Colles

semaine 17 : 13 janvier - 18 janvier

I. Produit scalaire et norme associée

I.1. Notion de produit scalaire

Soit E un espace vectoriel RÉEL.

- On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que φ est :

  ***a)* une forme bilinéaire**

  Autrement dit, l'application φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est linéaire par rapport à chacune des variables :

  $$\boxed{\begin{array}{l} \forall y \in E,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x_1, x_2) \in E \times E \\ \varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_1 \cdot x_2, y) = \lambda_1\ \varphi(x_1, y) + \lambda_2\ \varphi(x_2, y) \end{array}} \quad \textit{(linéarité à gauche)}$$

  $$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in E,\ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (y_1, y_2) \in E \times E \\ \varphi(x, \mu_1 \cdot y_1 + \mu_1 \cdot y_2) = \mu_1\ \varphi(x, y_1) + \mu_2\ \varphi(x, y_2) \end{array}} \quad \textit{(linéarité à droite)}$$

  ***b)* symétrique** $\boxed{\forall (x, y) \in E \times E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)}$

  ***c)* définie positive**

  $$\boxed{\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0_E} \quad \textit{(caractère défini)}$$

  $$\boxed{\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0} \quad \textit{(caractère positif)}$$

- Si φ est un produit scalaire, alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, le produit scalaire de x et de y (c'est-à-dire le réel $\varphi(x, y)$) est souvent noté :

  $$\langle\ x, y\ \rangle \ \texttt{OU} \ (x \,|\, y) \ \texttt{OU} \ x \cdot y \ \left(\begin{array}{l} \textit{attention à cette notation : ne pas la} \\ \textit{confondre avec la multiplication scalaire } \cdot_E \end{array} \right)$$

I.2. Produits scalaires usuels

I.2.a) Produit scalaire associé à une base en dimension finie

Soit E un espace vectoriel RÉEL.

On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- L'application : $\begin{array}{rcl} \langle\ \cdot, \cdot\ \rangle_{\mathscr{B}} & : & E \times E \ \to \ \mathbb{R} \\ & & (x, y) \ \mapsto \ {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \end{array}$

  est un produit scalaire sur E, appelé produit scalaire associé à la base $\mathscr{B}$.
- Ce produit scalaire est dit canonique si E est un espace vectoriel de référence et que $\mathscr{B}$ est la base canonique de E.

I.2.b) Produits scalaires canoniques sur les espaces vectoriels de référence

1. **Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$**

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n),\ \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, y\rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k$$

2. **Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$**

$$\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$
$$\langle A, B\rangle \ = \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \times b_{i,j} \ = \ \mathrm{tr}({}^t AB)$$

3. **Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}_n[X]$**

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k \in \mathbb{R}_n[X], \forall Q = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot X^k \in \mathbb{R}_n[X],\ \langle P, Q\rangle \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k \times b_k$$

I.2.c) Produits scalaires non canoniques sur les espaces vectoriels de référence

1) **Un exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un n-uplet de réels deux à deux distincts.

On considère l'application $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ définie par :

$$\begin{array}{rccccl} \langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle & : & \mathbb{R}_n[X] & \times & \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R} \\ & & (\ P & , & Q\ ) & \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times Q(a_k) \end{array}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
C'est le produit scalaire associé à la *base de Lagrange* $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ relative aux scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

2) **Un autre exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$**

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on note : $\langle P, Q\rangle \ = \ \displaystyle\int_0^1 P(t)\ Q(t)\ dt$.

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

3) **Produit scalaire sur un espace vectoriel de fonctions**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit I un intervalle d'extrémités a et b.
($I = [a, b]$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou $I =]a, b[$)

Notons $E = L^2(I, \mathbb{R}) \ \cap\ \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I, continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(Rappelons qu'une fonction f est dite intégrable sur un intervalle I si :
× elle est continue par morceaux sur I,
× son intégrale sur I est **absolument** convergente.
Une fonction f est de carré intégrable si la fonction f^2 l'est.)

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

I.2.d) Les applications bilinéaires symétriques ne sont pas toutes des produits scalaires

Soit Ω un ensemble fini.

On note $\mathcal{V}_d$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω.

On note enfin φ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccccc} \varphi & : & \mathcal{V}_d & \times & \mathcal{V}_d & \to & \mathbb{R} \\ & & (\ X & , & Y\ ) & \mapsto & \mathbb{E}(XY) \end{array}$$

L'application φ est une forme bilinéaire symétrique mais elle `N`'est `PAS` définie positive. Ainsi, φ `N`'est `PAS` un produit scalaire.

Soit $X \in \mathcal{V}_d$. Alors :

- $\varphi(X, X) = \mathbb{E}(X^2) \geqslant 0$.
- si on suppose $\varphi(X, X) = 0$ alors on peut seulement conclure : $X^2 = 0$ (et donc $X = 0$) **presque sûrement**. Autrement dit, $\mathbb{P}\big(\{X = 0\}\big) = 1$.

  Par exemple, une v.a.r. X telle que : $X(\Omega) = \{0, \sqrt{2}\}$ est presque sûrement nulle mais n'est pas la variable nulle.

I.3. Notion d'espace préhilbertien / espace euclidien

Soit E un ensemble.

- Un espace euclidien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ si :
  - × E un espace vectoriel `RÉEL`.
  - × E est de dimension finie.
  - × $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
- Un espace préhilbertien est la donnée d'un couple $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ si :
  - × E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
  - × E n'est pas forcément de dimension finie.
  - × $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
- De manière générale, les espaces préhilbertiens ne sont pas des espaces euclidiens. Les espaces euclidiens sont des espaces préhilbertiens particulier. Plus précisément, les espaces euclidiens sont exactement les espaces préhilbertiens réels de dimension finie.

I.4. Norme associée à un produit scalaire

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

- On appelle **norme (euclidienne)** associée à un produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ sur E l'application $\|\ \cdot\ \|$ définie par :

$$\begin{array}{rcccc} \|\ \cdot\ \| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

En particulier : $\boxed{\forall x \in E,\ \|\,x\,\|^2 \ = \ \langle\, x, x\,\rangle}$

I.5. Propriétés des produits scalaires et des normes euclidiennes

I.5.a) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

- $\boxed{\forall\,(x,y)\in E^2,\ \big|\langle x,y\rangle\big| \ \leqslant\ \|x\|\ \|y\|}$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*

  Ce qu'on peut aussi écrire : $\boxed{\forall\,(x,y)\in E^2, \langle x,y\rangle\times\langle x,y\rangle \ \leqslant\ \langle x,x\rangle\times\langle y,y\rangle}$

  ou encore : $\boxed{\forall\,(x,y)\in E^2, \langle x,y\rangle^2 \ \leqslant\ \|x\|^2\times\|y\|^2}$

- On peut de plus caractériser le cas d'égalité.

$$\forall (x,y)\in E^2,\quad \boxed{\begin{array}{rcl} \big|\langle x,y\rangle\big| = \|x\|\ \|y\| & \Leftrightarrow & x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\[1em] & \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \exists\alpha\in\mathbb{R},\ x=\alpha\cdot y \\ \texttt{OU} & \exists\beta\in\mathbb{R},\ y=\beta\cdot x \end{array} \end{array}}$$

Démonstration.
Soit $(x,y)\in E^2$. Deux cas se présentent.

