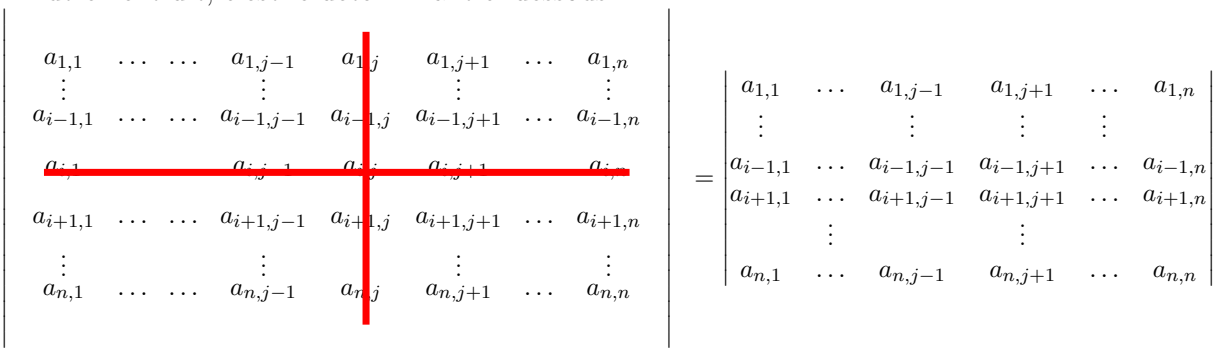
$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\ a_{k,j} \times \Delta_{k,j}(A)$$

Opérations élémentaires sur les lignes/colonnes et déterminant.
Pour calculer un déterminant d'une matrice carrée d'ordre supérieur à 3, on place un maximum de 0 (en procédant par opérations élémentaires) sur une ligne (resp. colonne) et on développe par rapport à celle-ci. On rappelle que :

- multiplier une ligne/colonne de A par α multiplie son déterminant par α.
- échanger deux lignes/colonnes de A multiplie son déterminant par -1.
- ajouter à une ligne/colonne de A une combinaison linéaire des autres lignes/colonnes de A ne modifie pas son déterminant.

Remarque

- La notion de déterminant n'est définie que pour les matrices carrées.
- Comme écrit ci-dessus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, le mineur d'ordre n de la matrice A (noté $\Delta_{i,j}(A)$) est le déterminant de la matrice obtenu par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Autrement dit, c'est le déterminant ci-dessous :



$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

.0.a) Déterminant d'une famille de vecteur et déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$.

Cas des familles de vecteurs

- On appelle **déterminant** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ **dans la base** $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$, le déterminant de la matrice **carrée** $\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) \ \dots \ \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_n)\Big)$.

  (matrice obtenue par concaténation des matrices représentatives des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans la base $\mathscr{B}$)

1) $\boxed{\text{Une famille } (u_1, \dots, u_n) \in E^n \text{ est une base de } E \ \Leftrightarrow \ \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0}$

2) En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Cas des endomorphismes

- On appelle **déterminant** de f, noté $\det(f)$, le déterminant de la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans la base $\mathscr{B}$. Le résultat ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.
  En effet, si $\mathscr{B}'$ est une base de E :

$$\begin{aligned} \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ &= \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \qquad \textit{(car } P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = I_n\textit{)} \end{aligned}$$

1) $\boxed{\det(\text{id}_E) = 1}$ ***2)*** $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\lambda \cdot f\right) = \lambda^n \ \det(f)}$

3) $\boxed{\det(g \circ f) = \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)}$

4) $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E \ \Leftrightarrow \ \det(f) \neq 0}$

Si f est bijective, on a alors : $\boxed{\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}}$

Remarque
Pour mieux appréhender les propriétés de l'opérateur déterminant, notons $C_1 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, $C_2 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et $C_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ trois vecteurs colonnes.

- L'aspect alterné permet d'affirmer : $\det\begin{pmatrix} C_1 & C_1 & C_3 \end{pmatrix} = 0$.

  $\hookrightarrow$ le déterminant d'une matrice qui possède deux colonnes (resp. lignes) égales est nul).

- L'aspect 3-linéaire permet d'affirmer :

$$\det\begin{pmatrix} (C_1 - 2C_2) & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} \cancel{C_2} & \cancel{C_2} & \cancel{C_3} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

  $\hookrightarrow$ la 3-linéarité combinée avec l'aspect alterné permet d'opérer par opérations élémentaires pour calculer un déterminant. Dans l'exemple ci-dessous, on perçoit qu'effectuer l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 - 2\,C_2$ laisse inchangé le déterminant.

$$\det\begin{pmatrix} (3\,C_1 - 2C_2) & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = 3\,\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} \cancel{C_2} & \cancel{C_2} & \cancel{C_3} \end{pmatrix} = 3\,\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

  Attention cependant : l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow 3\,C_1 - 2\,C_2$ a pour effet de multiplier par 3 le déterminant comme l'illustre le calcul ci-dessus.

- On peut aussi démontrer (c'est une propriété équivalente à l'aspect alterné lorsque la n-linéarité est vérifiée) que l'échange de deux colonnes (resp. lignes) multiplie par -1 le déterminant.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} C_2 & C_1 & C_3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & C_1 & C_3 \end{pmatrix} && \textit{(en effectuant l'opération élémentaire consistant à ajouter à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne la } 2^{\text{ème}}\textit{)} \\
&= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & \cancel{C_1} - (C_2 + \cancel{C_1}) & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} (\cancel{C_2} + C_1) + (-\cancel{C_2}) & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} C_1 & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= -\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Illustration sur des exercices

Exercice 1

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.
2. On note λ la seule valeur propre de f.
   Déterminer une base (u_1, u_2) de $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.
3. On note $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Exercice 2

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.
2. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de f.
   Déterminer une base de $E_{\lambda_1}(f)$ et une base de $E_{\lambda_2}(f)$.
3. On note $\mathscr{B}'$ la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $E_{\lambda_1}(f)$ et celle de $E_{\lambda_2}(f)$.
   Démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Exercice 3

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les 3 valeurs propres de f.
   Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, déterminer une base de $E_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)$.
3. On note $\mathscr{B}'$ la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $E_{\lambda_1}(f)$, $E_{\lambda_2}(f)$, $E_{\lambda_3}(f)$.
   Démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.