

Feuille d'exercices n°1 :  
Suites réelles

**Suites usuelles**

**Exercice 1. (★)**

Pour chacune des suites suivantes, définies par récurrence, donner une expression explicite de  $u_n$ .

a.  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 4u_n - 6$ .

b.  $u_0 = 1$ ;  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ .

c.  $u_0 = 1$ ;  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ .

d.  $u_0 = u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2}$ .

e.  $u_0 = 2$ ;  $u_1 = \frac{10}{3}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$ .

**Exercice 2. (★)**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

a. Montrer que la suite  $(v_n)$  de terme général  $v_n = \frac{u_n}{3^n}$  est une suite arithmético-géométrique.

b. En déduire une expression de  $u_n$ .

**Exercice 3. (★)**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \end{cases}$

On introduit la suite auxiliaire  $(t_n)$  de terme général :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

a. Montrer que  $(t_n)$  est une suite géométrique.

b. En déduire une expression de  $t_n$  puis de  $u_n$ .

**Exercice 4. (★★)** (des suites récurrentes croisées)

Soient  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

a. Pour tout entier  $n$  strictement positif, on pose :  $w_n = v_n - u_n$ .

Montrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Pour tout entier  $n$  strictement positif, on pose :  $t_n = 3u_n + 8v_n$ .

Démontrer que la suite  $(t_n)$  est constante.

c. Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

d. En déduire une expression explicite de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

e. Calculer  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $u_3$  et  $v_3$  à l'aide de la relation de récurrence, puis en utilisant le résultat de la question précédente.

**Exercice 5. (★★)**

On cherche à déterminer toutes les suites  $(u_n)$  vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$$

- Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = a n + b$  vérifie la relation ci-dessus.
- Montrer que la suite  $(z_n)$  définie par  $z_n = u_n - v_n$  est d'un type bien connu, en déduire la valeur de  $z_n$  et celle de  $u_n$ .

**Exercice 6. (★)**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$$

- Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$ .
- On considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n - 2)$ . Justifier que  $(v_n)$  est bien définie.
- De quel type est la suite  $(v_n)$ ?
- En déduire la formule explicite de  $u_n$ .

**Exercice 7. (★★)**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{cases}$$

- Vérifier que cette suite est bien définie.
- Donner une expression explicite de  $u_n$ . Comme dans les exercices précédents, on pourra introduire une suite auxiliaire  $(v_n)$  bien choisie.

**Définition de la convergence****Exercice 8. (★★) Vrai ou Faux ?**

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $(u_n)$  n'est pas majorée.
- Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
- Si  $(|u_n|)$  converge alors  $(u_n)$  converge.
- Si  $(|u_n|)$  tend vers 0 alors  $(u_n)$  tend vers 0.
- Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
- Une suite convergente et majorée est croissante.
- Une suite divergeant vers  $+\infty$  est croissante à partir d'un certain rang.
- Une suite strictement croissante diverge vers  $+\infty$ .
- Une suite strictement décroissante diverge vers  $-\infty$ .
- Si  $(u_n)$  est croissante et  $u_n \leq v_n$  alors  $(v_n)$  est croissante.
- Si  $(u_n)$  tend vers 0 et  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ , alors on ne peut conclure sur la limite du quotient  $\frac{u_n}{v_n}$  (F.I.).
- Si  $(u_n)$  est divergente, alors la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$  est divergente.
- Si  $(u_n)$  tend vers  $\ell \neq 0$  alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .

**Exercice 9. (★★) (propriété de recouvrement)**

Soit  $(u_n)$  une suite telle que :

- ×  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, de limite  $\ell \in \mathbb{R}$ ,
- ×  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, de limite  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Montrer que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

## Calculs de limites

## Exercice 10. (★★)

$$a. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3n^7 + 5n - n^3}{n^2 + 1}$$

$$b. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n n^2 + 3n}{n^2 + \sqrt{n}}$$

$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}} + 2}{e^{\ln n + 3} - 5}$$

$$d. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 e^n - n e^{2n}}{n^3 \ln n - n (\ln n)^3}$$

$$e. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln n + 5}$$

$$f. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 5n\sqrt{n} + n - \ln n + n^{-1}}{e^{3n} - e^n + 1 - e^{-n}}$$

$$g. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 2} - n$$

$$h. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}$$

$$i. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$$

$$j. \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n e^{-3n}$$

$$k. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!}$$

## Exercice 11. (★★)

$$a. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$b. \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right)}$$

$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - 3) \ln \left(\frac{n + 3}{n + 2}\right)$$

$$d. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

## Exercice 12. (★★)

$$a. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$b. \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n^2)^{1/n}$$

$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^n + \sqrt{2})^{\frac{1}{n^2}}$$

$$d. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + e^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{n \ln n - \sqrt{n}}$$

## Théorème de convergence monotone / d'encadrement

## Exercice 13. (★★) (d'après EDHEC 2001)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

a. Montrer que la suite est bien définie et à termes strictement positifs.

b. En déduire que  $(u_n)$  est monotone.

c. Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $u_{k+1}^2 - u_k^2$  en fonction de  $u_k^2$ .

d. En déduire que pour tout  $n > 0$ , on a :

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

e. En déduire que pour  $n$  non nul,  $u_n^2 \geq 2n + 1$  puis la limite de  $(u_n)$ .

## Exercice 14. (★)

a. Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

b. Démontrer que la suite  $(S_n)$  de terme général  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  converge vers un réel  $\ell \in ]2, 3]$ .

## Exercice 15. (★)

a) Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ .

b) En déduire un équivalent simple de  $\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ .

c) Déduire de a) la limite de la suite  $\left(\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n\right)$ .

**Exercice 16. (★)** (d'après EDHEC 2006 (S))

1) a. Montrer que l'on définit bien une unique suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ , à termes strictement positifs, en posant :  $u_1 = 1$  et, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$u_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j$$

b. Vérifier :  $u_2 = \frac{1}{3}$ , puis calculer  $u_3$ .

c. Écrire en **Scilab** une fonction de paramètre  $n$  qui calcule le terme  $u_n$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

2) a. Etablir :  $\forall n \geq 2, u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} u_n$ .

b. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

c. Donner un équivalent de  $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ , puis déterminer la nature de la série de terme général  $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ .

d. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n)$ , puis montrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

3) Montrer :  $\forall n \geq 2, u_n = \frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}}$ .

**Exercice 17. (★★)**

On considère la suite  $(S_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

a. Montrer que pour  $n \geq 1$ , on a :  $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

b. En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .

c. On pose  $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$ . Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que  $(T_n)$  converge.

d. Donner un équivalent simple de la suite  $(S_n)$ .

**Exercice 18. (★★★)**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de terme général  $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ . Déterminer sa limite.

**Suites adjacentes****Exercice 19. (★★)**

On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Démontrer que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes. En déduire que la suite  $(S_n)$  converge.

**Exercice 20. (★★)**

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

**Exercice 21. (★)**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 & \text{et} & v_0 = 11 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} & \text{et} & v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

a. Étudier la suite  $(v_n - u_n)$ . Calculer son terme général en fonction de  $n$ , quel est son signe ? Donner sa limite.

b. Montrer que  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante. Que peut-on en déduire ?

c. Étudier la suite  $(u_n + v_n)$ . Que conclure ?

### Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

#### Exercice 22 (★) (d'après ECRICOME 2015)

On considère la fonction  $F$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_1 = 1$  et pour tout entier naturel non nul  $n$  par :  $u_{n+1} = F(u_n)$ .

