CH XIII : Fonctions réelles de deux variables réelles

I. Le plan $\mathbb{R}^2$

I.1. Distance euclidienne

Définition

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan $\mathbb{R}^2$.

On appelle **distance euclidienne** entre A et B, la quantité notée $\mathrm{d}(A, B)$ définie par :

$$\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}\big((x_A, y_A), (x_B, y_B)\big) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Remarque

Si $O = (0, 0)$ est l'origine du plan, et $M = (x, y)$ est un point du plan, alors la distance de M à l'origine est donnée par $\mathrm{d}(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Théorème 1 (Propriétés de la distance euclidienne)**.**

0) $\boxed{\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ d(A,B) \geqslant 0}$

1) $\boxed{\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ d(A,B) = d(B,A)}$ *(symétrie)*

2) $\boxed{\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ d(A,B) = 0 \ \Leftrightarrow\ A = B}$ *(séparation)*

3) $\boxed{\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,A)}$
(inégalité triangulaire)

Remarque

- Ces propriétés sont caractéristiques des opérateurs de distance. Autrement dit, toute application $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés ***0)***, ***1)***, ***2)***, ***3)*** est appelée une distance.
- Il existe d'autres opérateurs de distance :

$$\boxed{\mathrm{d}_1(A,B) \ = \ |x_A - x_B| + |y_A - y_B|}$$

$$\boxed{\mathrm{d}_\infty(A,B) \ = \ \max\big(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|\big)}$$

I.2. Boules

Définition

Soit A un point du plan $\mathbb{R}^2$ et r un réel strictement positif.

- On appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon r, l'ensemble noté $B(A, r)$ et défini par :

$$\boxed{B(A,r) = \big\{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathrm{d}(A,M) < r\big\}}$$

- On appelle **boule fermée** de centre A et de rayon r, l'ensemble noté $B_f(A, r)$ et défini par :

$$\boxed{B_f(A,r) = \big\{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathrm{d}(A,M) \leqslant r\big\}}$$

Remarque

- Une boule n'est rien d'autre que l'ensemble des points qui se situent à une distance au plus r (le rayon de la boule) d'un point A (le centre de la boule). Dans le plan $\mathbb{R}^2$, ces ensembles sont des disques de centre A. Sur la droite réelle $\mathbb{R}$, ces ensembles sont des intervalles centrés sur A. De manière plus générale :
  - × on peut définir la notion de boules sur les ensembles $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$),
  - × la géométrie des boules dépend de l'ensemble sur lequel on travaille.
- De même, la géométrie des boules dépend de la distance considérée :
  - × pour la distance euclidienne d, les boules de $\mathbb{R}^2$ sont des disques.
  - × pour la distance d_1, les boules de $\mathbb{R}^2$ sont des losanges.
  - × pour la distance euclidienne d_∞, les boules de $\mathbb{R}^2$ sont des carrés.
- On a $B(A,r) \subsetneq B_f(A,r)$ et $B(A,r) \subset B(A,s)$ si $r \leqslant s$.

I.3. Parties bornées

Définition
Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite **bornée** s'il existe $r \geqslant 0$ tel que $D \subset B(O,r)$.
Ceci est équivalent à :

$$\forall M \in D,\ \mathrm{d}(O,M) \leqslant r$$

Théorème 2.

- *Toute boule (ouverte ou fermée) est bornée.*
- *Toute partie incluse dans une boule est une partie bornée.*

Démonstration.
Soit M un point de $B_f(A,r)$. On a alors

$$\mathrm{d}(O,M) \leqslant \mathrm{d}(O,A) + \mathrm{d}(A,M) \leqslant \mathrm{d}(O,A) + r$$

Ainsi, M est un point de $B(O,r')$ avec $r' = \mathrm{d}(O,A) + r$. □

Remarque
On pourra trouver la définition équivalente suivante :

$$\boxed{D \text{ est une partie bornée } \Leftrightarrow\ \exists A \in \mathbb{R}^2, \exists r > 0, D \subset B(A,r)}$$

I.4. Parties ouvertes, parties fermées

I.4.a) Parties ouvertes

Définition
On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert si :

× $D = \varnothing$,

× ou si pour tout point M de D, il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \subset D$.