× Si $\|x\|=0$ ou $\|y\|=0$
Supposons par exemple $\|x\|=0$ (si ce n'est pas le cas, $\|y\|=0$ et ce cas se traite de manière similaire). Alors $\langle x,x\rangle=0$ et donc $x=0_E$.
On en déduit :

$$|\,\langle x,y\rangle\,| \ = \ |\,\langle 0_E,y\rangle\,| \ = \ 0 \ \leqslant\ 0 \ = \ \|0_E\|\ \|y\| \ = \ \|x\|\ \|y\|$$

× Sinon (c'est-à-dire si $\|x\|\neq 0$ et $\|y\|\neq 0$)
Tout d'abord : $\left\| \dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right\|^2 \geqslant 0$. Or :

$$\begin{array}{rcl}
\left\| \dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right\|^2 & = & \left\langle \dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\ ,\ \dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right\rangle \\[1em]
& = & \left\langle \dfrac{x}{\|x\|}\ ,\ \dfrac{x}{\|x\|}\right\rangle - \left\langle \dfrac{x}{\|x\|}\ ,\ \dfrac{y}{\|y\|}\right\rangle - \left\langle \dfrac{y}{\|y\|}\ ,\ \dfrac{x}{\|x\|}\right\rangle + \left\langle \dfrac{y}{\|y\|}\ ,\ \dfrac{y}{\|y\|}\right\rangle \\[1em]
& = & \dfrac{\langle x,x\rangle}{\|x\|^2} - \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\ \|y\|} - \dfrac{\langle y,x\rangle}{\|y\|\ \|x\|} + \dfrac{\langle y,y\rangle}{\|y\|^2} \\[1em]
& = & 1-2\ \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}+1
\end{array}$$

On en déduit : $2 \ \geqslant\ 2\ \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}$ et ainsi : $\cancel{2}\ \langle x,y\rangle \ \leqslant\ \cancel{2}\ \|x\|\ \|y\|$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (x,y)\in E^2,\ \langle x,y\rangle \ \leqslant\ \|x\|\ \|y\|}$$

En appliquant cette inégalité au couple $(x,-y)$, on obtient :

$$\langle x,-y\rangle \ \leqslant\ \|x\|\ \|-y\| \ = \ \|x\|\ \|y\|$$

On en déduit : $-\langle x,y\rangle \ \leqslant\ \|x\|\ \|y\|$ et ainsi : $-\|x\|\ \|y\| \ \leqslant\ \langle x,y\rangle$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (x,y)\in E^2,\ -\|x\|\ \|y\| \ \leqslant\ \langle x,y\rangle}$$

□

I.5.b) Identités remarquables

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

1. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 \ = \ \|x\|^2 + 2\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2}$ *(identité remarquable)*

On en déduit : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x-y\|^2 \ = \ \|x\|^2 - 2\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2}$

2. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \ = \ 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2}$ *(identité du parallélogramme)*

3.
$$\boxed{\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle \ &= \ \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\end{aligned}}$$
(identités de polarisation)

I.5.c) Propriétés caractéristiques des normes

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

1. $\boxed{\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in E,\ \|\lambda \cdot x\| \ = \ |\lambda|\ \|x\|}$ *(homogénéité d'une norme)*

2. $\boxed{\forall\, x \in E,\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E}$ *(propriété de séparation)*

3. $\boxed{\forall\, (x,y) \in E^2,\ \|\ x+y\ \| \ \leqslant\ \|x\| + \|y\|}$ *(inégalité triangulaire)*

On peut de plus caractériser le cas d'égalité.

$$\forall (x,y) \in E,\ \boxed{\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \ \Leftrightarrow\ \begin{array}{l} x = 0_E \\ \texttt{OU}\ \ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha \cdot x\end{array}}$$

4. $\boxed{\forall\, (x,y) \in E^2,\ \big|\ \|x\| - \|y\|\ \big| \ \leqslant\ \|x+y\|}$ *(inégalité triangulaire)*

5. Les propriétés d'inégalité triangulaire peuvent être résumées comme suit :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\ \|x\| - \|y\|\ \big| \ \leqslant\ \|x \pm y\| \ \leqslant\ \|x\| + \|y\|}$$

Remarque

- On appelle norme euclidienne toute norme issue d'un produit scalaire. Les identités listées permettent de faire le lien entre norme euclidienne et produit scalaire. L'identité de polarisation permet notamment de définir le produit scalaire à l'aide de la norme associée à ce produit scalaire.
- Il faut comprendre que la notion de norme existe indépendamment de la notion de produit scalaire. Ce point sera détaillé dans le chapitre « Espaces vectoriels normés ». Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés de homogénéité / séparation / inégalité triangulaire. Une norme euclidienne est évidemment une norme et vérifie donc les propriétés qui définissent la notion de norme.
- L'identité du parallélogramme (listée dans les identités remarquables) n'est vérifiée que par les normes euclidiennes. C'est même une manière de démontrer qu'une norme est (ou n'est pas !) euclidienne.

II. Orthogonalité

II.1. Familles orthogonales, familles orthonormales

II.1.a) Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

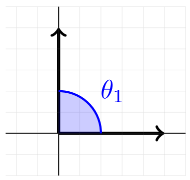
- On dit que deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont **orthogonaux** (relativement au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$) si $\langle x, y\rangle = 0$. Si c'est le cas, on note : $x \perp y$.
- On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est **orthogonale** si les éléments de $\mathcal{F}$ sont deux à deux orthogonaux.
- On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est **orthonormale** (ou **orthonormée**) si :
  - × la famille $\mathcal{F}$ est orthogonale : $\boxed{\forall (i,j) \in I^2, \Big(i \neq j \;\Rightarrow\; \langle u_i, u_j\rangle = 0\Big)}$
  - × tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont de norme 1 : $\boxed{\forall i \in I, \langle e_i, e_i\rangle = \|e_i\|^2 = 1}$

  On peut résumer ces propriétés comme suit :

$$\boxed{\text{La famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est orthonormale} \;\Leftrightarrow\; \forall (i,j) \in I^2,\ \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

II.1.b) Généralisation de la notion d'angle droit

- La notion d'orthogonalité (du grec orthos = droit, gônia = angle) dans un espace euclidien généralise celle de la géométrie plane. L'idée est de faire de la géométrie dans les espaces euclidiens et notamment de définir la notion d'angle (droit).
- La notion d'orthogonalité est liée au produit scalaire d'étude. Ainsi, deux vecteurs peuvent être orthognaux pour un produit scalaire mais ne pas l'être pour un autre.
  - × Si on considère le produit scalaire associé à la base canonique $\mathscr{B}_c = \Big((1,0),(0,1)\Big)$ de $\mathbb{R}^2$, on retrouve la définition d'orthogonalité vu au lycée.



