CH XIII (1/2) : Endomorphismes d'un espace euclidiens - Isométries vectorielles

Rappels

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ si :
  × E un espace vectoriel RÉEL.
  × E est de dimension finie.
  × $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
  (un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie)
- Un espace euclidien $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ est toujours muni d'une norme (dite euclidienne) issue du produit scalaire. Plus précisément :

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

  En particulier : $\boxed{\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \langle x, x\rangle}$
- Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne. Pour ce faire, il suffit de choisir une base $\mathscr{B}$ de E et de munir E du produit scalaire :

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}} & : & E\times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \end{array}$$

  On remarque au passage que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}}$.
- Inversement, tout espace euclidien $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ admet une base orthonormée. Pour obtenir une telle base, il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à n'importe quelle base $\mathscr{B}$ de E. Rappelons de plus que si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale : $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}}$.
- Les bases orthonormées sont des bases adaptées aux calculs. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orhtonormale alors :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \cdot e_k$$

- Rappelons enfin que si :
  × $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ est un espace préhilbertien RÉEL (de dimension finie ou non).
  × F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.
  alors :

$$\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$$

  En particulier, dans un espace euclidien, F et $F^{\perp}$ sont toujours des espaces supplémentaires dans E.

I. Isométries vectorielles

I.1. Définitions

Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que l'endomorphisme f est une **isométrie** de E (ou **un endomorphisme orthogonal de** E), s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$$

  Autrement dit, un endomorphisme de E est une isométrie vectoriel s'il conserve la norme.
- On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Remarque

- On peut s'intéresser à l'étymologie du terme isométrie. Il est formé :
  - × du préfixe **iso** (qui provient du grec ancien *isos*) qui signifie égal.

    Ce préfixe se retrouve dans les termes : isocèle (du grec ancien *isoskelês* - « aux jambes égales »), isomorphe (*isos* et *morphé* - « forme »), isobares (lignes de même pression atmosphérique), ...
  - × du suffixe **métrie** (qui provient du grec ancien *métron*) qui signifie mesure.

    Ce suffixe se retrouve notamment dans le terme goniomètre (du grec ancien *gônia* - « angle ») ou dans le terme trigonométrie (*trigonos* - « triangulaire »).
- On peut citer des premiers exemples d'isométries vectorielles :
  - × l'application id_E est évidemment une isométrie vectorielle.
  - × les projecteurs p qui ne coïncident pas avec id_E (c'est-à-dire les applications $p \in \mathscr{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$ et $\mathrm{Im}(p) \neq E$), ne sont `JAMAIS` des isométries vectorielles. Tout simplement car pour tout élément $x \in \mathrm{Ker}(p)$ tel que $x \in \mathrm{Ker}(p)$:

    $$\|p(x)\| = \|0_E\| \ = \ 0 \ \neq \ \|x\|$$
  - × les symétries s (applications $s \in \mathscr{L}(E)$ telles que $s \circ s = \mathrm{id}_E$) ne sont pas forcément des isométries vectorielles. Plus précisément, seules les symétries orthogonales sont des isométries.
- La discussion sur les projecteurs permet de mettre en avant une propriété important des isométries vectorielles : ce sont forcément des endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ injectifs. En effet, si ce n'est pas le cas (c'est-à-dire si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$) alors il existe $x \neq 0_E$ tel que $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi :

  $$\|f(x)\| = \|0_E\| \ = \ 0 \ \neq \ \|x\|$$

  L'espace vectoriel E étant de dimension finie, on en conclut que les isométries vectorielles sont des automorphismes.

I.2. Caractérisation des isométries vectorielles

Théorème 1.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

	L'endomorphisme f est une iométrie vectorielle
$\Leftrightarrow$	*L'endomorphisme f conserve la norme*
$\Leftrightarrow$	*L'endomorphisme f conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :* $\forall (x,y) \in E \times E, \ \langle\, f(x), f(y) \,\rangle = \langle x, y \rangle$
$\Leftrightarrow$	*L'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée*
$\Leftrightarrow$	$f(\mathscr{B}_0) = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ *est une base orthonormée de E*

Démonstration.

1) C'est la définition.

2) $(\Rightarrow)$ Supposons que f conserve la norme.
Rappelons les identités de polarisation :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall (x,y) \in E^2, \ \langle x, y \rangle & = & \dfrac{1}{2} \Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \Big) \\ & = & \dfrac{1}{4} \Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \Big) \end{array}}$$

Soit $(x,y) \in E \times E$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \langle\, f(x), f(y) \,\rangle & = & \dfrac{1}{2} \Big(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \Big) \\ & = & \dfrac{1}{2} \Big(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \Big) \\ & = & \dfrac{1}{2} \Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \Big) \ = \ \langle x, y \rangle \end{array}$$

($\Leftarrow$) Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, x\rangle} \ = \ \|x\| \end{aligned}$$

3) ($\Rightarrow$) Supposons que f conserve la norme (et donc le produit scalaire d'après le point précédent).
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée.
Démontrons que $\mathscr{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base orthonormée.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\langle\, f(e_i), f(e_j)\,\rangle \ = \ \langle e_i, e_j\rangle \ = \ \delta_{i,j} \quad \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est une base orthonormée)}$$

($\Leftarrow$) Supposons que l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Alors $\mathscr{B}_1 = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est aussi une base orthonormée de E.
Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Alors : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ et :

× $\|x\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_0$ est une BON.

× $\big\|f(x)\big\|^2 = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i) \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ car $\mathscr{B}_1$ est une BON. □

I.3. L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$

Théorème 2.
Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

1) $\boxed{\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)}$

2) La loi $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}(E)$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (f, g, h) \in \big(\mathrm{O}(E)\big)^2,\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *(associativité)*

b. $\exists\ \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} \in \mathrm{O}(E), \forall f \in \mathrm{O}(E),\ f \circ \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} = \mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} \circ f = f$ *(existence d'un élément identité)*

(cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{\mathrm{O}(E)} = \mathrm{id}_E$)

c. $\forall f \in \mathrm{O}(E), \exists g \in \mathrm{O}(E),\ f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ *(g inverse de f, noté $g = f^{-1}$)*

Ces propriétés font de $\mathrm{O}(E)$ un groupe.

L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est alors nommé groupe orthogonal de E

Remarque

- La notion de groupe n'est pas officiellement au programme de `PSI`. Le terme ne sera pas utilisé (sauf s'il venait à être rappelé) dans un écrit de concours.
- Le couple $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe car la loi $\circ$ vérifie les propriétés ***a.***, ***b.*** et ***c.*** citées ci-dessus.
- Un groupe est une structure algébrique au même sens qu'un espace vectoriel en est une. La démarche pour démontrer qu'un ensemble muni d'une loi est un groupe est similaire à celle pour permettant de démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Il y a essentiellement deux manière de procéder :
  × soit on vérifie tous les axiomes de défintion d'un groupe,
  × soit on démontre que l'ensemble considéré est un sous-groupe d'un groupe de référence. Pour démontrer que $(F, \top)$ est un sous-groupe de $(E, \top)$, on démontre que F est une partie non vide de E et que l'ensemble F est stable par la loi $\top$. Il faut alors comprendre que le sous-groupe F hérite des propriétés ***a.***, ***b.*** et ***c.*** qui sont vérifiées par le sur-goupe E.

