Exercices : préparation de la réduction

Il s'agit ici de s'habituer au vocabulaire à venir ainsi qu'à certaines techniques calculatoires dans l'objectif de mieux appréhender le cours sur la réduction (à venir).

Polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note χ_f, le polynôme défini par :

$$\boxed{\chi_f(X) \;=\; \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big)} \;=\; (-1)^n \det\big(f - X\,\mathrm{id}_E\big)$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **polynôme caractéristique** de A, et on note χ_A, le polynôme défini par :

$$\boxed{\chi_A(X) \;=\; \det\big(X\,I_n - A\big)} \;=\; (-1)^n \det\big(A - X\,I_n\big)$$

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\chi_f(X) \;=\; \chi_A(X)$$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Bien comprendre cette définition

- Par définition, χ_f est le polynôme caractéristique de n'importe quelle représentation matricielle de f. Si $\mathscr{B}$ est une base de E :

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \det\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big) \\
&= \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(X\,\mathrm{id}_E - f\big)\big) && \textit{(par définition du déterminant d'un endomorphisme)} \\
&= \det\big(X\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{id}_E\big) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big)\big) && \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \textit{ est linéaire)} \\
&= \det\big(X\ I_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big)\big) \\
&= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X)
\end{aligned}$$

- Dans la suite, on appelle spectre réel d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ l'ensemble des racines réelles de χ_f.
- Les éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ (c'est-à-dire les racines réelles de χ_f) sont appelées les valeurs propres réelles de f.

(on verra dans le chapitre de réduction qu'il s'agit là d'une caractérisation plutôt que d'une définition)

Sous-espaces propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que λ **est une valeur propre** de f (respectivement de A).

1) Cas des endomorphismes

On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} E_\lambda(f) & = & \big\{u \in E \mid f(u) = \lambda \cdot u\big\} \\ & = & \big\{u \in E \mid (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(u) = 0_E\big\} \;=\; \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \end{array}$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} E_\lambda(A) & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AU = \lambda \cdot U\} \\ & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \;=\; \mathrm{Ker}\left(A - \lambda\, I_n\right) \end{array}$$

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$u \in E_\lambda(f) \;\Leftrightarrow\; f(u) = \lambda \cdot u \;\Leftrightarrow\; AU = \lambda \cdot U \;\Leftrightarrow\; U \in E_\lambda(A)$$

Déterminant (rappels)

Déterminant d'une matrice carrée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **déterminant** et on note $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'unique application qui vérifie les propriétés suivantes *(existence et unicité sont admises)* :

- $\det$ est n-linéaire relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- $\det$ est alternée relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- $\det(I_n) = 1$.

Calcul en pratique du déterminant d'une matrice

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriétés usuelles

1) $\det\left({}^tA\right) = \det\left(A\right)$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\lambda \cdot A\right) = \lambda^n\ \det(A)$

3) $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)$

Formules explicites (cas $n \leqslant 2$ - cas triangulaire - cas non inversible)

1) $$\det\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}$$

2) Si A est triangulaire (ou diagonale), alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est non inversible $\Leftrightarrow$ Il existe une relation de dépendance linéaire entre les colonnes (resp. lignes) de A

En particulier :

- si A a une colonne (resp. ligne) nulle, alors $\det(A) = 0$.
- si A possède deux lignes (resp. colonnes) colinéaires, alors $\det(A) = 0$.
- si l'une des colonnes (resp. lignes) de A s'exprime comme combinaison linéaire des autres colonnes de A (resp. lignes), alors $\det(A) = 0$.

On en déduit aussi : $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible

De plus, dans le cas où A est inversible : $\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}$

Développement par rapport à une ligne/colonne (si $n \geqslant 2$)

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, on appelle mineur de position (i,j) et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa ligne i et sa colonne j.

1) Développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\ a_{i,k} \times \Delta_{i,k}(A)$$

2) Développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne

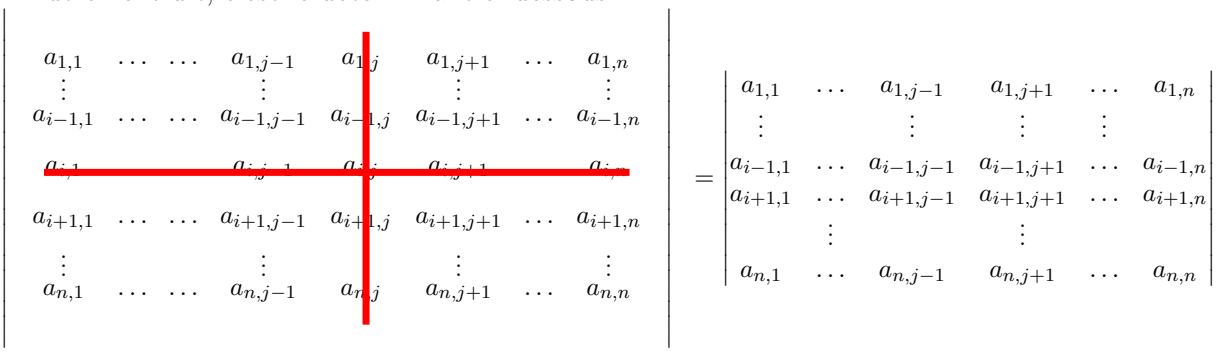
$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\ a_{k,j} \times \Delta_{k,j}(A)$$

Opérations élémentaires sur les lignes/colonnes et déterminant.
Pour calculer un déterminant d'une matrice carrée d'ordre supérieur à 3, on place un maximum de 0 (en procédant par opérations élémentaires) sur une ligne (resp. colonne) et on développe par rapport à celle-ci. On rappelle que :

- multiplier une ligne/colonne de A par α multiplie son déterminant par α.
- échanger deux lignes/colonnes de A multiplie son déterminant par -1.
- ajouter à une ligne/colonne de A une combinaison linéaire des autres lignes/colonnes de A ne modifie pas son déterminant.

Remarque

- La notion de déterminant n'est définie que pour les matrices carrées.
- Comme écrit ci-dessus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, le mineur d'ordre n de la matrice A (noté $\Delta_{i,j}(A)$) est le déterminant de la matrice obtenu par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Autrement dit, c'est le déterminant ci-dessous :



$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

.0.a) Déterminant d'une famille de vecteur et déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$.

Cas des familles de vecteurs

- On appelle **déterminant** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ **dans la base** $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$, le déterminant de la matrice **carrée** $\Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) \ \dots \ \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_n)\Big)$.

  (matrice obtenue par concaténation des matrices représentatives des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans la base $\mathscr{B}$)

1) $\boxed{\text{Une famille } (u_1, \dots, u_n) \in E^n \text{ est une base de } E \ \Leftrightarrow \ \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0}$

2) En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Cas des endomorphismes

- On appelle **déterminant** de f, noté $\det(f)$, le déterminant de la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans la base $\mathscr{B}$. Le résultat ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.
  En effet, si $\mathscr{B}'$ est une base de E :

$$\begin{aligned} \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ &= \det\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \qquad \textit{(car } P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = I_n\textit{)} \end{aligned}$$

1) $\boxed{\det(\text{id}_E) = 1}$ ***2)*** $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\lambda \cdot f\right) = \lambda^n \ \det(f)}$

3) $\boxed{\det(g \circ f) = \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)}$

4) $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E \ \Leftrightarrow \ \det(f) \neq 0}$

Si f est bijective, on a alors : $\boxed{\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}}$

Remarque
Pour mieux appréhender les propriétés de l'opérateur déterminant, notons $C_1 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, $C_2 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et $C_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ trois vecteurs colonnes.

- L'aspect alterné permet d'affirmer : $\det\begin{pmatrix} C_1 & C_1 & C_3 \end{pmatrix} = 0$.