- Montrer que pour tout réel  $x$  :  $e^x \geq x + 1$ .  
Montrer que l'égalité a lieu **si et seulement si**  $x = 0$ .
- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 0$ .
- Recopier et compléter le programme **Scilab** suivant qui permet de représenter les cent premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  :

```

1  U = zeros(1,100)
2  U(1) = 1
3  for n = 1 : 99
4      U(n+1) = -----
5  end
6  plot(U, "+")

```

- Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .
- En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente et déterminer sa limite.
- À l'aide de la question **a.**, montrer successivement que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$$

- Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n \geq \frac{1}{n}$ .
- À l'aide de la question **g.**, établir la nature de la série  $\sum u_n$ .

#### Exercice 23 (★)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Démontrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie.  
(*indication* : on montrera en particulier que  $u_n > 0$  pour tout  $n$ )
- Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ .
- Démontrer que la suite  $(u_n)$  est monotone.
- Démontrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

#### Exercice 24 (★) (d'après EML 2016)

On considère l'application  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $t$  de  $[0, +\infty[$ , par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet :  $0, 69 < \ln(2) < 0, 70$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

- Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer, pour tout  $t$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f'(t)$  et  $f''(t)$ .
- Dresser le tableau des variations de  $f$ . On précisera la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.  
(on pourra étudier les variations de la fonction  $t \mapsto t - \ln(t)$ )
- Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier naturel  $N$  tel que  $1 - u_N < 10^{-4}$ .

**Exercice 25 (★★)** (d'après EDHEC 2003)

On se propose d'étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par la donnée de  $u_0 = 0$  et

par la relation, valable pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$ .

- 1) **a.** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq u_n \leq 1$ .
  - b.** Étudier les variations de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - c.** En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et donner sa limite.
- 2) **a.** Écrire une fonction **Scilab** qui prend en paramètre un entier  $n$  et renvoie la valeur de  $u_n$ .
  - b.** Écrire un programme, rédigé en **Scilab**, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle :  $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$ .
- 3) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = 1 - u_n$ .
  - a.** Pour tout entier naturel  $k$ , exprimer  $v_k - v_{k+1}$  en fonction de  $v_k$ .
  - b.** Simplifier, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la somme  $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$ .
  - c.** Donner la nature de la série  $\sum v_n^2$  ainsi que la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$ .

**Exercice 26 (★)** (d'après ESC 2009)

- 1) **a.** Étudier les variations de la fonction  $h : x \mapsto x^4 - 4x + 1$ .  
On précisera les limites de  $h$  aux bornes de son ensemble de définition.
  - b.** En déduire que l'équation  $x^4 - 4x + 1 = 0$  admet exactement deux solutions réelles  $\alpha$  et  $\beta$ , avec  $\alpha \leq \beta$ .
  - c.** Montrer :  $\alpha \in [0, 1[$  et  $\beta > 1$ .
- 2) On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n, u_{n+1} = \frac{(u_n)^4 + 1}{4} \end{cases}$ 
  - a.** Étudier les variations de la fonction  $g : x \mapsto \frac{x^4 + 1}{4}$ .
  - b.** Montrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .
  - c.** Montrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .
  - d.** Écrire un programme en **Scilab** qui demande un entier  $n$  puis qui calcule et affiche la valeur de  $u_n$ .

**Exercice 27 (★)** (d'après EML 1995)

Soit  $f : [0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln(1+x)$$

On considère la suite définie par :  $u_0 \in ]0, +\infty[$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

- 1) **a.** Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $[0, +\infty[$ , et calculer, pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .
  - b.** Étudier les variations de  $f'$ , puis celles de  $f$ .
  - c.** Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.
- 2) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x \in [0, +\infty[$ .
- 3) On suppose dans cette question :  $u_0 \in ]e - 1, +\infty[$ .
  - a.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$ .
  - b.** En déduire que  $u_n$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- 4) On suppose dans cette question :  $u_0 \in ]0, e - 1[$ .  
Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 28. (★★)**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \exp(u_n) - 1 \end{cases}$

On note  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = e^x - 1$ .