Démonstration.

(i) $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$

(ii) $\mathrm{O}(E) \neq \varnothing$ car $\mathbb{1}_{\mathrm{GL}(E)} = \mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$

(iii) Démontrons que $\mathrm{O}(E)$ est stable par la loi $\circ$.
Soit $(f, g) \in \mathrm{O}(E)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|(f \circ g)(x)\| &= \|f\big(g(x)\big)\| \\ &= \|g(x)\| \qquad \textit{(car } f \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \\ &= \|x\| \qquad \textit{(car } g \in \mathrm{O}(E)\textit{)} \end{aligned}$$

□

Démonstration. □

I.4. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par isométrie vectorielle

Théorème 3.

0) *Supposons :* $f \in \mathrm{GL}(E)$.

$$\boxed{\textit{L'espace } F \textit{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \textit{L'espace } F \textit{ est stable par } f^{-1}}$$

1) *Supposons :* $f \in \mathrm{O}(E)$.

$$\boxed{\begin{array}{rl} & \forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \\ \Leftrightarrow & \forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle \end{array}}$$

2) *Supposons :* $f \in \mathrm{O}(E)$.

$$\boxed{\textit{L'espace } F \textit{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \textit{L'espace } F^{\perp} \textit{ est stable par } f}$$

(rappelons : F *est stable par* $f \;\Leftrightarrow\; \forall u \in F,\ f(u) \in F$*)*

II. Matrices orthogonales

II.1. Définition

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- On dit que la matrice A est orthogonale si ${}^tA \times A = I_n$.
- On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales.

II.2. Caractérisation des matrices orthogonales

Théorème 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

La matrice A est orthogonale
$\Leftrightarrow\ {}^tA \times A = I_n$
$\Leftrightarrow\ A \times {}^tA = I_n$
$\Leftrightarrow$ *A est inversible et* $A^{-1} = {}^tA$
$\Leftrightarrow$ *Les colonnes de A constituent une base orthonormée de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
$\Leftrightarrow$ *Les lignes de A constituent une base orthonormée de* $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

Démonstration.

□

II.3. Lien entre matrices orthogonales et espaces euclidiens

II.3.a) Les matrices orthogonales sont des matrices de changement de base orthonormée

Théorème 5.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien.*

Soit $\mathscr{B}_0$ *une base orthonormée de* E.

Soit $\mathscr{B}$ *une base de* E.

$$\boxed{\text{La base } \mathscr{B} \text{ est orthonormée} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La matrice } P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \text{ est orthogonale}}$$

Démonstration. □

II.3.b) Les matrices orthogonales sont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des isométries vectorielles

Théorème 6.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien.*

Soit $\mathscr{B}$ *une base de* E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) *Si la base* $\mathscr{B}$ *est une* **base orthonormée** *de* E *alors :*

$$\boxed{f \in \mathrm{O}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(E)}$$

2) *Si la base* $\mathscr{B}$ *est une* **base orthonormée** *de* E, *l'application linéaire :*

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ & & \mathrm{O}(E) & \to & \mathrm{O}_n(E) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. □

II.4. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Théorème 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$

2) La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall (A,B,C) \in \big(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
(associativité)

b. $\exists\ \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} = \mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \times A = A$
(existence d'un élément identité)

(cet élément identité n'est autre que $\mathbb{1}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} = I_n$)

c. $\forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ A \times B = B \times A = I_n$
(B inverse de A, noté $B = A^{-1}$)

Ces propriétés font de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ un groupe.

L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est alors nommé groupe orthogonal.

3) $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \ \Rightarrow\ \big(\det(A)\big)^2 = 1}$

4) L'ensemble des matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 constitue aussi un groupe appelé groupe spécial orthogonal, noté $\mathrm{SO}(n)$ ou encore $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Remarque

- Rappelons que, par définition, pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et toute base $\mathscr{B}$ de E :

$$\det(f) \ = \ \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) \ = \ \pm 1$$

  La dernière égalité est obtenue par le théorème précédent et le fait que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
- De la même manière que pour $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on peut mentionner que l'ensemble des isométries vectorielle de déterminant 1 forme un sous-groupe de (E) appelé groupe spécial orthogonal et noté $\mathrm{SO}(E)$. L'étude de ce groupe n'est pas au programme. C'est une approche purement matricielle qui a été préférée.

III. Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3

III.1. Relation d'orientation

III.1.a) Défintion

Définition

Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E.

- On dit que $\mathscr{B}_1$ a **la même orientation** que $\mathscr{B}_2$ si $\det(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}) > 0$.
- Dans la suite, on note : $\mathscr{B}_1 \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}_2$ pour signifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ont même orientation.

III.1.b) Classes d'équivalence de la relation d'orientation

Théorème 8.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

- *La relation binaire $\mathcal{R}$ est :*
  - × *réflexive,*
  - × *symétrique,*
  - × *transitive.*

  Une telle relation définit une relation d'équivalence.
- *Il n'existe que deux orientations possibles. Ces deux orientations permettent de définir deux ensembles distincts :*
  - × *l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 1 ».*
    Ces bases seront dites **directes**.
  - × *l'ensemble des bases de E qui est « d'orientation 2 ».*
    Ces bases seront dites **indirectes**.

  Ces deux ensembles définissent une partition de l'ensemble des bases de E.
- *L'espace E est alors dit* **orienté**.

Remarque

Nous avons déjà rencontré d'autres relations binaires qui sont des **relations d'équivalence** :

× $\underset{x \to x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur les fonctions définies au voisinage du point x_0.

× $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur les propriétés mathématiques.

× la relation de similitude (celle qui relie deux matrices semblables) est une relation d'équivalence sur les matrices.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
  - × La relation est réflexive : $\forall \mathscr{B}, \mathscr{B} \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}$.
    Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n$ et ainsi :
    $$\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}) = 1 > 0$$
  - × La relation est symétrique : $\forall \mathscr{B}_1, \forall \mathscr{B}_2,\ \mathscr{B}_1 \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}_2 \ \Rightarrow\ \mathscr{B}_2 \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}_1$.
    Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E.
    Supposons $\mathscr{B}_1 \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}_2$. Ainsi : $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) > 0$.
    Or $P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} = \left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)^{-1}$ et donc :
    $$\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}\right) = \det\left(\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right)} > 0$$
  - × La relation est transitive : $\forall (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}3),\ \left.\begin{array}{c} \mathscr{B}_1 \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}_2 \\ \mathscr{B}_2 \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{B}_1 \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}_3$.
    Soient $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ des bases de E.
    Supposons $\mathscr{B}_1 \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_2 \mathrel{\mathcal{R}} \mathscr{B}_3$.
    Ainsi : $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) > 0$ et $\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}\right) > 0$. Or :
    $$P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3} \ = \ P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\ P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}$$