Théorème 3.
Une boule ouverte est un ouvert.

Démonstration.
Soit M un point de $B(A, r)$.
On a alors $\mathrm{d}(A, M) < r$. Notons $r' = r - \mathrm{d}(A, M) > 0$.
Montrons que $B(M, r') \subset B(A, r)$.
Soit N une point de $B(M, r')$. On a alors $\mathrm{d}(M, N) < r'$.
D'après l'inégalité triangulaire :

$$\mathrm{d}(A, N) \leqslant \mathrm{d}(A, M) + \mathrm{d}(M, N) < \mathrm{d}(A, M) + r - \mathrm{d}(A, M) = r$$

Ainsi, N est un point de $B(A, r)$. $\square$

Théorème 4.
Le complémentaire d'une boule fermée est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.
Soit M un point de $B_f(A, r)^{\complement}$.
On a alors $\mathrm{d}(A, M) > r$. Notons $r' = \mathrm{d}(A, M) - r > 0$.
Montrons que $B(M, r') \subset B_f(A, r)^{\complement}$.
Soit N une point de $B(M, r')$. On a alors $\mathrm{d}(M, N) < r'$.
D'après l'inégalité triangulaire :

$$\mathrm{d}(A, M) \leqslant \mathrm{d}(A, N) + \mathrm{d}(N, M)$$

ce qui entraîne :

$$\mathrm{d}(A, N) \geqslant \mathrm{d}(A, M) - \mathrm{d}(N, M) > \mathrm{d}(A, M) - r' = r.$$

Ainsi, N est un point de $B_f(A, r)^{\complement}$. $\square$

Une boule fermée n'est pas un ouvert.

I.4.b) Parties fermées

Définition
Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite **fermée** si son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Remarque

- Une boule fermée est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
- Le plan $\mathbb{R}^2$ est à la fois ouvert et fermé.
- Aux concours, on ne demandera pas de démontrer qu'une partie est ouverte / fermée. On retiendra l'idée qu'un ouvert est une partie D qui ne contient pas son bord (si c'était le cas, toute boule centrée sur un point du bord déborderait en dehors de D). Les parties ouvertes sont généralement les ensembles définis à l'aide d'inégalités strictes.

II. Continuité d'une fonction de deux variables

II.1. Définition

II.1.a) Notion de limite d'une fonction de deux variables

Rappel

- Dans le chapitre Développements limités, on a vu que la notion de limite (pour une fonction réelle d'une variable réelle) pouvait s'exprimer à l'aide de voisinages. Rappelons cette définition.

$$\boxed{\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists U \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \in U \ \Rightarrow\ f(x) \in V}$$

- L'intérêt de cette définition est qu'elle est très générale et peut donc s'adapter à des cas d'étude différents. Dans $\mathbb{R}$ comme dans $\mathbb{R}^2$ (et même dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$), la notion de voisinage choisie est celle de boule : on dit que x est dans un voisinage de x_0 si x est dans une boule ouverte de centre x_0 ou, plus précisément, s'il existe un réel $r > 0$ tel que $x \in B(x_0, r)$. On a déjà vu que la géométrie des boules était différente dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$.
  - × Si on travaille dans $\mathbb{R}$, x est dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ si x est dans un intervalle centré en x_0 ($\exists \alpha > 0,\ x \in [X_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$).
  - × Si on travaille dans $\mathbb{R}^2$, M est dans un voisinage de $M_0 \in \mathbb{R}$ si M est dans un disque centré en M_0 ($\exists r > 0,\ \mathrm{d}(M_0, M) < r$).