  $\hookrightarrow$ le déterminant d'une matrice qui possède deux colonnes (resp. lignes) égales est nul).
- L'aspect 3-linéaire permet d'affirmer :

$$\det\begin{pmatrix} (C_1 - 2C_2) & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} C_2 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

  $\hookrightarrow$ la 3-linéarité combinée avec l'aspect alterné permet d'opérer par opérations élémentaires pour calculer un déterminant. Dans l'exemple ci-dessous, on perçoit qu'effectuer l'opération élémentaire $C_1 \leftrightarrow C_1 - 2\,C_2$ laisse inchangé le déterminant.

$$\det\begin{pmatrix} (3\,C_1 - 2C_2) & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = 3\,\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} C_2 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = 3\,\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

  Attention cependant : l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow 3\,C_1 - 2\,C_2$ a pour effet de multiplier par 3 le déterminant comme l'illustre le calcul ci-dessus.
- On peut aussi démontrer (c'est une propriété équivalente à l'aspect alterné lorsque la n-linéarité est vérifiée) que l'échange de deux colonnes (resp. lignes) multiplie par -1 le déterminant.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} C_2 & C_1 & C_3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & C_1 & C_3 \end{pmatrix} && \textit{(en effectuant l'opération élémentaire consistant à ajouter à la } 1^{\textit{ère}} \textit{ colonne la } 2^{\textit{ème}}\textit{)} \\
&= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & C_1 - (C_2 + C_1) & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} (C_2 + C_1) + (-C_2) & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} C_1 & -C_2 & C_3 \end{pmatrix} \\
&= -\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Illustration sur des exercices

Exercice 1

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.
2. On note λ la seule valeur propre de f.
   Déterminer une base (u_1, u_2) de $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.
3. On note $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Démonstration.

1. Déterminons χ_f.

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X) \\
&= \det\Big(X\,I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ -2 & X & -2 \\ X-3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (X-3)L_1}}{=} (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-2 & -2X+4 \\ 0 & X-2 & -1+(X-3)^2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)\times(-1)^{1+1}\,(-1)\times\begin{vmatrix} X-2 & -2(X-2) \\ X-2 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= (X-2)\begin{vmatrix} 1 & -2(X-2) \\ 1 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \\
&= (X-2)\,(X-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & X-4 \end{vmatrix} \\
&= (X-2)^2\Big(\big(1\times(X-4)\big) - \big(1\times(-2)\big)\Big) \\
&= (X-2)^3
\end{aligned}$$

Ainsi : $\chi_f(X) = (X-2)^3$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } \chi_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{2\}$.

2. • Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$.

Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u \in E_2(f) &\iff (f - 2\,\mathrm{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff (A - 2\,I_3)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & y & - & z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_2(f) &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\mid\; f(u)=2u\big\} \\ &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\mid\; x=y-z\big\} \\ &= \big\{(y-z,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\mid\; y\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{y\cdot(1,1,0)+z\cdot(-1,0,1)\in\mathbb{R}^3 \;\mid\; y\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{R}\big\} \\ &= \text{Vect}\,((1,1,0),(-1,0,1)) \end{aligned}$$

- Notons $u_1=(1,1,0)$ et $u_2=(-1,0,1)$. La famille (u_1,u_2) est :
  × génératrice de $E_2(f)$.
  × libre car constituée uniquement de **deux** vecteurs non colinéaires.
  C'est donc une base de $E_2(f)$.

Ainsi (u_1,u_2) est une base de $E_2(f)$.

3. • Tout d'abord :

$$u_3=e_1+e_2+e_3=(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)=(1,1,1)$$

- Montrons que la famille $\mathscr{B}'=\big((1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1\cdot(1,1,0)+\lambda_2\cdot(-1,0,1)+\lambda_3\cdot(1,1,1)=(0,0,0)\quad(*)$

$$\text{Or :}\quad (*) \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \big\{\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

(par remontées successives)

La famille $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,u_3)$ est donc libre.