- Soient $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.
  Notons $\mathscr{B}_2 = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors :
  $$\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) \;=\; \det\left(\text{Diag}(-1, 1 \dots, 1)\right) = -1 < 0$$
  Ainsi, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ne sont pas dans la même classe d'équivalence. Démontrons alors que toute autre base $\mathscr{B}$ est soit dans la classe d'équivalence de $\mathscr{B}_1$ (c'est-à-dire $\mathscr{B}\ \mathcal{R}\ \mathscr{B}_1$) ou dans celle de $\mathscr{B}_2$ (c'est-à-dire $\mathscr{B}\ \mathcal{R}\ \mathscr{B}_2$). En effet :
  $$\begin{aligned} \det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}\right) &= \det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \times P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right) \\ &= -\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right) \end{aligned}$$
  En particulier, si $\mathscr{B}_1$ est un base orthonormée directe et $\mathscr{B}_2$ une base orthonormée indirecte, alors, pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$:
  - × si $\mathscr{B}$ est orthonormée directe alors $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}\right) = 1$ et $\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right) = -1$.
  - × si $\mathscr{B}$ est orthonormée directe alors $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}\right) = -1$ et $\det\left(P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}}\right) = 1$. □

Remarque

- Orienter un espace, c'est choisir laquelle des deux orientations sera considérée comme directe (l'autre sera alors considérée comme indirecte).
- Dans $E = \mathbb{R}^n$, on choisit arbitrairement de fixer comme orientation directe (« orientation 1 ») l'orientation de la base canonique. On peut agir de même pour tous les espaces vectoriels de référence. Les bases directes sont alors celles qui ont la même orientation que les bases canoniques.
- Orienter une droite D c'est choisir un vecteur directeur v et fixer que la base (v) de D sera directe. Dans ce cas, toute autre base de D, c'est à dire toute famille $(\lambda\, v)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sera considérée comme :
  - × directe si $\lambda > 0$,
  - × indirecte si $\lambda < 0$.
- Dans un espace vectoriel orienté de dimension 3, orienter un plan P consiste à choisir un vecteur n **non inclus** dans P, puis à appeler :
  - × bases directes de P les bases (u, v) de P telles que (u, v, n) soit une base directe de E.
  - × bases indirectes de P les bases (u, v) de P telles que (u, v, n) soit une base directe de E.

III.2. Rappel sur la notion de déterminant

III.2.a) Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- On appelle forme n-linéaire sur E toute application $f : E^n \to \mathbb{K}$ qui est n-linéaire par rapport à chacune de ses n variables.
- L'ensemble des formes n-linéaires (sur E) alternées (ou de manière équivalente antisymétriques) est un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc une forme linéaire non nulle f qui engendre cet ensemble (pour toute autre forme n-linéaire alternée g, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g = \lambda\ f$).
- On appelle alors déterminant dans la base $\mathscr{B}_0$ l'unique forme n-linéaire alternée g sur E telle que : $g(e_1, \dots, e_n) = 1$. On note alors $g = \det_{\mathscr{B}_0}$.
- Deux formes n-linéaires alternées sont toujours colinéaires. Si $\mathscr{B}_1$ est une base de E, $\det_{\mathscr{B}_1}$ est une forme n-linéaire alternée et il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :
  $$\det{}_{\mathscr{B}_0} \;=\; \mu \cdot \det{}_{\mathscr{B}_1}$$
  et : $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \;=\; \mu \times \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) \;=\; \mu$.
- Rappelons enfin que, si $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ alors :
  $$\det{}_{\mathscr{B}_0}(u_1, \dots, u_n) \;=\; \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1),1} \times \dots \times a_{\sigma(n),n} \;=\; \det(A)$$
  où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\ e_i$ et :
  $$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \;=\; \left(\text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1)\ \dots\ \text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\right)$$

- En particulier, si $\mathscr{B}_1 = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, alors, d'après ce qui précède, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\boxed{\begin{aligned} & \det_{\mathscr{B}_0}\big((u_1, \dots, u_n)\big) \\ = \ & \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ = \ & \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\Big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ = \ & \det\big(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}\big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \end{aligned}}$$

III.2.b) Conséquence : calcul du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- Le calcul du déterminant de $(u_1, \dots, u_n)$ dans une base orthonormée directe est indépendant de la base orthonormée directe choisie. En effet, si $\mathscr{B}_1$ est une base orthonormée directe :

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}_0}\big(u_1, \dots, u_n\big) &= \det\big(P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}\big) \times \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \\ &= \det_{\mathscr{B}_1}\big(u_1, \dots, u_n\big) \end{aligned}$$

III.3. Produit mixte

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On considère que l'espace E est orienté.
(le choix de l'orientation directe a été fait)

Soit $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée directe de E.

- On appelle **produit mixte** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ et on note $[u_1, \dots, u_n]$, le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}_0$.

$$\begin{aligned} [u_1, \dots, u_n] &= \det_{\mathscr{B}_0}\big(\ (u_1, \dots, u_n)\ \big) \\ &= \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u_n)\Big) \end{aligned}$$

Remarque

- Le produit mixte d'une base orthonormale directe vaut 1.
- Dans le cas $n = 2$, le produit mixte $[u, v]$ est l'aire algébrique du triangle porté par u et v.
- Dans le cas $n = 3$, le produit mixte $[u, v, w]$ est le volume algébrique du parallélépipède porté par u, v et w.

Considérations géométriques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $n = 2$
  Soit $(u, v) \in E \times E$

$$\boxed{[u, v] = \text{aire } \textbf{algébrique} \text{ du parallélogramme formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

Pour faire la démonstration :

- on suppose (u,v) libre (le cas (u,v) lié donne $[u,v]=0$).
- on remarque que $(u,v) \mapsto [u,v] = \det_{\mathscr{B}_0}(u,v)$ est bilinéaire. En conséquence :

$$\begin{array}{rcll}
[u,v] & = & [u, v+\alpha\cdot u] & \textit{(pour n'importe quel } \alpha\textit{)} \\
& = & [u, p_F(v)] & \textit{(en notant } F = (\mathrm{Vect}\,(u))^{\perp}\textit{)} \\
& = & [u,h] & \textit{(en notant } h = p_F(v)\textit{)} \\
& = & [\|u\| \dfrac{u}{\|u\|}, \|h\| \dfrac{h}{\|h\|}] & \\
& = & \|u\|\ \|h\| \left[\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}\right] & \\
& = & \|u\|\ \|h\|\ \det_{\mathscr{B}_0}\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}\right) & \\
& = & \|u\|\ \|h\|\ \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1)\ \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) & \textit{(en notant } \mathscr{B}_1 = \left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}\right)\textit{)} \\
& = & \pm\|u\|\ \|h\| & \\
& = & \pm\|u\|\ \|v\| \times \sin(\widehat{u,v}) &
\end{array}$$

En particulier :

$$\boxed{\frac{1}{2}\,|\,[u,v]\,| \ = \ \text{aire du triangle formé par les vecteurs } u \text{ et } v}$$