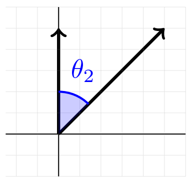
Un angle droit dans l'espace euclidien $\Big(\mathbb{R}^2,\ \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}_c}\Big)$

Plus précisément :

$$(a,b) \;\perp_{\mathscr{B}_c}\; (c,d) \;\Leftrightarrow\; ac + bd = 0$$

En particulier, $(1,0)$ et $(0,1)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

  - × Si on considère la base $\mathscr{B} = \big((1,1),(0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$, la notion d'orthogonalité diffère.



Un angle droit dans l'espace euclidien $\Big(\mathbb{R}^2,\ \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}}\Big)$

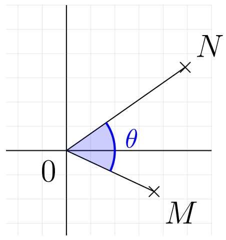
Plus précisément :

$$(a,b) \;\perp_{\mathscr{B}}\; (c,d) \;\Leftrightarrow\; 2\,a\,c + b\,d \;=\; a\,d + b\,c$$

En particulier, $(1,1)$ et $(0,1)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

II.1.c) Généralisation de la notion d'angle (pas forcément droit)

- On peut s'inspirer de la géométrie plane pour définir la notion d'angle généralisé (angle dans un espace euclidien).



Par définition du produit scalaire :

$$\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \right\rangle_{\mathscr{B}_c} = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| \times \cos(\theta)$$

Ainsi : $\cos(\theta) = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \right\rangle_{\mathscr{B}_c}}{\|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\|}$ et : $\theta = \arccos\left(\dfrac{\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \right\rangle_{\mathscr{B}_c}}{\|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\|} \right)$.

Dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on peut alors définir l'angle non orienté $\theta_{x,y}$ (valeur comprise dans $[0, \pi]$) entre deux vecteurs non nuls x et y de E par :

$$\theta_{x,y} = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \; \|y\|} \right)$$

En particulier : $\theta_{x,y} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$.

Avec cette définition, les angles θ_1 et θ_2 du schéma précédent sont bien des angles de valeur $\frac{\pi}{2}$.

II.1.d) Des exemples de familles orthogonales

Soit E un espace vectoriel `RÉEL` de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E.

Alors la famille $\mathscr{B}$ est orthogonale (et même orhonormale) pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}$.

II.2. Intérêt des familles orthogonales

II.2.a) Les familles orthogonales sont libres

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.

Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** de E est libre.

Évidemment, toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre.

II.2.b) Théorème de Pythagore

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.
On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ une famille.

1) $$\boxed{\left\| \sum_{k=1}^{p} u_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} u_i, \sum_{j=1}^{p} u_j \right\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \langle\, u_i, u_j \,\rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle\, u_i, u_i \,\rangle + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \langle\, u_i, u_j \,\rangle}$$

2) $$\boxed{\text{La famille } (u_1, \ldots, u_p) \text{ est orthogonale} \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=1}^{p} u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2}$$

II.3. Intérêt des familles orthonormales en dimension `FINIE`

II.3.a) Expression des coordonnées et du produit scalaire en base orthonormale

Soit $\big(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ une base de E.

1. $$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base orthonormale pour } \langle \cdot, \cdot \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E,\ x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k}$$

Autrement dit, la base $\mathscr{B}$ est orthonormale si et seulement si tout vecteur $x \in E$ a pour coordonnées $\big(\langle x, e_1 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle\big) \in \mathbb{R}^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

2. $$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base orthonormale pour } \langle \cdot, \cdot \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \cdot\,, \cdot \rangle = \langle \cdot\,, \cdot \rangle_{\mathscr{B}}}$$

Ainsi, dans le cas où :

- × $\mathscr{B}$ est une base orthonormale,
- × $x \in E$ a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{B}$,
- × $y \in E$ a pour coordonnées $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{B}$,

alors : $\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i = {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \langle x, y \rangle_{\mathscr{B}}}$ et $\boxed{\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Exemple

- Ce théorème stipule que, dans tout espace euclidien, le produit scalaire possède une expression simple. Cela ne signifie pas pour autant qu'il est simple d'obtenir cette expression. Cela exige de trouver une base orthonormée (on verra par la suite comment l'obtenir) et de déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base. Illustrons ce point sur un exemple.
- Notons $E = \mathbb{R}_1[X]$. Soient $P = a_0 + a_1 X \in E$ et $Q = b_0 + b_1 X \in E$. Alors :

$$\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt = \begin{pmatrix} \frac{2\,a_0 + a_1}{2} & \frac{a_1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2\,b_0 + b_1}{2} \\ \frac{b_1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

En effet :

× $\mathscr{B} = (1, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3})$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire.

× P a pour coordonnées $\left(\frac{2\,a_0 + a_1}{2}, \frac{a_1}{2\sqrt{3}}\right)$ et Q a pour coordonnées $\left(\frac{2\,b_0 + b_1}{2}, \frac{b_1}{2\sqrt{3}}\right)$ dans cette base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

1. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale.
Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
\langle x, e_i \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k, e_i \right\rangle && \textit{(par définition de } x\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \times \langle e_k, e_i \rangle && \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k=i}}^{n} x_k \times \langle e_k, e_i \rangle + \cancel{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} x_k \times \langle e_k, e_i \rangle} \\
&= x_i \times \langle e_i, e_i \rangle \\
&= x_i
\end{aligned}$$

Les dernières égalités proviennent du fait que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale.