- La famille $\mathscr{B}'$ est :
  × libre,
  × telle que $\text{Card}\big((u_1,u_2,u_3)\big)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$.

La famille (u_1,u_2,u_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Notons $U_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $U_2 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $U_3 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$.

- Enfin :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_3)\big) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3)\\ &= \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant (U_1, U_2, U_3).

  Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(**)$

Or : $(**) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3\\ \alpha & & & + & \gamma & = & 4\\ & & \beta & + & \gamma & = & 3\end{array}\right.$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3\\ & & \beta & & & = & 1\\ & & \beta & + & \gamma & = & 3\end{array}\right.$

$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3\\ & & \beta & & & = & 1\\ & & & & \gamma & = & 2\end{array}\right.$

$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & & & = & 1\\ & & \beta & & & = & 1\\ & & & & \gamma & = & 2\end{array}\right.$

$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & & & & & = & 2\\ & & \beta & & & = & 1\\ & & & & \gamma & = & 2\end{array}\right.$

On en déduit : $f(u_3) = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$.

Et ainsi : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } T = \text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.}$$

□

Exercice 2

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

2. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de f.
Déterminer une base de $E_{\lambda_1}(f)$ et une base de $E_{\lambda_2}(f)$.

3. On note $\mathscr{B}'$ la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $E_{\lambda_1}(f)$ et celle de $E_{\lambda_2}(f)$.
Démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Démonstration.

1. Déterminons χ_f.

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X) \\
&= \det\Big(X\, I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \Big) \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ -1 & X-3 & -1 \\ X-3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (X-3)\,L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ 0 & X-2 & -(X-2) \\ 0 & -X+2 & -1+(X-3)^2 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X-3 \\ 0 & X-2 & -(X-2) \\ 0 & -(X-2) & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times (-1)^{1+1}\ (-1) \times \begin{vmatrix} X-2 & -(X-2) \\ -(X-2) & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -(X-2) \\ -1 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} \\
&= (X-2)\ (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & X-4 \end{vmatrix} \\
&= (X-2)^2 \Big(\big(1 \times (X-4)\big) \ - \ \big((-1) \times (-1)\big) \Big) \\
&= (X-2)^2\,(X-5)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\chi_f(X) = (X-2)^2\,(X-5)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } \chi_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{2, 5\}$.

2. • Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$.
Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u \in E_2(f) &\iff \big(f - 2\,\text{id}_{\mathbb{R}^3}\big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff (A - 2\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \{\ x = -y - z
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
E_2(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\} \\
&= \{(-y-z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{y \cdot (-1,1,0) + z \cdot (-1,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \text{Vect}\,((-1,1,0),(-1,0,1))
\end{aligned}$$

On en conclut : $E_2(f) = \text{Vect}\,((-1,1,0),(-1,0,1))$.

• Notons $u_1 = (-1,1,0)$ et $u_2 = (-1,0,1)$. La famille (u_1,u_2) est :
× génératrice de $E_2(f)$.
× libre car constituée uniquement de **deux** vecteurs non colinéaires.
C'est donc une base de $E_2(f)$.

Ainsi (u_1,u_2) est une base de $E_2(f)$.

Commentaire

• On doit déterminer $E_2(f) = \text{Ker}(f - 2\,\text{id}_{\mathbb{R}^3})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et pas de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Si u et $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont deux représentations différentes du même triplet u, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments. Plus précisément :

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\in \mathbb{R}^3} \not= \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Vect}\,((-1,1,0))}_{\subset E_2(f)} \not= \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{\subset E_2(A)}$$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I_3$.
Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 2$.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $A\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Or :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3$$
$$= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si l'on choisit $x \neq 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut :

× choisir $y = -x$ et donc $z = 0$.

En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et ainsi :

$$E_2(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

× choisir $z = -x$ et donc $y = 0$.

