Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Exercice 1 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.

On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

a) sans utiliser de matrice f,

b) en utilisant une matrice f.

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. A-t-on : $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 3 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. a) Prouver que : $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.

b) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que : $\mathrm{Im}(f + \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.

Exercice 4 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ \big(PQ\big)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

2. a) Démontrer : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$$P \text{ polynôme annulateur de } u \quad \Rightarrow \quad PQ \text{ polynôme annulateur de } u$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice 5 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Démontrer : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

2. ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

b) Démontrer : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

Exercice 6 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 7 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :

a) sans calcul,

b) en déterminant les valeurs propres et les sous-espaces propres,

c) en utilisant le rang de la matrice,

d) en calculant A^2.

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 8 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.

2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\,I_3 + b\,A + c\,A^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question ***1.*** les éléments propres de B.

Exercice 10 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit n un entier naturel non nul.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On suppose : $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donnée de E.

1. Donner le rang de f.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? (discruter en fonction du vecteur v)

Exercice 11 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}\,(I_2, A)$.

Exercice 12 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.
Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question ***1.*** reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

Exercice 13 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\Big(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\Big)$.

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire :

$$a \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre de multiplicité } r \iff \begin{cases} P^{(r)}(a) \neq 0 \\ \forall k \in [\![0, r-1]\!], P^{(k)}(a) = 0 \end{cases}$$

2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + a\,X^2 + b\,X$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient a_0, a_1, ..., a_n, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si b_0, b_1, ..., b_n sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant : $\deg(P) \leqslant n$ et $\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i$.

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ b_i = \begin{cases} 0 & si\ i \neq k \\ 1 & si\ i = k \end{cases}$

Exercice 15 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i = j \\ 1 & si\ i \neq j \end{cases}$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E$, $u(M) = M + \text{tr}(M)\ A$.

a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
Justifier vorte réponse en utilisant deux méthodes (avec ou sans la question ***1.***).

Exercice 16 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaire distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose : $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice 17 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 18

Déterminer les éléments propres et réduire les matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ***e)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Exercice 19

Étudier, en fonction des paramètres, la diagonalisabilité des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 20

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser K.

2. Exprimer M à l'aide des puissances de K et en déduire une diagonalisation de M.

Exercice 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 3 de A.

2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3. Montrer que les valeurs propres de A^2 sont négatives ou nulles.

Exercice 22

Soit $A \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\operatorname{tr}(A) = 6$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 23

Déterminer les éléments propres et étudier la diagonalisabilité des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ suivantes :

a. La matrice A dont tous les coefficients valent 1.

b. La matrice B dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 si $i + j$ est pair, et 0 sinon.

c. La matrice N dont les coefficients de la première colonne, de la dernière colonne et de la diagonale sont égaux à 1, et les autres à 0.

Exercice 24

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

2. Montrer que A est inversible et que $\det(A) > 0$.

Exercice 25

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1 - X)P' + XP$$

1. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$.

2. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.

   a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.

   b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 26

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} P & P \\ -P & P \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si P est inversible, alors Q l'est, et donner alors Q^{-1} en fonction de P^{-1}.

2. Étudier la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

Exercice 27

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 (où $n \geqslant 2$).

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\operatorname{tr}(A)$ pour que A soit diagonalisable.

Exercice 28

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ un couple de matrices qui commutent.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

2. Montrer que si A est diagonalisable et B est nulle, alors M est diagonalisable.

3. Démontrer la réciproque.

Exercice 29

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs et telle que la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A, et que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
Indication. Considérer un coefficient de module maximal dans X tel que $AX = \lambda X$.

2. On suppose les coefficients de A strictement positifs. Montrer que le sous-espace propre de A associé à 1 est une droite, et que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

Exercice 30

Le but de l'exercice est de caractériser les matrices carrées de même taille ayant une valeur propre commune.

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que A et B ont au moins une valeur propre commune.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nuls, tels que ${}^tAX = \alpha X$ et $BY = \alpha Y$.

b) En déduire qu'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MA = BM$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MA = BM$.

a. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $MP(A) = P(B)M$.

b. En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Exercice 31

Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : E \to E$, $P \mapsto X(X-1)P' - XP$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.

2. Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 32

Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.

Pour $f \in E$, on définit $\varphi(f) : [0;1] \to \mathbb{R}$ par : $\varphi(f)(0) = f(0)$ et $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ si $x \neq 0$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de φ.