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $x \in E$: $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En appliquant cette égalité à e_i, il vient :

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle \cdot e_k$$

On en déduit : $\sum\limits_{k=1}^{i-1} \langle e_i, e_k \rangle \cdot e_k + (1 - \langle e_i, e_i \rangle) \cdot e_i + \sum\limits_{k=i+1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle \cdot e_k = 0_E$.
Par liberté de la famille $\mathscr{B}$ (on suppose initialement que c'est une base), on en conclut que tous les coefficients de cette relation de dépendance linéaire sont nuls :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \Big(i \neq k \ \Rightarrow \ \langle e_i, e_k \rangle = 0 \Big) \quad \text{et} \quad \langle e_i, e_i \rangle = 1$$

Ceci étant vrai pour tout i, la base $\mathscr{B}$ est bien orthonormée.

2. On procède de nouveau par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $\mathscr{B}$ est orthonormale.
Soit $(x, y) \in E^2$. Notons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de y dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j \right\rangle && \textit{(par définition de } x \textit{ et } y\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j \right\rangle && \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \ \langle e_i, e_j \rangle \right) && \textit{(par linéarité à droite)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j=i}}^{n} y_j \ \langle e_i, e_j \rangle + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} y_j \ \langle e_i, e_j \rangle} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i && \textit{(car } \mathscr{B} \textit{ est orthonormée)} \\
&= {}^t\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \\
&= \langle x, y \rangle_{\mathscr{B}}
\end{aligned}$$

□

II.3.b) Caractérisation matricielle des bases orthonormales

Soit $\big(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** de E.

Notons $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de E.

Notons enfin $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

$$\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base orthonormale} \quad \Leftrightarrow \quad {}^tPP = I_n} \ \Big(\Leftrightarrow \ P^{-1} = {}^tP \Big)$$

Remarque

On dit qu'une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthoGONALE** si ${}^tPP = I_n$.
Autrement dit, une matrice P est orthogonale si elle est inversible et que son inverse est $P^{-1} = {}^tP$.
On peut remarquer :

$$\begin{aligned}
P \text{ est orthogonale} \ &\Leftrightarrow \ {}^tP \times P = I_n \\
&\Leftrightarrow \ \big({}^tP \times P\big)_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \ \sum_{k=1}^{n} \big({}^tP\big)_{i,k} \times P_{k,j} = \delta_{i,j} \\
&\Leftrightarrow \ \sum_{k=1}^{n} P_{k,i} \times P_{k,j} = \delta_{i,j} \\
&\Leftrightarrow \ \langle C_i, C_j \rangle_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = \delta_{i,j} \qquad \textit{(en notant, pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ C_i \textit{ la } i^{\text{ème}} \textit{ colonne de } P\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \ \text{Les colonnes de } P \text{ forment une base orthoNORMALE de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ relativement au produit scalaire canonique sur } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

II.3.c) Expression d'un endomorphisme en base orthonormale

Soit $\big(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose que E est de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** de E.

1. D'après l'expression d'un vecteur en base orthonormale :

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) \ = \ \langle f(e_j), e_1 \rangle \cdot e_1 \ + \ \dots \ + \ \langle f(e_j), e_n \rangle \cdot e_n}$$

2. a) Rappelons : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1)\big) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_n)\big)\Big)$.

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \Big(\langle f(e_j), e_i \rangle \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \Big(\langle e_i, f(e_j) \rangle \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}}$

b) D'autre part, si $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base orthonormale alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \ &= \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ &= \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times {}^tP_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \end{aligned}}$$

(les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont bien évidemment semblables et la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est orthogonale)

II.4. Existence d'une base orthonormale

II.4.a) Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. a) Soit $\left(\alpha_i^{(j)}\right)_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n-1}}$ une famille de réels.

Considérons la famille $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ définie par :

(i) $u_1 = e_1$

(ii) $$\forall j \in [\![2, n]\!],\ u_j = \alpha_1^{(j)} \cdot u_1 + \ldots + \alpha_{j-1}^{(j)} \cdot u_{j-1} + e_j = \left(\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i^{(j)} \cdot u_i\right) + e_j$$

On a alors :

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$.
- La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.

b) Considérons la famille $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ définie par :

(i) $v_1 = e_1$

(ii) $$\forall j \in [\![2, n]\!],\ v_j = -\frac{\langle e_j, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \ldots - \frac{\langle e_j, v_{j-1} \rangle}{\|v_{j-1}\|^2} \cdot v_{j-1} + e_j = -\left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle e_j, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i\right) + e_j$$

On a alors :

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$.
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, la famille $\big(v_1, \ldots, v_k\big)$ est orthogonale.
- La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base **orthogonale** de E.

2. La famille $(e'_1, \ldots, e'_n)$ définie par :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ e'_j = \frac{v_j}{\|v_j\|}$$

est une base **orthonormale** de E.

Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède au moins une base orthonormale.

II.4.b) Théorème de la base orthonormée incomplète

Soit E un espace euclidien.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_m) \in E^m$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_m)$ est orthogonale
- Les vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ sont tous non nuls

$\Rightarrow$ La famille $\mathcal{F}$ peut être complétée en une base orthonormale de E

II.5. Orthogonal d'une partie de E

II.5.a) Définition et résultats immédiats

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

Soient F et G deux parties de E (pas forcément des sev de E).

1. On appelle **orthogonal de** F, et on note $F^\perp$, l'ensemble des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0\} = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle y, x\rangle = 0\}$$

2. On dit que F et G sont **orthogonaux** si : $\boxed{\forall x \in F, \forall y \in G,\ \langle x, y\rangle = 0}$

   Évidemment, les ensembles F et $F^\perp$ sont orthogonaux.

3. L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

4. $$\boxed{\begin{array}{rcl} F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} & \Leftrightarrow & F \subset G^\perp \\ & \Leftrightarrow & G \subset F^\perp \end{array}}$$

II.5.b) Propriétés générales de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL`.

Soient F et G deux parties de E (pas forcément des sev de E).

1. $\boxed{F \subset G \ \Rightarrow\ G^\perp \subset F^\perp}$

2. $\boxed{F \subset (F^\perp)^\perp}$

3. Dans le cas où F et G sont des sous-espaces vectoriels de E

   - Les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E
   - Les ensembles F et G sont orthogonaux

   $\Bigg\}\ \Rightarrow\ F \cap G = \{0_E\}$

   Ainsi, deux ensembles orthogonaux sont toujours en somme directe.

   En particulier : $\boxed{F \cap F^\perp = \{0_E\}}$

Remarque

On peut s'interroger sur la façon de retenir la formule $F \subset (F^\perp)^\perp$ (retenir l'inclusion dans le bon sens).
Rappelons que l'ensemble F est une partie et n'est pas forcément un espace vectoriel. Il faut retenir :

× que la formule concerne F et $(\ F\ )^\perp$,

× que $(\ F\ )^\perp$ étant un sous-espace vectoriel il contient potentiellement une infinité de vecteurs (sauf à être égal à $\{0_E\}$).