En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et ainsi :

$$E_2(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On en conclut finalement : $E_2(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) & = & \dim\left(E_2(A)\right) & + & \text{rg}(A - 2\,I_3) \\ \| & & & & \| \\ 3 & & & & 1 \end{array}$$

(par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

Ainsi : $\dim\left(E_2(A)\right) = 3 - 1 = 2$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
  Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{array}{rcl}
u \in E_5(f) & \iff & \big(f - 5\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & (A - 5\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6\,x & & & = & -6\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right.
\end{array}
$$

  On obtient alors :

$$
\begin{array}{rcl}
E_5(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \ \texttt{ET} \ y = z\} \\
& = & \{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (1, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))
\end{array}
$$

  On en conclut : $E_5(f) = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))$.

- Notons $u_3 = (1, 1, 1)$. La famille $\Big((1, 1, 1)\Big)$ est :
  - × génératrice de $E_5(f)$.
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  La famille $\Big((1, 1, 1)\Big)$ est donc une base de $E_5(f)$.

3. • Montrons que la famille $\mathscr{B}' = \Big((-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\Big)$ est libre.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1\cdot(1,1,0)+\lambda_2\cdot(-1,0,1)+\lambda_3\cdot(1,1,1)=(0,0,0)$ $(*)$

$$\text{Or :}\quad (*) \iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \{\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

(par remontées successives)

La famille $\mathscr{B}' = (u_1,u_2,u_3)$ est donc libre.

- La famille $\mathscr{B}'$ est :
  - × libre,
  - × telle que $\text{Card}\big((u_1,u_2,u_3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

La famille (u_1,u_2,u_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4. • Notons $U_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $U_2 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $U_3 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 0\cdot u_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$.
- On a démontré précédemment : $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0\cdot u_1 + 2\cdot u_2 + 0\cdot u_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$.
- On a démontré précédemment : $u_3 \in E_5(f)$. Ainsi : $f(u_3) = 0\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 5\cdot u_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_3)\big) = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$.

Finalement : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

□

Exercice 3

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les 3 valeurs propres de f.
Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, déterminer une base de $E_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)$.

3. On note $\mathscr{B}'$ la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $E_{\lambda_1}(f)$, $E_{\lambda_2}(f)$, $E_{\lambda_3}(f)$.
Démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Démonstration.

1. Déterminons χ_f.

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}(X) \\
&= \det\Big(X\, I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) \\
&= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} (-1)\begin{vmatrix} -1 & X & -1 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 + X L_1}{=} (-1)\begin{vmatrix} -1 & X & -1 \\ 0 & -1+X^2 & -X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&= (-1)\times(-1)^{1+1}\,(-1)\times\begin{vmatrix} X^2-1 & -X \\ -1 & X \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= X\begin{vmatrix} X^2-1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= X\Big(\big((X^2-1)\times 1\big) \;-\; \big((-1)\times(-1)\big)\Big) \\
&= X\Big(X^2-2\Big) \\
&= X\,(X-\sqrt{2})\,(X+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Ainsi : $\chi_f(X) = X\,(X-\sqrt{2})\,(X+\sqrt{2})$

et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{racines réelles de } \chi_f, \\ \text{polynôme caractéristique de } f \end{array} \right\} = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$

2. • Déterminons $E_{\sqrt{2}}(f)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.
Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
u \in E_{\sqrt{2}}(f) \quad &\iff \quad (f - \sqrt{2}\,\mathrm{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff \quad \left(A - \sqrt{2}\,I\right) U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\,L_2 + L_1}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\sqrt{2}\,x & + & y & = & 0 \\ & - & y & = & -\sqrt{2}\,z \end{array} \right. \\
&\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\sqrt{2}\,x & & & = & -\sqrt{2}\,z \\ & - & y & = & -\sqrt{2}\,z \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

On obtient alors :

$$
\begin{aligned}
E_{\sqrt{2}}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \quad \texttt{ET} \quad y = \sqrt{2}\,z\} \\
&= \{(z, \sqrt{2}\,z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z \cdot (1, \sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\left((1, \sqrt{2}, 1)\right)
\end{aligned}
$$

La famille $\Big((1, \sqrt{2}, 1)\Big)$ est :

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,

× génératrice de $E_{\sqrt{2}}(f)$.