- Dans le cas $n=3$
  Soit $(u,v,w) \in E \times E \times E$

$$\boxed{[u,v] \ = \ \begin{array}{l}\text{volume \textbf{algébrique} du parallélépipède} \\ \text{formé par les vecteurs } u,\ v \text{ et } w\end{array}}$$

Pour faire la démonstration :

- on suppose (u,v,w) libre (le cas (u,v,w) lié donne $[u,v,w]=0$).
- on remarque que $(u,v,w) \mapsto [u,v,w] = \det_{\mathscr{B}_0}(u,v,w)$ est 3-linéaire. En conséquence :

$$\begin{array}{rcll}
[u,v,w] & = & [u, v+\alpha\cdot u, w] & \textit{(pour n'importe quel } \alpha \textit{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\
& = & [u, p_F(v), w] & \textit{(en notant } F = (\mathrm{Vect}\,(u))^{\perp}\textit{)} \\
& = & [u,h,w] & \textit{(en notant } h = p_F(v)\textit{)} \\
& = & [u,h,w+\lambda\cdot u+\mu\cdot h] & \textit{(pour tout couple } (\lambda,\mu) \textit{ d'après le caractère 3-linéaire et alterné)} \\
& = & [u,h,t] & \textit{(en notant } t = p_G(w) \textit{ où } G = (\mathrm{Vect}\,(u,h))^{\perp}\textit{)} \\
& = & \left[\|u\| \dfrac{u}{\|u\|}, \|h\| \dfrac{h}{\|h\|}, \|t\| \dfrac{t}{\|t\|}\right] & \\
& = & \|u\|\ \|h\|\ \|t\| \left[\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}, \dfrac{t}{\|t\|}\right] & \\
& = & \|u\|\ \|h\|\ \|t\|\ \det_{\mathscr{B}_0}\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}, \dfrac{t}{\|t\|}\right) & \\
& = & \|u\|\ \|h\|\ \|t\|\ \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1)\ \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_1) & (\mathscr{B}_1 = \left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{h}{\|h\|}, \dfrac{t}{\|t\|}\right)) \\
& = & \pm\|u\|\ \|h\|\ \|t\| & \\
& = & \pm\|u\|\ \|v\| \times \sin(\widehat{u,v}) \times \|t\| & \\
& = & \pm\|u\|\ \|v\| \times \sin(\widehat{u,v}) \times \|w\| \times \cos\left(\widehat{w,t}\right) & \\
& = & \langle u \wedge v, w\rangle & \textit{(où } u\wedge v \textit{ est défini plus loin)}
\end{array}$$

III.4. Produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension 3

III.4.a) Définition

Définition

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** où E est de dimension 3.
Soit $(u, v) \in E^2$.

- Comme $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :
$$\forall x \in E, \ [u, v, x] \ = \ \langle a, x \rangle$$
Ce vecteur est noté $u \wedge v$ et s'appelle le produit le **produit vectoriel** de u et v.

Remarque

- De manière équivalente, pour tout $(u, v) \in E \times E$, on peut définir $u \wedge v$ par :
  - × si u et v sont colinéaires alors $u \wedge v = 0$.
  - × si u et v ne sont pas colinéaires :
    - ▸ $u \wedge v$ orthogonal à u et $u \wedge v$ orthogonal à v
    - ▸ $\big(u, v, u \wedge v\big)$ est une base directe
    - ▸ $\| u \wedge v \| \ = \ \| u \| \ \| v \| \times \sin(\widehat{u, v})$
- Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe alors :
$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1 \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

III.4.b) Propriétés du produit vectoriel

Théorème 9. *(propriétés du produit vectoriel)*

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ *un espace euclidien* **orienté** *où* E *est de dimension* 3.

1. $\boxed{\forall (u, v, x) \in E^3, \ [u, v, x] \ = \ \langle u \wedge v, x \rangle}$

2. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ u \wedge v \ = \ -v \wedge u}$

3. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ u \wedge v \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ \text{Les vecteurs } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}}$

4. *L'application* $\begin{array}{ccccc} E & \times & E & \to & u \wedge v \\ (u & , & v) & \mapsto & E \end{array}$ *est bilinéaire et alternée.*
(ou de manière équivalente : bilinéaire et antisymétrique)

5. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ \text{Le vecteur } u \wedge v \text{ est orthogonal à } u \text{ et à } v}$

En particulier, si la famille (u, v) *est libre :* $\big(\mathrm{Vect}\,(u, v)\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(u \wedge w)$.

6. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \ \text{La famille } (u, v) \text{ est libre} \ \Rightarrow \ \begin{array}{l}\text{La famille } (u, v, u \wedge v) \\ \text{est une base directe de } E\end{array}}$

En particulier, si $u \neq 0_E$ *et* $v \neq 0_E$ *sont orthogonaux alors* $\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}, \dfrac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|} \right)$ *est une base orthonormée directe de* E.

7. *Soit* $\mathscr{B}_0$ *une base orthonormée directe de* E. *Soit* $(u, v) \in E^2$. *On note :*
- × (u_1, u_2, u_3) *les coordonnées de* u *dans* $\mathscr{B}_0$.
- × (v_1, v_2, v_3) *les coordonnées de* v *dans* $\mathscr{B}_0$.

$u \wedge v$ *est de coordonnées* $\Big(u_2\, v_3 - u_3\, v_2, -\big(u_1\, v_3 - u_3\, v_1\big), u_1\, v_2 - u_2\, v_1\Big)$ *dans la base* $\mathscr{B}_0$

Cas particulier de l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2\, v_3 - u_3\, v_2 \\ -(\ u_1\, v_3 - u_3\, v_1\ ) \\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1 \end{pmatrix}}$$

8. $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \| u \wedge v \| = \| u \| \ \| v \| \times \sin(\widehat{u, v})}$

9. *Identité de Lagrange :* $\boxed{\forall (u, v) \in E^2, \| u \wedge v \|^2 + \langle u, v \rangle^2 \ = \ \| u \|^2 \times \| v \|^2}$

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

IV.1. Classification des matrices orthogonales en dimension 2

Théorème 10.