- a.** Montrer que l'équation  $f(x) = x$  a une unique solution qui est 0.  
Déterminer le signe de  $f(x) - x$ . Préciser le sens de variation de  $f$ .  
**On suppose maintenant :  $u_0 = 1$ .**
- b.** Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq u_{n+1}$ .
- c.** Montrer que  $(u_n)$  n'est pas majorée et en déduire sa limite.
- d.** Montrer que si  $x \geq 1$  alors  $f(x) \geq (e - 1)x$ .
- e.** En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq (e - 1)^n$  et retrouver la limite de la suite.  
**On suppose maintenant :  $u_0 < 0$ .**
- f.** Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n < 0$ .
- g.** En déduire que  $(u_n)$  est croissante puis qu'elle converge vers 0.

**Exercice 29 (★)**

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 - u_n)^2 \end{cases}$

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto (1 - x)^2$ .

- 1) **a.** Etudier les variations de la fonction  $f$ .
- b.** Vérifier que l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ .
- c.** Déterminer les points fixes de la fonction  $f$ .
- d.** Préciser le sens de variation de la fonction  $g = f \circ f$  sur  $[0, 1]$ .
- 2) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle monotone ?
- 3) **a.** Démontrer que  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont à valeurs dans  $[0, 1]$ .
- b.** Démontrer que les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones. Préciser leur monotonie.
- c.** Justifier que les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes. On note respectivement  $\ell_1$  et  $\ell_2$  les limites des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .
- d.** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ?
- e.** Déterminer  $\ell_1$  et  $\ell_2$ .

**Exercice 30. (☆)**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

1. Montrer que tout point fixe de  $f$  est un point fixe de  $f \circ f$ .
2. L'implication réciproque est-elle vérifiée ?

**Exercice 31. (★)**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(2u_n + 1) \end{cases}$

- a.** Montrer que  $(u_n)$  est bien définie et que pour tout  $n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$ .
- b.** Étudier le sens de variation de  $(u_n)$
- c.** En déduire que  $(u_n)$  est convergente vers une limite  $\ell$  telle que :  $1 \leq \ell \leq 2$ .

**IAF pour l'étude des suites du type  $u_{n+1} = f(u_n)$** **Exercice 32. (★★)**

Soit la suite la suite  $(u_n)$  par :  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

On pose  $f(x) = \sqrt{x + 1}$ .

- a.** Montrer que  $[0, 2]$  est stable par  $f$  et :  $\forall x \in [0, 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
- b.** Déterminer les points fixes de  $f$ . Notons  $r$  l'unique point fixe dans  $[0, 2]$ .
- c.** Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$ .
- d.** Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leq \frac{|u_n - r|}{2}$  puis que  $|u_n - r| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
- e.** Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
- f.** Déterminer un entier  $N$  tel que  $|u_N - r| \leq 10^{-9}$ .
- g.** Écrire un programme **Scilab** donnant une valeur approchée de  $r$  à  $10^{-9}$  près.

**Exercice 33. (★★)**

On considère la fonction  $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

On définit la suite  $(u_n)$  par :  $\begin{cases} u_0 \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution dans  $[0, 1]$ , que l'on notera  $\alpha$ .
2. Montrer que l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ .  
En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ .
3. **a)** Montrer :  $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$
- b)** En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$ .
- c)** Puis :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$ .
- d)** En déduire enfin que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
4. Écrire un programme **Scilab** donnant une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-4}$  près.

**Exercice 34 (★★)**

Soit  $f : x \mapsto x^2 + \frac{3}{16}$  et  $(u_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- Calculer  $u_1$ .
- Déterminer les limites possibles de la suite.
- Démontrer :  $f\left(\left[0, \frac{7}{16}\right]\right) \subset \left[0, \frac{7}{16}\right]$ .
- En déduire que pour tout  $n \geq 1 : u_n \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$ .
- Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : \left|u_{n+1} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{7}{8} \left|u_n - \frac{1}{4}\right|$ .
- En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : \left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \frac{7}{16}$ .
- En déduire la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 35 (★★)(d'après EML 2001)**

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$  sur  $]0, +\infty[$ .