La famille $\Big((1, \sqrt{2}, 1)\Big)$ est donc une base de $E_{\sqrt{2}}(f)$.

- Déterminons $E_0(f)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$.
  Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{array}{rcl}
u \in E_0(f) & \iff & f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & AU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & y & & = & 0 \\ x & & + z & = & 0 \\ & y & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & + z & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & + z & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

  On obtient alors :

$$
\begin{array}{rcl}
E_0(f) & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \quad \texttt{ET} \quad y = 0\} \\
& = & \{(-z,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (-1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((-1,0,1)\right)
\end{array}
$$

  La famille $\Big((-1,0,1)\Big)$ est :

  × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,

  × génératrice de $E_0(f)$.

Ainsi, la famille $\Big((-1,0,1)\Big)$ est une base de $E_0(f)$.

- Déterminons une base de $E_{-\sqrt{2}}(f)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.
Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$.
Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
u \in E_{-\sqrt{2}}(f) \quad &\iff \quad \Big(f - (-\sqrt{2})\ \mathrm{id}_E\Big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff \quad (A + \sqrt{2}\, I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 - L_1}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \sqrt{2}\,x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & -\sqrt{2}\,z \end{array} \right. \\
&\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \sqrt{2}\,x & & & = & \sqrt{2}\,z \\ & & y & = & -\sqrt{2}\,z \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

On obtient alors :

$$
\begin{aligned}
E_{-\sqrt{2}}(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \quad \texttt{ET} \quad y = -\sqrt{2}\,z\} \\
&= \{(z, -\sqrt{2}\,z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z \cdot (1, -\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\left((1, -\sqrt{2}, 1)\right)
\end{aligned}
$$

La famille $\Big((1, -\sqrt{2}, 1)\Big)$:

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,

× génératrice de $E_{-\sqrt{2}}(f)$.

Ainsi, la famille $\Big((1, -\sqrt{2}, 1)\Big)$ est une base de $E_{-\sqrt{2}}(f)$.

3. • Montrons que la famille $\mathscr{B}' = \Big((1,\sqrt{2},1),(-1,0,1),(1,-\sqrt{2},1)\Big)$ est libre.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1\cdot(1,\sqrt{2},1)+\lambda_2\cdot(-1,0,1)+\lambda_3\cdot(1,\sqrt{2},1)=(0,0,0)\quad(*)$

$$\text{Or :}\quad (*) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \sqrt{2}\,\lambda_1 & & & - & \sqrt{2}\,\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-\sqrt{2}L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & \sqrt{2}\,\lambda_2 & - & 2\sqrt{2}\,\lambda_3 & = & 0\\ & & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3-\sqrt{2}L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & \sqrt{2}\,\lambda_2 & - & 2\sqrt{2}\,\lambda_3 & = & 0\\ & & & & 4\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \end{array}\right.$$

(par remontées successives)

La famille $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,u_3)$ est donc libre.

- La famille $\mathscr{B}'$ est :
  - × libre,
  - × telle que $\text{Card}\big((u_1,u_2,u_3)\big)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$.

La famille (u_1,u_2,u_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4. • Notons $U_1=\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1)=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$, $U_2=\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $U_3=\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3)=\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment : $u_1\in E_{\sqrt{2}}(f)$. Ainsi : $f(u_1)=\sqrt{2}\cdot u_1+0\cdot u_2+0\cdot u_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_1)\big)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.
- On a démontré précédemment : $u_2\in E_0(f)$. Ainsi : $f(u_2)=0\cdot u_1+0\cdot u_2+0\cdot u_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_2)\big)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.
- On a démontré précédemment : $u_3\in E_{-\sqrt{2}}(f)$. Ainsi : $f(u_3)=0\cdot u_1+0\cdot u_2-\sqrt{2}\cdot u_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\big(f(u_3)\big)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Finalement : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

□