1. *Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*

$$\boxed{\begin{array}{rl} & A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow & \exists \theta \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \texttt{OU} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \end{array}}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note alors :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\det\big(R(\theta)\big) = 1}$ *et* $\boxed{\det\big(S(\theta)\big) = -1}$

3. ***a)*** $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{R(\theta)^{-1} = {}^t\big(R(\theta)\big) = R(-\theta)}$

b) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{S(\theta)^{-1} = {}^t\big(S(\theta)\big) = S(\theta)}$

4. ***a)*** $\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta_1) \times R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)}$

(en particulier les matrices $R(\theta_1)$ et $R(\theta_2)$ commutent)

b) $\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta_1) \times S(\theta_2) = R(\theta_1 - \theta_2)}$

$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{R(\theta_1) \times S(\theta_2) = S(\theta_1 + \theta_2)}$

$\forall (\theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{S(\theta_2) \times R(\theta_3) = S(\theta_2 - \theta_3)}$

En particulier, pour tout $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$R(\theta_1) \times S(\theta_2) \times R(\theta_3) = S(\theta_1 + \theta_2) \times R(\theta_3) = S(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)$$

5. $R(0) = I_2$ *et :* $\boxed{\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2,\ R(\theta_1) = R(\theta_2) \ \Leftrightarrow\ \theta_1 - \theta_2 \equiv 0 [2\pi]}$

6. • *L'ensemble $\{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales directes. Il est noté $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ (on parle alors du groupe spécial orthogonal), ou encore $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$. Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont des* **matrices de rotations** *(parmi elles I_2 et $-I_2$).*

• *Si $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'application $X \mapsto AX$ est une rotation qui agit sur $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.*

7. • *L'ensemble $\{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales indirectes. Il est parfois noté $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$.*

• *Si $A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'application $X \mapsto AX$ est une* **symétrie orthogonale** *qui agit sur $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Plus précisément, $X \mapsto AX$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$ (constituée des vecteurs invariants par l'endomorphisme canoniquement associé à A).*

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & M^T M = I_2 \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab + cd & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \exists (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{l} a = \cos(\theta),\ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha),\ d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta)\ \cos(\alpha) + \sin(\theta)\ \sin(\alpha) = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \exists (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{l} a = \cos(\theta),\ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha),\ d = \sin(\alpha) \\ \cos(\theta - \alpha) = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \exists (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{l} a = \cos(\theta),\ c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\alpha),\ d = \sin(\alpha) \\ \alpha - \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \alpha - \theta \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{array} \right. \end{array}$$

Or :
$$\alpha - \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \theta) + 2\,k\pi$$
Par ailleurs, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

× $b = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta + 2\,k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \sin(-\theta)$

× $d = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta + 2\,k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \cos(-\theta)$

On agit de manière similaire pour le second cas. On obtient bien le résultats souhaité.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
$$\det\big(R(\theta)\big) \ = \ \big(\cos(\theta)\big)^2 + \big(\sin(\theta)\big)^2 \ = \ 1$$
$$\det\big(S(\theta)\big) \ = \ -\Big(\ \big(\cos(\theta)\big)^2 + \big(\sin(\theta)\big)^2\ \Big) \ = \ -1$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Comme $R(\theta) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$: $\big(R(\theta)\big)^T = \big(R(\theta)\big)^{-1}$.
$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \big(R(\theta)\big)^T$$

b) Comme $S(\theta) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$: $\big(S(\theta)\big)^T = \big(S(\theta)\big)^{-1}$.
$$\big(S(\theta)\big)^T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = S(\theta)$$

c) Évident.

4. Soit $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$.

a)
$$\begin{aligned}
& R(\theta_1) \times R(\theta_2) \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\ \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\ \sin(\theta_2) & -\big(\cos(\theta_1)\ \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\ \cos(\theta_2)\big) \\ \sin(\theta_1)\ \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_1)\ \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & R(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
& S(\theta_1) \times S(\theta_2) \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\ \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\ \sin(\theta_2) & -\big(\ \sin(\theta_1)\ \cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\ \sin(\theta_2)\ \big) \\ \sin(\theta_1)\ \cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_1)\ \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & -\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & R(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

De la même manière :
$$\begin{aligned}
& R(\theta_1) \times S(\theta_2) \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\ \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\ \sin(\theta_2) & \sin(\theta_1)\ \cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\ \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\ \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\ \sin(\theta_2) & -\big(\cos(\theta_1)\ \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\ \sin(\theta_2)\big) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & S(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

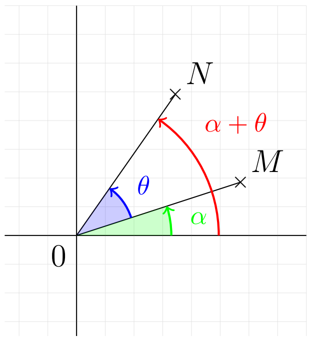
Enfin :
$$\begin{aligned}
& R(\theta_1) \times S(\theta_2) \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\ \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\ \sin(\theta_2) & \sin(\theta_1)\ \cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\ \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\ \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\ \sin(\theta_2) & -\big(\cos(\theta_1)\ \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\ \sin(\theta_2)\big) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\
= \ & S(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

5. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. $R(\theta_1) = R(\theta_2) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{i\,\theta_1} = \mathrm{e}^{i\,\theta_2} \ \Leftrightarrow\ \theta_1 - \theta_2 \equiv 0[2\,\pi]$ ☐

Aspects géométriques

- Pour bien comprendre la notion de matrice de rotation en dimension 2, un peu de géométrie du plan s'impose. Rappelons qu'à tout point $M(x, y)$ du plan $\mathbb{R}^2$ est associé l'unique complexe $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ (appelé affixe de M).

  Le nombre complexe z peut être présenté sous sa forme trigonométrique : il existe un unique couple $(r, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \,]-\pi, \pi[$ tel que $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\alpha}$.



  Par la rotation d'angle θ, le point M est envoyé sur le point N d'affixe :
$$r\,\mathrm{e}^{i\,(\alpha+\theta)} = r\,\mathrm{e}^{i\,\alpha}\,\mathrm{e}^{i\,\theta} = z \times \mathrm{e}^{i\,\theta}$$
  En terme d'action sur les affixes, la rotation d'angle de mesure θ peut être vue comme la fonction :
$$\begin{array}{ccc} z & \mapsto & \mathrm{e}^{i\,\theta}\,z \\ \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \end{array}$$
  Déterminons maintenant la matrice représentation de la rotation d'angle de mesure θ dans la base $\mathscr{B} = \Big((1, 0), (0, 1)\Big)$:

  × $(1, 0)$ est le point d'affixe $1 + 0 \cdot i = 1 = \mathrm{e}^{i\,0}$.
  Il est envoyé sur le point d'affixe $\mathrm{e}^{i\,\theta} \times \mathrm{e}^{i\,0} = \mathrm{e}^{i\,\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$

  × $(0, 1)$ est le point d'affixe $0 + 1 \cdot i = i = \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{2}}$.
  Il est envoyé sur le point d'affixe :
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{i\,\theta} \times \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{2}} & = & \mathrm{e}^{i\,(\theta+\frac{\pi}{2})} \\ & = & \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i\,\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ & = & \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) \\ & = & \sin(-\theta) + i\,\cos(-\theta) \end{array}$$

  Ainsi, le point $(1, 0)$ est envoyé sur $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ et le point $(0, 1)$ est envoyé sur $\big(-\sin(\theta), \cos(\theta)\big)$. On en déduit que la rotation d'angle de mesure θ a pour matrice dans la base $\mathscr{B}$:
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- Soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.
  L'ensemble $F = \mathrm{Ker}(A - I_2)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par l'application $f_A : X \mapsto AX$. En effet :
$$\begin{array}{rcl} F & = & \mathrm{Ker}(A - I_2) \\ & = & \{X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\ & = & \{X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid f_A(X) = X\} \end{array}$$
  Trois cas se présentent alors :

  × si $\dim(F) = 2$, alors $F = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (inclusion et égalité des dimensions). Ainsi : $A = I_2$.