Définition *(Limite en un point)*

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

Soit $M_0 \in D$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ en M_0 si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall M \in D,\ \mathrm{d}(M_0, M) < \eta \ \Rightarrow\ |f(M) - \ell| < \varepsilon}$$

II.2. Continuité d'une fonction de deux variables

Définition *(Continuité)*

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

Soit $M_0 \in D$.

- On dit que f est **continue en** M_0 si f admet pour limite $f(M_0)$ en M_0, autrement dit si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall M \in D,\ \mathrm{d}(M_0, M) < \alpha \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon}$$

  On peut écrire cette propriété à l'aide des coordonnées de M et M_0. Plus précisément, on dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si f admet pour limite $f(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0), autrement dit si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in D,\ \mathrm{d}\big((x_0, y_0), (x, y)\big) < \alpha \Rightarrow \big|f\big((x,y)\big) - f\big((x_0,y_0)\big)\big| < \varepsilon}$$

- On dit que f est **continue sur** D si f est continue en tout point de D.

II.3. Opérations sur les fonctions continues

II.3.a) Le cas des fonctions polynomiales

Théorème 5.
Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque
En particulier, les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

II.3.b) Stabilité de la notion de continuité par opérations algébriques

Théorème 6.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur D.

On suppose que f_1 et f_2 sont continues sur D.

1) *Alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est continue sur D. Autrement dit, toute combinaison linéaire de fonctions continues sur D est continue sur D.*

2) *La fonction $f_1 \times f_2$ est continue sur D.*

3) *Si on sait de plus que la fonction f_2 ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est continue sur D.*

Remarque
On retiendra que la combinaison linéaire, le produit et le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas !) de fonctions continues sur D sont des fonctions continues sur D.

Exemple
Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :

× $f_1 : (x, y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car polynomiale.

× $f_2 : (x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$:
- est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car polynomiale.
- ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

□

II.3.c) Stabilité par composition

Théorème 7.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit I un intervalle réel.

Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

On suppose que :

× *g est continue sur D,*

× *g est à valeurs dans un intervalle I (autrement dit : $g(D) \subset I$).*

Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

On suppose que ψ est continue sur I.

Alors la composée $f = \psi \circ g$ est continue sur D.

Exemple

1) Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[\ \times \mathbb{R}$.

3) Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[\ \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car elle est la composée $f = \psi \circ g$ où :

× $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est :
- continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car polynomiale,
- telle que : $g(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$.

× La fonction $\psi : z \mapsto \sqrt{z}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

□

III. Calcul différentiel d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables

III.1. Applications partielles

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

- On appelle **applications partielles** de f en le point (x_0, y_0) les deux fonctions obtenues à partir de f en fixant l'une ou l'autre des variables. Plus précisément, f admet deux applications partielles en (x_0, y_0).

$$\boxed{f(., y_0) : x \mapsto f(x, y_0)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f(x_0, .) : y \mapsto f(x_0, y)}$$

- Ainsi, les applications partielles $f(., y_0)$ et $f(x_0, .)$ sont des fonctions réelles d'une variable réelle : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

III.2. Notion de dérivée partielle d'ordre 1

III.2.a) Définition

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

Soit $(x_0, y_0) \in D$.

- Lorsque, l'application partielle $f(., y_0)$ est dérivable en x_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la première variable** (x) **en** (x_0, y_0). On note alors $\partial_1(f)(x_0, y_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\partial_1(f)(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

- Lorsque l'application partielle $f(x_0, .)$ est dérivable en y_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la deuxième variable** (y) **en** (x_0, y_0). On note alors $\partial_2(f)(x_0, y_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\partial_2(f)(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

III.2.b) Gradient de f en un point

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable (resp. deuxième variable) sur D si f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable (resp. deuxième variable) en tout point de D.
- La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x est une fonction réelle à deux variables réelles, notée $\partial_1(f)$.

$$\boxed{\partial_1(f) : (x, y) \mapsto \partial_1(f)(x, y)}$$

- La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable y est une fonction réelles à deux variables réelles, notée $\partial_2(f)$.