De ce point de vue, il apparaît logique que : $(\ \dots)^\perp\ \supset\ F$.
(l'ensemble potentiellement infini contient celui qui peut être fini)

II.5.c) Propriétés de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension FINIE

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien RÉEL (de dimension finie ou non).
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On suppose que F est **de dimension finie** notée $m \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(u_1, \dots, u_p) \in F^p$ une famille génératrice de F.

1. Obtention pratique de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de F

$$\boxed{F^\perp = \{x \in E \mid \forall k \in [\![1, p]\!],\ \langle x, u_k\rangle = 0\}}$$

2. a) Si $(e_1, \dots, e_m) \in E^m$ est une base orthonormale de F, alors :

$$\boxed{\forall x \in E,\ x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i\right)}$$

b) L'égalité précédente démontre : $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$

(on dit alors que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F et F est le supplémentaire orthogonal de $F^\perp$)

En particulier, si E est de dimension finie, on en déduit :

$$\boxed{\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^\perp\right)}$$

3. $\boxed{F \ = \ (F^\perp)^\perp}$

(on sait déjà $F \ \subset \ \big(F^\perp\big)^\perp$, quand F est un sev de dimension finie, on a en plus $\big(F^\perp\big)^\perp \ \subset \ F$)

Démonstration.

2. Il s'agit de démontrer la propriété : $\forall x \in E,\ \exists!(u, v) \in F \times F^\perp,\ x = u + v$.
Soit $x \in E$.

- Analyse :
On suppose qu'il existe $(u, v) \in F \times F^\perp$ tel que $x = u + v$.
Comme $u \in F$ et $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de F, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i$$

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Pour tout } j \in [\![1, m]\!] : & \langle x, e_j\rangle & = & \langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i + v, e_j\rangle & \\
& & = & \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \langle e_i, e_j\rangle + \cancel{\langle v, e_j\rangle} & \textit{(car } v \in F^\perp\textit{)} \\
& & = & \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \delta_{i,j} & \textit{(car } (e_1, \dots, e_m) \textit{ est orthonormale)} \\
& & = & \lambda_j &
\end{array}$$

Finalement : $u = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i$ et $v = x - u$.

- Synthèse :
  Notons $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$ et $v = x - u$. Alors :
  × $x = u + v$
  × Comme $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de F, alors $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \in F$.
  × Il reste alors à vérifier : $v \in F^{\perp}$. Autrement dit, il s'agit de démontrer :

$$\forall j \in [\![1, m]\!], \langle v, e_j \rangle = 0$$

Soit $j \in [\![1, m]\!]$:

$$\begin{array}{rcll} \langle v, e_j \rangle & = & \langle x - \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i, e_j \rangle & \\ & = & \langle x, e_j \rangle - \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle & \textit{(par linéarité à gauche du produit scalaire)} \\ & = & \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \ \langle e_j, e_j \rangle & \textit{(car } (e_1, \dots, e_m) \textit{ est une base orthonormale)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

□

II.5.d) Détermination de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en pratique

Exercice

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur E.

On note $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$.

1. a) Démontrer que F est un espace vectoriel et en déterminer une base.

b) Déteminer $F^{\perp}$.

c) Vérifier : $E = F \oplus F^{\perp}$ et : $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

2. a) En remarquant : $F = \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$, trouver une démonstration plus rapide de la question ***1.b)***.

b) On note : $G = \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 + 2\,a_1 - a_2 = 0\}$.
Déterminer $G^{\perp}$.

3. On considère maintenant $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$.

a) Démontrer que F est un espace vectoriel.

b) Démontrer $F^{\perp}$.

c) A-t-on : $E = F \oplus F^{\perp}$? A-t-on : $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$?

Démonstration.

1. a) On démontre : $F = \mathrm{Vect}\,(P_1 - P_0, P_2 - P_0)$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

$$\begin{array}{rcl} P \in F^{\perp} & \Leftrightarrow & \langle P, P_1 - P_0 \rangle = 0 \ \text{ et } \ \langle P, P_2 - P_0 \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcccl} -a_0 & + & a_1 & & = 0 \\ -a_0 & & & + \ a_2 & = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} a_1 & = a_0 \\ a_2 & = a_0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
F^\perp &= \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid a_1 = a_0 \text{ et } a_2 = a_0\} \\
&= \{a_0 \cdot P_0 + a_0 \cdot P_1 + a_0 \cdot P_2 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_0 \cdot \big(P_0 + P_1 + P_2\big) \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\,(P_0 + P_1 + P_2)
\end{aligned}$$

2. ***a)*** On remarque :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{\ a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\ \} \\ & = & \{\ a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid {}^t(1 \quad 1 \quad 1) \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0\ \} \\ & = & \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \langle P_0 + P_1 + P_2, P \rangle = 0\ \} \end{array}$$

On en déduit : $P_0 + P_1 + P_2 \in F^{\perp}$ (en effet : $\forall P \in F$, $\langle P, P_0 + P_1 + P_2 \rangle = 0$).
Ainsi : $\mathrm{Vect}\,(P_0 + P_1 + P_2) \subset F^{\perp}$. Or :
× comme E est de dimension finie : $\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F) = 3 - 2 = 1$.
× $\dim\left(\mathrm{Vect}\,(P_0 + P_1 + P_2)\right) = 1$.
On en conclut : $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(P_0 + P_1 + P_2)$.

b) On remarque :

$$\begin{array}{rcl} G & = & \{\ a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 + 2\,a_1 - a_2 = 0\ \} \\ & = & \{\ a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid {}^t(1 \quad 2 \quad -1) \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0\ \} \\ & = & \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \langle 1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2, P \rangle = 0\ \} \end{array}$$

En raisonnant de même : $G^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(P_0 + 2 \cdot P_1 - P_2)$. □

Remarque

- Les espaces vectoriels F et G sont des hyperplans. On souligne ici qu'ils s'écrivent sous la forme :

$$F = \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \langle P_0 + P_1 + P_2, P \rangle = 0\ \}$$

$$\text{et} \quad G = \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \langle 1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2, P \rangle = 0\ \}$$

  Dans ce cas, $P_0 + P_1 + P_2$ est un vecteur orthogonal à F et, comme F est un hyperplan d'un espace euclidien E (qui est donc de dimension finie), $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(P_0 + P_1 + P_2)$.
  De même, $P_0 + 2\,P_1 - P_2$ est un vecteur orthogonal à G et $G^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(P_0 + 2\,P_1 - P_2)$.
- Ce résultat sera vu plus loin dans le cours.