  × si $\dim(F) = 1$, alors l'ensemble des vecteurs invariants par f_A est une droite vectorielle de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Dans ce cas, f_A est une symétrie orthogonale par rapport à F (axe de cette symétrie) et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = S(\theta)$.

  Déterminons $\mathrm{Ker}\,\big(S(\theta) - I_2\big)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
$$\begin{array}{rl} X \in \mathrm{Ker}\,\big(S(\theta) - I_2\big) & \Leftrightarrow \ \big(S(\theta) - I_2\big)\,X = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \big(\cos(\theta) - 1\big)\,x & + & \sin(\theta)\,y & = & 0 \\ \sin(\theta)\,x & - & \big(\cos(\theta) + 1\big)\,y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)x + \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)y\right) & = & 0 \\ -2\,\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)x + \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)y\right) & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \ \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)y = 0 \end{array}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\big(S(\theta) - I_2\big) &= \left\{ X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid \langle X, \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \rangle = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \right\}^{\perp}\end{aligned}$$

Ainsi, par inclusion et égalité des dimenstions :

$$\operatorname{Ker}\big(S(\theta) - I_2\big) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}\right)$$

× si $\dim(F) = 0$, alors seul $0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ est invariant par f_A.
Dans ce cas, f_A est une rotation vectorielle de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

- L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array} \right.$ est donc un morphisme de groupes.
- L'ensemble $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif.
- L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & \big(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times\big) \\ \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array} \right.$ est un morphisme surjectif de noyau $2\pi\,\mathbb{Z}$.

IV.2. Conséquence : classification des isométries vectorielles en dimension 2

Théorème 11.

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien **orienté** *où E est de dimension 2.*
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Deux cas se présentent.

1. *Si* $\det(f) = 1$

- *Dans ce cas, dans* `TOUTE` *base orthonormale* **directe** *$\mathscr{B}$ de E :*

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$$

  où le réel θ, unique modulo 2π, ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.
- *L'application f est une* **rotation vectorielle**.
- *Le réel θ est appelé* **mesure de l'angle** *de la rotation f.*

2. *Si* $\det(f) = -1$

- *Dans ce cas, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de E telle que :*

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- *L'application f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, c'est-à-dire par rapport à un hyperplan de E.*
  On dit alors que f est une **réflexion**.

Démonstration.

- Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.

$$\begin{aligned}\det(f) &= \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) && \textit{(par définition)}\\ &= \pm 1 && \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \textit{ d'après le Théorème 6)}\end{aligned}$$

  Dans la suite, on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

- Deux cas se présentent alors.
  - × Si $\det(f) = 1$ alors $M \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ (car $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det(M) = 1$).
    D'après le Théorème 11, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $M = R(\theta)$.

    Il reste alors à démontrer que le réel θ, unique modulo 2π, ne dépend pas de la base orthonormale choisie. Considérons alors $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases orthonormales directes. Ces bases étant orthonormées, la première partie de la démonstration permet de conclure qu'il existe $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

    $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = R(\theta_1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) = R(\theta_2)$$

    Par ailleurs :

    - ▸ $P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ puisque $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont des bases orthonormales, *(en particulier :* $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) = \pm 1$*)*
    - ▸ $P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$. En effet : $\det\left(P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\right) > 0$ puisque $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ont même orientation.

    Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = R(\alpha)$.
    Par formule de changement de base :

    $$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) &= P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) \times P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}\\ &= R(\alpha) \times R(\theta_2) \times R(-\alpha)\\ &= R\big(\alpha + \theta_2\big) \times R(-\alpha)\\ &= R\big(\alpha + \theta_2 - \alpha\big)\\ &= R(\theta_2)\end{aligned}$$

    Ainsi : $R(\theta_1) = R(\theta_2)$ et donc $\theta_1 - \theta_2 \equiv 0[2\pi]$.

  - × Si $\det(f) \neq 1$ alors $\det(f) = -1$.
    Alors $M \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ (car $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det(M) = -1$).
    D'après le Théorème 11, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $M = S(\theta)$.

    Il reste alors à trouver une base orthonormée $\mathscr{B}'$ telle que :

    $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    Notons alors $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ et définissons les vecteurs :

    - ▸ $e_1' = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cdot e_1 + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cdot e_2$
    - ▸ $e_2' = -\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cdot e_1 + \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cdot e_2$

    $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) =$$

    Alors $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée et $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = R\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
    Par formule de changement de base :

    $$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\\ &= R\left(-\tfrac{\theta}{2}\right) \times S(\theta) \times R\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\\ &= S\left(-\tfrac{\theta}{2} + \theta\right) \times R\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\\ &= S\left(-\tfrac{\theta}{2} + \theta - \tfrac{\theta}{2}\right)\\ &= S(0)\end{aligned}$$

□

Remarque

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. L'inverse de la rotation d'angle θ est la rotation d'angle $-\theta$, et la composée des rotations d'angle θ et θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

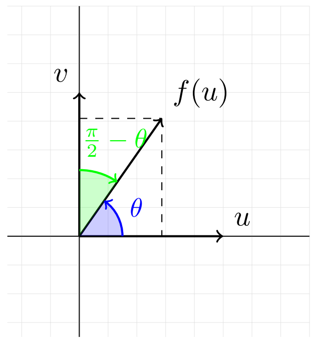
2. La rotation d'angle 0 est id_E, de matrice $R(0) = I_2$, et la rotation d'angle π est $-\mathrm{id}_E$, de matrice $R(\pi) = -I_2$. Ce sont les deux seules (matrices de) rotations diagonalisables (sur $\mathbb{R}$), et les autres n'ont pas de valeur propre réelle.

3. Si f est une rotation vectorielle d'angle de mesure θ alors, pour tout vecteur **unitaire** u (c'est-à-dire tel que $\|u\| = 1$) :

× $\cos(\theta) = \langle u, f(u) \rangle$.

× $\sin(\theta) = [u, f(u)]$.

Précisons ce dernier point.



Pour obtenir la mesure θ de l'angle de la rotation vectorielle f, on complète la famille (u) en une BOND $\mathscr{B} = (u, v)$. Dans cette base :

$$\begin{array}{rcccccccc} u & = & 1 & \cdot & u & + & 0 & \cdot & v \\ f(u) & = & \cos(\theta) & \cdot & u & + & \sin(\theta) & \cdot & v \end{array}$$

De sorte que :

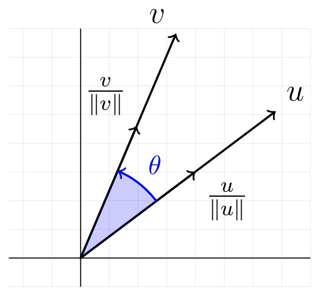
$$[u, f(u)] = \det_{\mathscr{B}}\big(u, f(u)\big) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{vmatrix} \;=\; \sin(\theta)$$

4. Soient $(u, v) \in \big(E \setminus \{0_E\}\big)^2$, où E est un espace euclidien orienté de dimension 2.

Alors il existe une unique rotation vectorielle r telle que :

$$r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \;=\; \frac{v}{\|v\|}$$

On définit la mesure de l'angle (u, v) comme la mesure de l'angle de cette rotation r. Cette mesure dépend du choix que l'on a fait pour l'orientation du plan E et est notée $\mathrm{mes}(u, v)$.