- Pour tout  $x > 0$ , calculer  $f'(x)$ .
- Montrer :  $\forall x \in ]0, +\infty[, f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (xe^x - 2e^x + x + 2)$ .
- Étudier les variations de la fonction  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ , par :  $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$ .  
En déduire :  $\forall x \in ]0, +\infty[, f''(x) > 0$ .
- En déduire le sens de variation de  $f$  (on admettra que  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$ ).

On précisera la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .

- On considère la suite  $(u_n)$  par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Montrer :  $\forall x \in ]0, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  et  $0 \leq f(x) \leq 1$ .

- Résoudre l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x \in ]0, +\infty[$ .
- Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln(2)|$ .
- En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln(2)|$ .
- Établir que la suite  $(u_n)_{n>0}$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 36 (★)(d'après EML 2014)**

On considère l'application  $\varphi : x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$  sur  $]0, +\infty[$ .

On admet :  $2 < e < 3$ .

- Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $]0, +\infty[$ .  
Calculer pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[, \varphi'(x)$  et  $\varphi''(x)$ , et montrer :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$$

- Étudier le sens de variation de  $\varphi''$  et calculer  $\varphi''(1)$ .  
En déduire le sens de variations de  $\varphi'$ , et montrer :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \varphi'(x) \geq e$$

- Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs strictement positives.
- Déterminer la limite de  $\frac{\varphi(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , et la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- On admet :  $15 < \varphi(3) < 16$ . Montrer :  $\forall x \in [3, +\infty[, \varphi(x) \geq ex$ .  
On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

- Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 3e^n$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante et que  $u_n$  tend vers  $+\infty$  lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel tel que :  $u_n \geq 10^3$ .
- Quelle est la nature de la série de terme général  $\frac{1}{u_n}$  ?

## Suites implicites

**Exercice 37. (★★)**

On définit sur  $\mathbb{R}^{+*}$  la fonction  $f$  par :  $f(x) = x + \ln(x)$ .

- Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = n$  a une unique solution dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .  
On la note  $u_n$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

**Exercice 38 (★)**

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit l'équation  $(E_n)$  par :

$$\ln(x+n) = \frac{n}{x}$$

- Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $(E_n)$  admet une unique solution dans  $]0, +\infty[$ , notée  $u_n$ .
- Déterminer  $u_0$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $f_n$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f_n : x \mapsto \ln(x+n) - \frac{n}{x}$ .  
Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ .  
En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.
- Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente, puis montrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$$

- En déduire un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 39 (★★)** (d'après EDHEC 2008)

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère  $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+e^x} + nx$ . On appelle  $(\mathcal{C}_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer, pour tout réel  $x$ ,  $f'_n(x)$  et  $f''_n(x)$ .
  - En déduire que la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  ainsi que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .
  - Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté  $A_n$ , de  $(\mathcal{C}_n)$ .
  - Donner l'équation de la tangente  $(T_1)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_1)$  en  $A_1$  puis tracer la droite  $(T_1)$  ainsi que l'allure de la courbe  $(\mathcal{C}_1)$ .
- Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une seule solution sur  $\mathbb{R}$ , notée  $u_n$ .
  - Montrer que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$ .
  - En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
  - En revenant à la définition de  $u_n$ , montrer :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ .

**Exercice 40. (★★★)**

On considère les fonctions  $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $x_n \in ]0, 1[$ .  
On s'intéresse maintenant à la suite  $(x_n)$ .
- Démontrer que, pour tout  $n > 0$  :  $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$ .  
En déduire :  $\forall n > 0, x_n < x_{n+1}$ .
- Démontrer que  $(x_n)$  converge et que sa limite  $\ell$  est telle que  $0 < \ell \leq 1$ .
- Démontrer :  $\forall n > 0, x_n \leq \ell$ .
- En procédant par l'absurde, montrer :  $\ell = 1$ .

**Exercice 41 (★★★)** (d'après EML 1994)

1) On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, \frac{1}{2}]$  par  $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$ .