Exercice

On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$. On note F le plan d'équation $ax + by + cz = 0$.
Déterminer $F^{\perp}$.

Démonstration.
Comme dans l'exercice précédent, on démontre : $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\,((a, b, c))$ puisque :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = 0\}$$

□

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur E.

1. Déterminer l'orthogonal de $F = \mathrm{Vect}\,(P_0)$.
2. Déterminer l'orthogonal de $F = \mathrm{Vect}\,(P_0, P_2)$.
3. Si E est un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de E, détrerminer l'orthogonal de $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_3)$.

II.6. Projections orthogonales

II.6.a) Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
- On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque

1. Comme F est de dimension finie :

$$E = F \oplus F^\perp \quad \text{et} \quad F = (F^\perp)^\perp$$

Ainsi, la projection orthogonale sur $F^\perp$ (resp. la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$) est la projection sur $F^\perp$ parallèlement à F (resp. la symétrie par rapport à $F^\perp$ parallèlement à F).

2. On en déduit que si p est la projection orthogonale sur F, alors :

× la projection orthogonale sur $F^\perp$ est $q = \mathrm{id}_E - p$,

× la symétrie orthogonale par rapport à F est $s = p - q = 2p - \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - 2q$,

× la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$ est $-s$.

II.6.b) Expression d'une projection orthogonale en base orthonormale

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).

Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ est une base orthonormale de F.

Soit p la projection orthogonale sur F et q la projection orthogonale sur $F^\perp$.

1. $\boxed{\forall x \in E,\ x = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i\right) + \left(x - \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i\right)}$

2. $\forall x \in E,$ $\boxed{p(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle \cdot e_k}$ et $\boxed{q(x) = x - \sum\limits_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle \cdot e_k}$

Exercice

Pour tout $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. On note $F = \mathbb{R}_1[X]$.
Déterminer une expression de $p_F(P_2)$, où p_F est la projection orthogonale sur F.

3. En déduire : $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(t^2 - at - b\big)^2\ \mathrm{e}^{-t}\ dt.$

Démonstration.

2. Deux manières de procéder.

- Méthode 1 : on exploite l'orthogonalité de $X^2 - p(X^2)$ à $\mathbb{R}_1[X]$

  Par définition, $p(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]$. Il existe donc $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, $p(X^2) = a_0 + a_1 X$.

$$\begin{array}{rcl}
p(X^2) \in F & \Leftrightarrow & X^2 - p(X^2) \in F^{\perp} \\
& \Leftrightarrow & \langle X^2 - p(X^2), 1 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle X^2 - p(X^2), X \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow & \langle X^2 - \big(a_0 + a_1 X\big), 1 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle X^2 - \big(a_0 + a_1 X\big), X \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} a_0 & + & a_1 & = & 2 \\ a_0 & + & 2\,a_1 & = & 6 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} a_0 & + & a_1 & = & 2 \\ & & a_1 & = & 4 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} a_0 & & & = & -2 \\ & & a_1 & = & 4 \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit : $p(X^2) = -2 + 4X$.

- Méthode 2 : on utilise l'expression de p dans une base orthonormale (Q_0, Q_1) de $\mathbb{R}_1[X]$)

  On démontre tout d'abord (par algorithme de Gram-Schmidt), que la famille $(1, X - 1)$ est orthonormale. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
p(X^2) & = & \langle X^2, Q_0 \rangle \cdot Q_0 + \langle X^2, Q_1 \rangle \cdot Q_1 \\
& = & \langle X^2, 1 \rangle \cdot 1 + \langle X^2, X - 1 \rangle \cdot (X - 1) \\
& = & 2 \cdot 1 + (6 - 2) \cdot (X - 1) \\
& = & 2 + 4 \cdot (X - 1) \\
& = & -2 + 4X
\end{array}$$

3. On remarque :

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \big(t^2 - at - b\big)^2 \, \mathrm{e}^{-t} \, dt & = & \displaystyle\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \big(t^2 - at - b\big) \, \big(t^2 - at - b\big) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \\
& = & \displaystyle\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \langle X^2 - \big(a\,X + b\big), X^2 - \big(a\,X + b\big) \rangle \\
& = & \displaystyle\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \big\| X^2 - \big(a\,X + b\big) \big\|^2 \\
& = & \displaystyle\min_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \| \ X^2 - P \ \|^2 \\
& = & \mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right)^2 \\
& = & \| \ X^2 - p(X^2) \ \|^2
\end{array}$$

D'autre part : $X^2 = p(X^2) + \big(X^2 - p(X^2)\big)$. On en déduit, par théorème de Pythagore :

$$\big\|X^2\big\|^2 = \big\|p(X^2)\big\|^2 + \big\|\big(X^2 - p(X^2)\big)\big\|^2 \qquad \text{et} \qquad \| \ X^2 - p(X^2) \ \|^2 \ = \ \big\|X^2\big\|^2 - \big\|p(X^2)\big\|^2$$

Enfin : $\big\|X^2\big\|^2 = \langle X^2, X^2 \rangle = 4! = 24$.

De plus : $p(X^2) = 2 \cdot Q_0 + 4 \cdot Q_1$ où (Q_0, Q_1) est une base orthonormale. On en déduit :

$$\big\|p(X^2)\big\|^2 = \langle 2 \cdot Q_0 + 4 \cdot Q_1, 2 \cdot Q_0 + 4 \cdot Q_1 \rangle = 2^2 \, \|Q_0\|^2 + 4^2 \, \|Q_1\|^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

Finalement : $\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right)^2 = 24 - 20 = 4$. $\square$

II.7. Notion de distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

II.7.a) Définition

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Soit $x \in E$.

- On appelle **distance de x au sous-espace vectoriel** F, la quantité positive :

$$\boxed{\mathrm{d}(x,F) = \inf_{y \in F} \ \|x-y\|}$$

II.7.b) Lien entre distance à un espace vectoriel et projection orhogonale

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension finie ou non).

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Soit p_F la projection orthogonale sur F.

1. $\boxed{\forall\, x \in E, \forall\, y \in F,\ \ \|x-p_F(x)\| \leqslant \|x-y\|}$

2. $\boxed{\forall x \in E,\ \mathrm{d}(x,F) = \|x-p_F(x)\|}$

(le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F)

3. En particulier, si F est de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$ et si $(e_1,\dots,e_m)$ est une base orthonormale de F alors :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \mathrm{d}(x,F) = \|x-p_F(x)\| = \left\| x - \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i\right) \right\|}$$

Et par théorème de Pythagore : $\boxed{\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{m} \big|\, \langle x, e_i\rangle \,\big|^2}$

Démonstration.