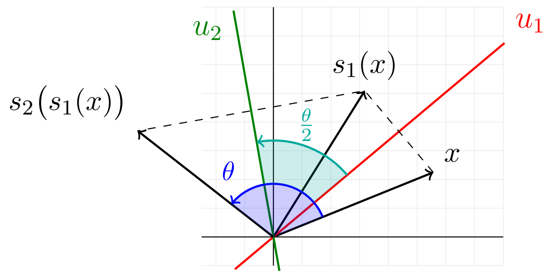
5. Par isomorphisme de représentation, on déduit du Théorème 10 ***4.b)*** qu'une rotation peut s'écrire comme composée de deux réflexions (la première pouvant être choisie arbitrairement). Plus précisément :

× soit s_1 la réflexion par rapport à $D_1 = \mathrm{Vect}\,(u_1)$,

× soit s_2 la réflexion par rapport à $D_2 = \mathrm{Vect}\,(u_2)$,

alors $s_2 \circ s_1$ est la rotation d'angle $2\,\mathrm{mes}(u_1, u_2)$.

On peut en conclure que $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions (dans le cas où E est de dimension 2).



V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

V.1. Étude rapide de l'ensemble des vecteurs invariants d'une isométrie vectorielle directe

Théorème 12.

A) *Cas général*

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

On note $n = \dim(E)$. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \quad \Rightarrow \quad \big|\,\lambda\,\big| = 1}$$

B) *Cas de la dimension* 3

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

On suppose $\dim(E) = 3$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

0. *L'endomorphisme f possède une valeur propre réelle.*

1. $\boxed{f \in \mathrm{O}(E) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \neq \varnothing \quad \texttt{ET} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \ \subset \ \{-1, 1\}}$

(si $\dim(E) = 3$*, toute isométrie vectorielle de E possède* 1 *et/ou* -1 *comme seules valeurs propres réelles)*

2. $\boxed{f \in \mathrm{SO}(E) \quad \Rightarrow \quad 1 \in \mathrm{Sp}(f)}$

(si $\dim(E) = 3$*, toute isométrie vectorielle* **directe** *de E possède* 1 *comme seule valeur propre réelle)*

Démonstration.

A) Supposons $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors :

$$\begin{array}{rcll} \|f(x)\| & = & \|\,\lambda\cdot x\,\| & \textit{(car } x \in E_\lambda(f)\textit{)} \\ & = & \big|\,\lambda\,\big| \times \|x\| & \end{array}$$

Or, comme $f \in \mathrm{O}(E)$: $\|f(x)\| = \|x\|$.

On en conclut :

$$\big|\,\lambda\,\big| \times \|x\| = \|x\|$$

et, comme $x \neq 0_E$ (puisque x est un vecteur propre) : $|\lambda| = 1$.

B) 0. Comme $\dim(E) = 3$, alors χ_f est un polynôme **unitaire** de degré 3.

La fonction polynomiale est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et vérifie :

× $\chi_f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

× $\chi_f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

On en conclut, par théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $\lambda_0 \in\ ]-\infty, +\infty[$ tel que : $\chi_f(\lambda_0) = 0$.

Ainsi, λ_0 est un réel qui est valeur propre de f.

1. Supposons : $f \in \mathrm{O}(E)$. En reprenant les notations du point précédent, f possède une valeur propre rélle λ_0 qui vérifie :

$$\big|\,\lambda_0\,\big| = 1$$

Ainsi : $\lambda_0 \in \{-1, 1\}$.

2. Supposons : $f \in \mathrm{SO}(E)$.

Comme $f \in \mathrm{O}(E)$ alors f possède au moins une valeur propre réelle et les seules valeurs propres réelles sont 1 et -1.

On procède par l'absurde.

On suppose que f ne possède pas la valeur propre 1.

Ainsi, la seule valeur propre réelle de f est -1.

Comme χ_f est de degré 3, deux cas se présentent.

- -1 est de multiplicité 3 c'est-à-dire : $\chi_f(X) = \big(X - (-1)\big)^3$.
  Alors : $\det(f) = \prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \lambda^{m_\lambda(f)} = (-1)^3 = -1 \neq 1$.
  Absurde !
- -1 n'est pas de multiplicité 3
  Remarquons tout d'abord que -1 ne peut pas être de multiplicité 2 sinon χ_f possèderait une autre valeur propre réelle ce qui est exclut.

Ainsi, -1 est de multiplicité 1 et comme c'est la seule racine réelle, il existe $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ racine complexe de χ_f. Comme χ_f est un polynôme à coefficients réels, $\overline{\alpha}$ est aussi racine de χ_f. Finalement :

$$\chi_f(X) = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})\big(X-(-1)\big)$$

et $\det(f) = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \lambda^{m_\lambda(f)} = \alpha \times \overline{\alpha} \times (-1) = -|\alpha|^2 \neq 1$. Absurde ! □

Remarque

- Lorsque l'espace vectoriel d'étude E est de dimension 3, toute isométrie vectorielle **directe** possède 1 comme valeur propre. Ainsi, $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ est un sous-espace propre de f. C'est l'ensemble des vecteurs de E qui sont invariants par f. Son étude va permettre de caractériser $\mathrm{SO}(E)$.

V.2. Caractérisation des isométries vectorielles en dimension 3

Théorème 13.

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien **orienté**.

On suppose que E est de dimension 3.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Notons $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

1) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 3}$ *alors $f = \mathrm{id}_E$.*

2) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 2}$ *(***hors-programme***) alors f est la réflexion par rapport au plan F. Dans ce cas, f est une isométrie vectorielle indirecte.*

3) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 1}$ *alors :*

× *le plan vectoriel $P = \Big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)\Big)^\perp$ est stable par f,*

× *l'endomorphisme $f_{\|P}$ est une rotation de P différente de id_P.*

Dans ce cas, f est une isométrie vectorielle directe, appelée rotation d'axe $D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

4) $\boxed{\text{Si } \dim(F) = 0}$ *(***hors-programme***).*

Étude du cas $\dim\Big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)\Big) = 1$

On note $D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

Comme $\dim(D) = 1$, la droite vectorielle D est dirigée par un vecteur $a \neq 0_E$.

On note $P = D^\perp$.

On note alors θ la mesure de l'angle de la rotation $f_{\|P}$.

Ainsi, f est la rotation d'axe D et d'angle de mesure θ.