- Etudier les variations de la fonction  $f$ .
- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque que l'on notera  $g$ .
- Dresser le tableau de variations de  $g$ .
- La fonction  $g$  est-elle dérivable en 0? En  $\sqrt{\frac{2}{e}}$ ?

2) a. Pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq 2$ , montrer que l'équation, d'inconnue  $x : f(x) = \frac{1}{n}$ , admet une unique solution dans le segment  $[0, \frac{1}{2}]$ .

On notera  $a_n$  cette solution.

- Montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  est décroissante.
- Montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  converge vers 0.

**Exercice 42. (★★)**

On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction  $f_n$  par :  $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$ .

- Faire l'étude de la fonction  $f_n$ .
- Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , il existe une unique solution à l'équation  $f_n(x) = 0$ . On la notera  $u_n$ .
- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ .

**Exercice 43 (★★)** (d'après ECRICOME 2019)

Pour tout entier  $n$  non nul, on note  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x > 0, h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $h_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$  et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .
- En déduire que pour tout entier  $n$  non nul, l'équation  $h_n(x) = 4$  admet exactement deux solutions, notées  $u_n$  et  $v_n$  et vérifiant :  $0 < u_n < 1 < v_n$ .

3. a) Démontrer :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

- En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$ .
- Montrer alors que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

4. a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell$  et montrer :  $\ell \geq 1$ .

- En supposant que  $\ell > 1$ , démontrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$ .  
En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de  $(v_n)$ .

5. a) Montrer :  $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$ .

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function y = h(n,x)` qui renvoie la valeur de  $h_n(x)$  lorsqu'on lui fournit un entier naturel  $n$  non nul et un réel  $x \in \mathbb{R}_+^*$  en entrée.

c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à  $10^{-5}$  près de  $v_n$  par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier  $n \geq 1$  en entrée :

```

1  function res=v(n)
2      a = 1
3      b = 3
4      while (b-a) > 10 ^ (-5)
5          c = (a+b)/2
6          if h(n,c) < 4 then
7              .....
8          else
9              .....
10         end
11     end
12     .....
13 endfunction

```

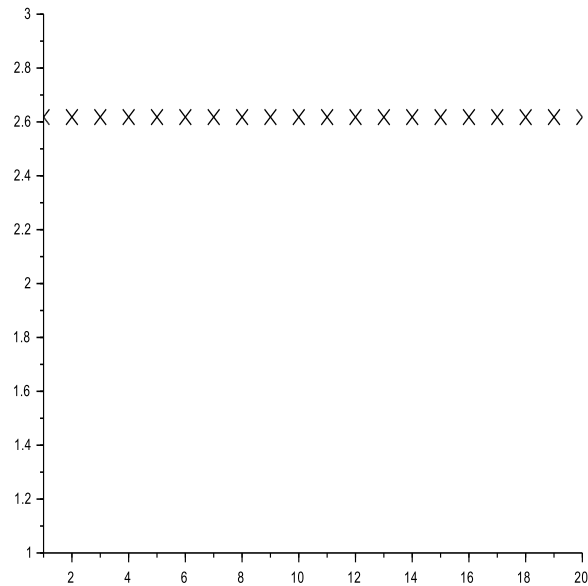
d) À la suite de la fonction  $v$ , on écrit le code suivant :

```

1 X = 1:20
2 Y = zeros(1,20)
3 for k = 1:20
4     Y(k) = v(k) ^ k
5 end
6 plot2d(X, Y, style=-2, rect=[1,1,20,3])

```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.  
Que peut-on conjecturer ?

e) Montrer :  $\forall n \geq 1, (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4.c).

**Exercice 44 (★★)** (d'après ECRICOME 2020)

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

**Partie A : Étude de la fonction  $f_n$**

Dans cette partie, on fixe un entier naturel  $n$  non nul.

1. Démontrer que la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

2. Étudier les variations de  $f_n$ .

3. Démontrer que  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ , et calculer sa dérivée seconde.  
En déduire que  $f_n$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+$ .