1. Soit $x \in E$ et soit $y \in F$.

$$x-y = (x-p_F(x)) + (p_F(x)-y)$$

avec $x-p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x)-y \in F$.
On en déduit, par théorème de Pythagore :

$$\|x-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)-y\|^2$$

Donc $\|x-p_F(x)\|^2 = \|x-y\|^2 - \|p_F(x)-y\|^2 \ \leqslant\ \|x-y\|^2$.

2. D'après le point ***1.***, pour tout $x \in E$, $\|x-p_F(x)\|$ est un minorant de l'ensemble $U_x = \{\|x-y\| \mid y \in F\}$. C'est donc une quantité plus petite que le plus grand des minorants de cet ensemble. Autrement dit :

$$\|x-p_F(x)\| \ \leqslant\ \inf_{y\in F}\ \|x-y\|$$

Comme $\inf\limits_{y\in F}\ \|x-y\|$ est un minorant de U_x, cette quantité est plus petite que $\|x-p_F(x)\| \in U_x$ (puisque $p_F(x) \in F$). Ainsi :

$$\inf_{y\in F}\ \|x-y\| \ \leqslant\ \|x-p_F(x)\|$$

D'où : $\inf\limits_{y \in F} \|x-y\| = \|x - p_F(x)\|$. $\square$

II.8. Projection orthogonale sur une droite / sur un hyperplan

II.8.a) Hyperplan orthogonal à une droite vectorielle donnée

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $a \in E$ non nul.

On note p_D la projection orthogonale sur la droite $D = \text{Vect}\,(a)$.

On note q la projection orthogonale sur l'hyperplan $H = D^\perp = \Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^\perp$.

1. Comme $\text{Vect}\,(a)$ est de dimension finie : $\boxed{E = \text{Vect}\,(a) \oplus \Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^\perp}$

Plus précisément, pour tout $x \in E$:

$$x = \underbrace{\frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a}_{\in \text{Vect}\,(a)} + \underbrace{\left(x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a\right)}_{\in \left(\text{Vect}\,(a)\right)^\perp}$$

2. On en déduit immédiatement :

a) l'expression de la projection orthogonale sur $D = \text{Vect}\,(a)$:

$$\boxed{\forall x \in E,\ p_D(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a}$$

b) l'expression de la distance d'un point à $D = \text{Vect}\,(a)$:

$$\boxed{\text{d}(x, D) = \Big\| x - p_D(x) \Big\| = \left\| x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \right\|}$$

De plus, par théorème de Pythagore : $\boxed{\text{d}(x, D)^2 = \|x\|^2 - \dfrac{|\langle x, a \rangle|^2}{\|a\|^2}}$

3. On en déduit aussi :

a) l'expression de la projection orthogonale sur $H = \Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^\perp$:

$$\boxed{\forall x \in E,\ q(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a} = x - p_D(x) = (\text{id}_E - p_D)(x)$$

b) l'expression de la distance d'un point à $H = \Big(\text{Vect}\,(a)\Big)^\perp$:

$$\boxed{\text{d}(x, H) = \|x - q(x)\| = \left\| x - \left(x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a\right) \right\| = \left\| \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a \right\| = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}}$$

II.8.b) Droite orthogonale à un hyperplan donné

Caractérisation des hyperplans dans un espace vectoriel (de dimension finie ou non)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} H \text{ est un hyperplan} & \Leftrightarrow & \forall a \in E \setminus H,\ E = \text{Vect}\,(a) \oplus H \\ & \Leftrightarrow & \exists \varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}\},\ F = \text{Ker}(\varphi) \\ & & \textit{(H est le noyau d'une forme linéaire } \textbf{non nulle}\textit{)} \end{array}}$$

Remarque

- Pour bien comprendre ce théorème considérons le cas très simple $E = \mathbb{R}^3$.
  Notons alors : $H = \text{Vect}\,((0,1,0),(0,0,1))$ (c'est bien un hyperplan car c'est un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans un espace vectoriel de dimension 3). Comme $(1,0,0) \notin H$, alors, d'après le théorème :
  $$\mathbb{R}^3 \ = \ \text{Vect}\,(\,(1,0,0)\,) \oplus H$$
- Cette écriture de $\mathbb{R}^3$ comme somme de supplémentaires ne doit pas être comprise comme une partition de l'ensemble (ce qui n'a aucun sens dans un espace vectoriel !). Par exemple :
  × $(1,1,1)$ n'est pas un élément de $\text{Vect}\,(\,(1,0,0)\,)$.
  × $(1,1,1)$ n'est pas pour autant un élément de $\text{Vect}\,(\,(0,1,0),(0,0,1)\,)$.
  L'écriture sous forme de sommes de supplémentaires permet en revanche d'affirmer que le vecteur $(1,1,1)$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\text{Vect}\,(\,(1,0,0)\,)$ et d'un élément de H. Plus précisément :
  $$(1,1,1) \ = \ (1,0,0) + (0,1,1)$$
- Il est à noter que cette décomposition sous forme de sommes de sous-espaces supplémentaires n'est pas unique (tout vecteur qui n'est pas dans H fournit un nouveau supplémentaire). Par exemple :
  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{R}^3 & = & \text{Vect}\,(\,(1,0,0)\,) \oplus H & \\ & = & \text{Vect}\,(\,(1,2,1)\,) \oplus H & \textit{(car } (1,2,1) \notin H\textit{)} \\ & = & \text{Vect}\,(\,(2,0,-1)\,) \oplus H & \textit{(car } (2,0,-1) \notin H\textit{)} \end{array}$$

Caractérisation des hyperplans à l'aide d'un produit scalaire

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

Pour tout $a \in E$, on note φ_a la forme linéaire définie par : $\varphi_a : E \mapsto \langle a, x\rangle$.

1. $\boxed{H \text{ est un hyperplan} \ \Leftrightarrow\ \exists a \neq 0_E,\ H = \text{Ker}(\varphi_a)}$

2. $\forall a \neq 0_E$, $\boxed{\text{Vect}\,(a) = \Big(\text{Ker}(\varphi_a)\Big)^{\perp}}$ et $\boxed{E = \text{Vect}\,(a) \oplus \text{Ker}(\varphi_a)}$

Ainsi, lorsque E est de dimension finie, pour tout hyperplan H il existe $a \neq 0_E$ tel que :

$$H \ = \ \{x \in E \mid \langle a, x\rangle = 0\}$$

et dans ce cas, a est alors un vecteur orthogonal à H.

Bilan du chapitre

Le chapitre est séparé en 2 grands thèmes.