La matrice de f dans toute base base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ de la forme $\mathscr{B}' = \left(\dfrac{a}{\|a\|}, e_2, e_3\right)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\theta)$}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Remarque

- Les matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont exactement les représentations matricielles, dans une base orthonormée, des rotations vectorielles.
- Notons $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sa matrice représentative dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E. Pour démontrer que $f \in \mathrm{SO}(E)$, on étudie la matrice A et on démontre : $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Plus précisément, on démontre :

  1) $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. Il s'agit de démontrer que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note C_1, C_2 et C_3 les 3 colonnes de A et on démontre :

  $$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!],\ \langle C_i, C_j\rangle = \delta_{i,j}$$

  On peut aussi, de manière équivalente, démontrer : $A \times {}^tA = I_3$.

  2) $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Pour ce faire on peut :

  × soit démontrer $\det(A) = 1$.

  × soit démontrer : $C_3 = C_1 \wedge C_2$.
  En effet, comme $\langle C_3, C_1\rangle = 0$ et $\langle C_3, C_2\rangle = 0$ alors :

  $$C_3 \in (\mathrm{Vect}\,(C_1, C_2))^\perp = \mathrm{Vect}\,(C_1 \wedge C_2)$$

Comme $\|C_3\| = 1$ alors $C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$.

$1 = \det(A) = \det\big((C_1 \quad C_2 \quad C_3)\big) = [C_1, C_2, C_3] = \langle C_1 \wedge C_2, C_3\rangle_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

Et ainsi : $C_1 \wedge C_2 = C_3$.

3) Il reste alors à déterminer les éléments caractéristiques de f :

- l'axe de la rotation $D = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.
  Cela correspond à déterminer le sous-espace propre $E_1(f)$. On met donc en place la stratégie habituelle de détermination de sous-espace propre. Ce sous-espace propre et de dimension 1 et s'écrit donc : $D = \text{Ker}(f - \text{id}_E) = \text{Vect}\,(x)$. On note alors $a = \dfrac{x}{\|x\|}$.
  On obtient ainsi un vecteur **unitaire** qui dirige et oriente D.
- la mesure θ de l'angle de rotation.
  - le cosinus de l'angle θ est donné par :

$$\begin{array}{rcl} \text{tr}(f) & = & \text{tr}\big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) \\ & = & 1 + 2\cos(\theta) \end{array}$$

Ainsi : $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}\big(\text{ tr}(f) - 1\big)$ et donc :

$$\boxed{\theta \equiv \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\big(\text{ tr}(f) - 1\big)\right) [2\,\pi]}$$

  - il reste enfin à déterminer le signe de θ. Pour tout vecteur u unitaire et orthogonal à a :

$$\boxed{\sin(\theta) \ = \ [a, u, f(u)]}$$

Pour s'en convaincre, on considère la famille $\mathscr{B}' = (a, u, v)$ où $v = a \wedge u$. Cette famille est une base orthonormée **directe** de E.

$$\big[a, u, f(u)\big] = \det_{\mathscr{B}'}\big(a, u, f(u)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) \end{vmatrix} = \sin(\theta)$$

(ou encore : $\big[a, u, f(u)\big] = \langle a \wedge u, f(u)\rangle = \langle v, f(u)\rangle$

Exercice 1

Notons $E = \mathbb{R}^3$.

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E est $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que f est une rotation et en déterminer les caractéristiques (angle et axe).

2. Même question avec $A_2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$, puis $A_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

et enfin $A_4 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

1. (i) Démontrons tout d'abord : $A \in \text{O}_3(\mathbb{R})$

$$A \times {}^t A \ = \ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix} \ = \ \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \ = \ I_3$$

(ii) Démontrons maintenant : $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$

$$C_1 \wedge C_2 \ = \ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ = \ \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 \\ -14 \\ -42 \end{pmatrix} \ = \ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \ = \ C_3$$

Cela démontre :

$$\begin{array}{rcl} \det(A) & = & \det\big((C_1 \quad C_2 \quad C_3)\big) \\ & = & [C_1, C_2, C_3] \\ & = & \langle C_1 \wedge C_2, C_3\rangle_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & = & \langle C_3, C_3\rangle_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ = \ 1 \end{array}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } A \in \text{SO}_3(\mathbb{R}). \text{ Cela démontre : } f \in \text{SO}(E).}$

(iii) Déterminons alors l'axe de la rotation f

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$.

Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_1(f) & \Longleftrightarrow & (f - \mathrm{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A - I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & 7 \cdot (A - I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -9\,x & + & 6\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 6\,x & - & 4\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & - & 13\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
\dots & & \dots \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} -3\,x & = & -2\,y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(f) & = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ f(u) = u\big\} \\
& = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ 3\,x = 2\,y \quad \text{et} \quad z = 0\big\} \\
& = & \big\{\big(\frac{2}{3}\,y, y, 0\big) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y \in \mathbb{R}\big\} \\
& = & \big\{y \cdot \big(\frac{2}{3}, 1, 0\big) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y \in \mathbb{R}\big\} \\
& = & \mathrm{Vect}\,\big(\big(\frac{2}{3}, 1, 0\big)\big) \\
& = & \mathrm{Vect}\,((2,3,0))
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{L'endomorphisme } f \text{ est une rotation d'axe} \\ D = \mathrm{Vect}\,((2,3,0)) \text{ que l'on oriente par le vecteur unitaire} \\ a = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\ (2,3,0). \end{array}}$$

(iv) Déterminons enfin la mesure θ de l'angle de la rotation f

- D'après le cours, dans toute base orthonormée directe $\mathscr{B}' = (a, e_2, e_3)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On en conclut : $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\,\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) = 1 + 2\,\cos(\theta)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(\theta) & = & \dfrac{1}{2}\,\Big(\mathrm{tr}\,\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big) - 1\Big) \\
& = & \dfrac{1}{2}\,\Big(\mathrm{tr}\,(A) - 1\Big) \\
& = & \dfrac{1}{7}\,(-2 + 3 - 6)
\end{array}$$

Ainsi : $\theta \equiv \pm \arccos\left(\dfrac{-5}{7}\right)\ [2\pi]$.

(*il reste alors à déterminer le sens de rotation c'est-à-dire de savoir si la mesure de l'angle de rotation est* $\theta \equiv \arccos\left(\dfrac{-5}{7}\right)\ [2\pi]$ *ou* $\theta \equiv -\arccos\left(\dfrac{-5}{7}\right)\ [2\pi]$)

- Il reste à déterminer le signe de la mesure de l'angle de f.
  Le vecteur $u = (0,0,1)$ est orthogonal à a et unitaire.

$$\sin(\theta) = \big[a, u, f(u)\big] = \det_{\mathscr{B}}\big(a, u, f(u)\big) = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{-2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-6}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{7\sqrt{13}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient :

$$\sin(\theta) = -\frac{1}{7\sqrt{13}}\ \big(2 \times (-2) - 3 \times 3\big) = \frac{13}{7\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{7} > 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement, l'endomorphisme } f \text{ est la rotation vectorielle} \\ \text{d'axe } D \text{ et d'angle de mesure } \arccos\left(-\dfrac{5}{7}\right). \end{array}}$$

□