4. a) Démontrer :  $\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$ .

b) Montrer alors :  $\forall x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x - 1)^2$ .

c) En déduire la limite de  $f_n(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

5. Calculer  $f_n(0)$ , puis démontrer :  $f_n(1) < 0$ .

6. Démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.  
On note  $x_n$  cette solution.

### Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite  $(x_n)$ , où pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x_n$  est l'unique solution strictement positive de l'équation :  $f_n(x) = 0$ .

On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$$

7. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left( \frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

8. a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \frac{2n+2}{2n+1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ .

b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$ .

c) Montrer alors que la suite  $(x_n)$  est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. a) Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :  $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$ .

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.b) de la partie A, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de  $x_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

### Exercice 45 (★★)(d'après EML 2020)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, 1[$  par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

### Partie A : Étude de la fonction $f$

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et que l'on a :

$$\forall x \in ]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

2. a) Justifier :  $\forall t \in ]0, 1[, t \ln(t) < 0$

b) En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, 1[$ .

3. a) Montrer que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $f$  la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser  $f(0)$ .

b) Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et préciser  $f'(0)$ .

4. Calculer la limite de  $f$  en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de  $f$  ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

## Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $(E_n)$  l'équation :  $x^n + x - 1 = 0$ .

6. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudier les variations sur  $\mathbb{R}_+$  de la fonction  $x \mapsto x^n + x - 1$ .  
En déduire que l'équation  $(E_n)$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+$  que l'on note  $u_n$ .

7. Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  appartient à l'intervalle  $]0, 1[$ .

8. Déterminer  $u_1$  et  $u_2$ .

9. a) Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , elle renvoie une valeur approchée de  $u_n$  à  $10^{-3}$  près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

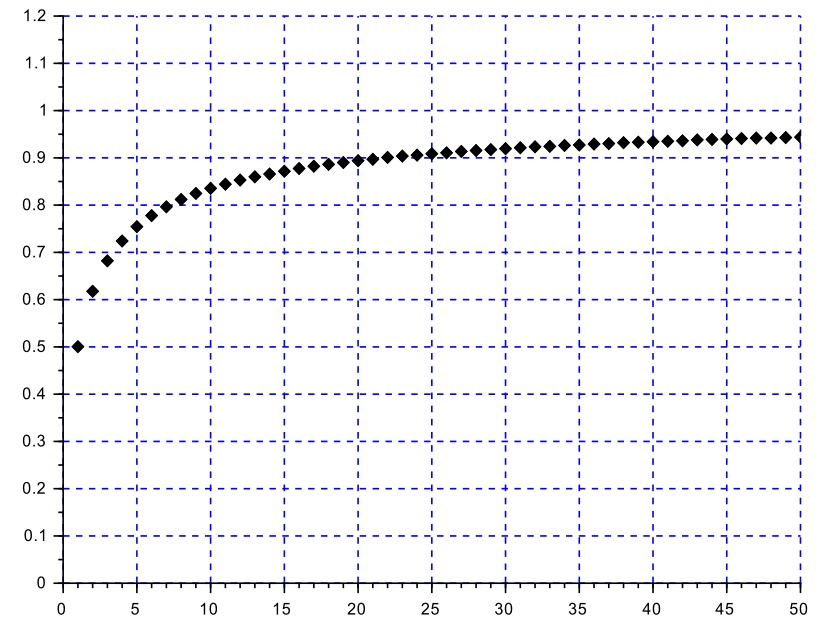
```

1  function u = valeur_approchee(n)
2      a = 0
3      b = 1
4      while ...
5          c = (a + b) / 2
6          if (c^n + c - 1) > 0 then
7              ...
8          else
9              ...
10         end
11         u = ...
12     end
13 endfunction

```

b) On représente alors les premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et on obtient le graphe suivant.

Quelles conjectures peut-on faire sur la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. a) Montrer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $f(u_n) = n$ .

b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et préciser sa limite.