***A.* Notion de produit scalaire et de norme associée**

- Définition du produit scalaire et de la norme. On retiendra en particulier :
  - × l'expression du produit scalaire donne la définition de la norme associée à ce produit scalaire :

$$\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

  - × l'expression de la norme associée à un produit scalaire permet de retrouver l'expression du produit scalaire :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle \ = \ \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \ = \ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}$$

- Propriétés algébriques (identités remarquables)

$$\forall (x,y) \in E^2, \boxed{\|x+y\|^2 \ = \ \|x\|^2 + 2\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\|x-y\|^2 \ = \ \|x\|^2 - 2\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2}$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\boxed{\forall\, (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle \times \langle x, y\rangle \leqslant \ \langle x, x\rangle \times \langle y, y\rangle}$$

Cas d'égalité

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \big|\langle x, y\rangle\big| \ = \ \|x\|\ \|y\| & \Leftrightarrow & x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ & \Leftrightarrow & \begin{array}{r} \exists \alpha \in \mathbb{R},\ x = \alpha \cdot y \\ \texttt{OU}\ \ \exists \beta \in \mathbb{R},\ y = \beta \cdot x \end{array} \end{array}}$$

- Inégalité triangulaire

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\ \|x\| - \|y\|\ \big| \ \leqslant\ \|x \pm y\| \ \leqslant\ \|x\| + \|y\|}$$

Cas d'égalité

$$\boxed{\begin{array}{rl} & \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \\ \Leftrightarrow & x = 0_E\ \ \texttt{OU}\ \ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha \cdot x \end{array}}$$

***B.* Orthogonalité**

1) Résultats vérifiés sans hypothèse sur la dimension

On se place ici dans le cas où :

× $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension éventuellement infinie),

× F est un sous-espace vectoriel de E (de dimension éventuellement infinie).

Les résultats suivants sont toujours vérifiés.

- $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E
  (ce qui ne fournit pas de méthode pour obtenir $F^\perp$)
- $F \ \subset \ \left(F^\perp\right)^\perp$
- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ (F et $F^\perp$ sont toujours en somme directe)

Les propriétés :

$$F \ = \ \left(F^\perp\right)^\perp \quad \text{et} \quad E = F \oplus F^\perp$$

peuvent être ou ne pas être vérifiées.

2) Résultats vérifiés dans le cas où F est un sous-espace vectoriel de dimension finie

On se place ici dans le cas où :

× $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien `RÉEL` (de dimension éventuellement infinie),

× F est un sous-espace vectoriel de E de dimension `FINIE`.

En plus des résultats précédents, les résultats suivants sont aussi vérifiés.

- $F \ = \ \left(F^\perp\right)^\perp$
- $E \ = \ F \oplus F^\perp$
- F admet une base orthonormale (par le procédé de Gram-Schmidt)
- Plus précisément, si $(e_1, \dots, e_m)$ est une base orthonormale :

$$\forall x \in E, \quad x \ = \ \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i}_{p(x) \in F} \ + \ \underbrace{\left(x - \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right) \right)}_{q(x) \in F^\perp}$$

où
× p est la projection orthogonale sur F
× q est la projection orthogonale sur $F^\perp$

De plus, on peut obtenir $F^\perp$ en pratique grâce à la caractérisation suivante :

$$\boxed{F^\perp \ = \ \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, m]\!], \ \langle x, e_i \rangle = 0\}}$$

Enfin :

$$\boxed{\mathrm{d}(x, F) \ = \ \|x - p(x)\| \ = \ \left\| \ x - \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \right) \right\|}$$

3) Résultats dans le cas où F est un sous-espace vectoriel d'un epsace vectoriel de dimension finie

On se place ici dans le cas où :

× $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien `RÉEL` de dimension `FINIE` (c'est un espace euclidien),

× F est un sous-espace vectoriel de E de dimension `FINIE`.

En plus des résultats précédents, les résultats suivants sont aussi vérifiés.

- $\dim\left(F^\perp\right) \ = \ \dim(E) - \dim(F)$

Le cas particulier des droites vectorielles / hyperplans

Si F est un hyperplan, il existe $a \neq 0_E$ tel que $F = \mathrm{Ker}(\varphi_a)$ (avec $\varphi_a : x \mapsto \langle a, x \rangle$) et alors :

$$\boxed{F \ = \ \{x \in E \mid \langle x, a \rangle = 0\}} \quad \text{et} \quad \boxed{F^\perp \ = \ \mathrm{Vect}\,(a)}$$

On a alors : $$x \ = \ \underbrace{\frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a}_{q(x) \in G = F^\perp = \mathrm{Vect}\,(a)} \ + \ \underbrace{\left(x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a \right)}_{p(x) \in G^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp = F}$$

où
× q est la projection orthogonale sur $G = F^\perp$
× p est la projection orthogonale sur $G^\perp = F$

$$\boxed{\mathrm{d}\,(x, F) \ = \ \frac{|\,\langle x, a \rangle\,|}{\|a\|}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{d}\left(x, F^\perp\right) \ = \ \left\|x - p(x)\right\| \ = \ \left\| \ x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a \ \right\|}$$

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

- Inégalité de Cauchy-Schwarz (formule et démonstration page 4).
- Expression des coordonnées et du produit scalaire en base orthonormale (énoncé page 8 et démonstration page 9).
- Écriture $\forall x \in E,\ x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right)$ dans le cas où $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base orthonormale de F (Analyse-Synthèse page 13 et 14).
- Distance à un espace vectoriel (énoncé et démonstration page 18).

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une application est un produit scalaire (on portera une attention particulière au caractère défini positif).
- connaître les inégalités usuelles concernant le produit scalaire / la norme associée (inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire).
- savoir effectuer les manipulations algébriques sur le produit scalaire / la norme (identités remarquables).
- savoir déterminer l'orthogonal d'un espace vectoriel de dimension finie.
- savoir déterminer une expression de la projection orthogonale sur un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).
- savoir déterminer la distance d'un vecteur à un espace vectoriel de dimension finie (cas particulier des droites vectorielles / hyperplans à connaître).
- savoir utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt afin d'obtenir une base orthonormale à partir d'une base d'un espace vectoriel de dimension finie.
- savoir utiliser / démontrer le fait qu'une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.
- connaître l'écriture :

  $$x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right)$$

  dans le cas où $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F (de dimension m) d'un espace vectoriel E.

Les normes abordées dans ce chapitre sont toujours issues d'un produit scalaire ($\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). Il n'y a donc pas lieu de démontrer qu'une application est une norme (ce sera fait dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés) mais il faut évidemment connaître les propriétés des normes.