3. Montrer que 1 est une valeur propre de φ et trouver l'espace propre associé.

4. Trouver les autres valeurs propres.

Exercice 33

Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $T \in \mathscr{L}(E)$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 34

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ qui à tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P)(X) = P(1 - iX)$, où $i^2 = -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer φ^4. Montrer que φ est diagonalisable et donner les valeurs propres possibles de φ.

2. Montrer que 1 est vraiment valeur propre de φ.

3. Préciser le spectre de φ en fonction de n.

Exercice 35

Soit l'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' - XP''$.

1. Monter que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Trouver la seule valeur propre possible λ de u.

3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? inversible ?

4. Calculer le sous espace propre associé à λ.

Exercice 36

Soit n un entier $\geqslant 4$.

On définit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto XP'' + (X - 4)P' - 3P$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Est-il diagonalisable ?

3. Déterminer la dimension puis une base du noyau de Φ.

Exercice 37

Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les éléments propres de f.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? inversible ?

Exercice 38

Soit $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M)I_n$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Trouver un polynôme annulateur de ϕ de degré 2.

3. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

4. Donner le polynôme caractéristique et la trace de ϕ.

Exercice 39

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit f_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f_A(M) = AM$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(f_A) = f_{P(A)}$.

2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

3. Montrer que $\mathrm{Sp}(f_A) = \mathrm{Sp}(A)$.

4. Expliciter χ_{f_A} en fonction de χ_A.

Exercice 40

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie.

Soit s est une symétrie vectorielle de E. On pose pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\varphi(u) = \dfrac{1}{2}\,(s \circ u + u \circ s)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$

2. Calculer φ^3 et en déduire un polynôme annulateur de φ.

3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 41

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E.

1. Montrer que si u et v sont *simultanément diagonalisables*, c'est-à-dire s'il existe une base de diagonalisation commune à u et v, alors u et v commutent.

2. On suppose dans cette question que u et v commutent.
Montrer que v stabilise chaque sous-espace propre de u, et que l'endomorphisme qu'il y induit est diagonalisable. En déduire que u et v sont simultanément diagonalisables.

Exercice 42

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si u est diagonalisable, alors u^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

2. Montrer la réciproque.
Indication : montrer que si un polynôme $XP(X)$ annule u^2, alors $XP(X^2)$ annule u.

Exercice 43

Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 44

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de A et trouver une matrice diagonale D semblable à A.

2. Montrer que toute matrice commutant avec D est nécessairement diagonale.

3. Soit $P = X^7 + X + 1$. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = A$.

Exercice 45

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, où $a_{i,j} = 1$ si $i + j$ est pair, $a_{i,j} = 2$ sinon.

1. Trouver les éléments propres de A.

2. Résoudre $X^2 + 2X = A$ dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 46
Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\operatorname{tr}(M) = 3$.

Exercice 47
Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 4M^2 - 4M = 0$ et $\operatorname{tr}(M) = 0$.

Exercice 48
On cherche les matrices symétriques M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation (1) : $M^3 + 4M^2 + 5M = 0_n$.

1. Justifier que ces matrices sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont racines du polynôme $P(X) = X^3 + 4X^2 + 5X$.

2. En déduire toutes les solutions symétriques de (1).

Exercice 49
Déterminer le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 5u_n + v_n - w_n, \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n - 2w_n, \\ w_{n+1} & = & u_n - v_n + 3w_n. \end{array} \right.$$

Exercice 50
Déterminer le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

a. $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+3} = -(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_0 = 1$, $v_1 = v_2 = 0$ et $v_{n+3} = 3v_{n+2} - 4v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Indication : raisonner matriciellement pour ramener le problème au calcul des puissances d'une matrice carrée de taille 3*, et procéder par trigonalisation.*

Exercice 51
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = S^2 + S + I_n$.

2. À quelle condition supplémentaire y a-t-il unicité d'une telle matrice S ?

Exercice 52
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme admettant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que u est diagonalisable et que si $f \in \mathscr{L}(E)$ commute avec u, alors toute base de diagonalisation de u est une base de diagonalisation de f.
En déduire la dimension du sous-espace $\mathcal{C}(u) = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ u = u \circ f\}$ de $\mathscr{L}(E)$.

2. Dénombrer les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Exercice 53
Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g \circ f = f \circ g$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

2. On suppose que f possède trois valeurs propres distinctes. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

3. On suppose que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

4. Trouver f tel que $\mathcal{C}$ soit de dimension 5.