$$\boxed{\partial_2(f) : (x, y) \mapsto \partial_2(f)(x, y)}$$

- On appelle gradient de f et on note $\nabla(f)$ la fonction suivante.

$$\nabla(f) \ : \ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Remarque

- Dans des ouvrages plus anciens, on trouvera la notation : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
  Son inconvénient est la confusion possible entre le x du ∂x (on dérive par rapport à la variable x) et l'abscisse x du point (x, y).
- La notion de dérivée partielle est définie à l'aide de la dérivée d'une fonction réelle à 1 variable réelle. L'ensemble des résultats du chapitre dérivation peut donc être utilisé sur les applications partielles.
- Par exemple, si f et g admettent une dérivée partielle selon x alors $f + g$ et $f \times g$ aussi $(\dots)$
- Les dérivées partielles étant des fonctions à deux variables, elles admettent elles aussi des dérivées partielles !

III.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$

III.3.a) Définition

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur D si :

× elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur D,

× et que ces deux dérivées partielles sont continues sur D.

Remarque
Aux concours, lorsqu'il est demandé de déterminer les dérivées partielles d'une fonction f, il faut `TOUJOURS` commencer par démontrer qu'elle admet des dérivées partielles. Pour ce faire, on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (qui peut le plus peut le moins).

Exemple
Soit f la fonction définie sur $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :

$$f(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Démonstration.
À vos stylos !

□

Théorème 8.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D alors f est continue sur D.

III.3.b) Le cas des fonctions polynomiales

Théorème 9.
Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque
En particulier, les fonctions coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

III.3.c) Stabilité du caractère $\mathcal{C}^1$ par opérations algébriques

Théorème 10.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur D.

On suppose que f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

1) *Alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur la partie D.*
Autrement dit, toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

2) *La fonction $f_1 \times f_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.*

3) *Si on sait de plus que la fonction f_2 ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.*

Remarque
On retiendra que la combinaison linéaire, le produit et le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas !) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

III.3.d) Stabilité du caractère $\mathcal{C}^1$ par composition

Théorème 11.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit I un intervalle réel.

Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

On suppose que :

× *g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D,*

× *g est à valeurs dans un intervalle I (autrement dit : $g(D) \subset I$).*

Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

On suppose que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Alors la composée $f = \psi \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par $f : (x, y) \mapsto (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

III.4. Développement limité à l'ordre 1

- On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en un point (x_0, y_0) s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$f(x_0 + h, y_0 + k) = a + b \times h + c \times k + \sqrt{h^2 + k^2} \times \varepsilon(h, k)$$
où ε est définie au voisinage de $(0, 0)$, et de limite nulle en $(0, 0)$.
- En réalité, si f admet un développement limité alors celui-ci est unique. Il est alors donné par le théorème suivant.

Théorème 12 (*formule de Taylor-Young*)**.**
Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
Soit $(x_0, y_0) \in D$.
Alors pour tout $(h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) \quad = \quad & f(x_0, y_0) + \partial_1(f)(x_0, y_0) \times h + \partial_2(f)(x_0, y_0) \times k \\ & + \sqrt{h^2 + k^2} \times \varepsilon(h, k) \end{aligned}}$$

où ε est définie au voisinage de $(0, 0)$, et de limite nulle en $(0, 0)$.

Remarque

- Ce développement limité peut s'écrire sous la forme :
$$\boxed{f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2} \times \varepsilon(h, k)}$$
- Cette formule est l'analogue de la formule pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \times h + h\ \varepsilon(h)$$
où ε est une fonction définie dans un voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

IV. Calcul différentiel d'ordre 2 pour les fonctions de deux variables

IV.1. Dérivées partielles d'ordre 2

IV.1.a) Définition

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1.

- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable** si la fonction $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D.
  Dans ce cas, on note $\partial^2_{11}(f) = \partial_1(\partial_1(f))$.
- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable** si la fonction $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur D.
  Dans ce cas, on note $\partial^2_{21}(f) = \partial_2(\partial_1(f))$.
- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable** si la fonction $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D.
  Dans ce cas, on note $\partial^2_{12}(f) = \partial_1(\partial_2(f))$.
- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable** si la fonction $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur D.
  Dans ce cas, on note $\partial^2_{22}(f) = \partial_2(\partial_2(f))$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ pour tout couple (x,y) dans l'ouvert $D =]0,+\infty[^2$.
Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 et les déterminer.

Démonstration.
Nous avons vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et que ses dérivées partielles d'ordre 1 sont données par :

$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
Elles admettent des dérivées partielles d'ordre 1.

$$\partial^2_{11}(f)(x,y) = \frac{2y}{x^3} \quad \text{et} \quad \partial^2_{21}(f)(x,y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

$$\partial^2_{12}(f)(x,y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \quad \text{et} \quad \partial^2_{22}(f)(x,y) = \frac{2x}{y^3}$$

□

IV.2. Fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie D

IV.2.a) Définition

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^2$ si :

× elle admet des dérivées partielles d'ordre 2,

× et que ces quatre dérivées partielles à l'ordre 2 sont continues sur D.

Théorème 13.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

IV.2.b) Le cas des fonctions polynomiales

Théorème 14.
Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque
En particulier, les fonctions coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

IV.2.c) Stabilité du caractère $\mathcal{C}^2$ par opérations algébriques

Théorème 15.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur D.

On suppose que f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

1) Alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur la partie D.
Autrement dit, toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

2) La fonction $f_1 \times f_2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

3) Si on sait de plus que la fonction f_2 ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Remarque
On retiendra que la combinaison linéaire, le produit et le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas !) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

IV.2.d) Stabilité du caractère $\mathcal{C}^2$ par composition

Théorème 16.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit I un intervalle réel.

Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

On suppose que :

× *g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D,*

× *g est à valeurs dans un intervalle I (autrement dit : $g(D) \subset I$).*

Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

On suppose que ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

Alors la composée $f = \psi \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

IV.3. Matrice hessienne

IV.3.a) Définition

Définition Matrice hessienne

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 2.

On appelle matrice **hessienne** de f en (x, y) la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ notée $\nabla^2(f)(x, y)$ et définie par :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{11}(f)(x,y) & \partial^2_{12}(f)(x,y) \\ \partial^2_{21}(f)(x,y) & \partial^2_{22}(f)(x,y) \end{pmatrix}$$

IV.3.b) Théorème de Schwarz et conséquence

Théorème 17. *Théorème de Schwarz*

Soit D un **ouvert** *de $\mathbb{R}^2$.*

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Alors : $\boxed{\partial^2_{12}(f) = \partial^2_{21}(f)}$.

Ceci est faux si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème 18.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Alors la matrice hessienne de h en tout point $(x, y) \in D$ est symétrique.
En particulier, $\nabla^2(f)(x, y)$ est donc diagonalisable.

IV.4. Développement limité d'ordre 2

- On dit que f admet un développement limité à l'ordre 2 au point (x_0, y_0) s'il existe $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(x_0+h, y_0+k) = a_1+a_2\times h+a_3\times k+a_4\times h^2+a_5\times hk+a_6\times k^2+(h^2+k^2)\times\varepsilon(h,k)$$

où ε est définie au voisinage de $(0,0)$, et de limite nulle en $(0,0)$.

- En réalité, si f admet un développement limité alors celui-ci est unique. Il est alors donné par le théorème suivant.

Théorème 19 (*formule de Taylor-Young*)**.**

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Soit $(x_0, y_0) \in D$.

Alors pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que $(x_0+h, y_0+k) \in D$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x_0+h, y_0+k) & = & f(x_0,y_0) \\ & + & \partial_1(f)(x_0,y_0)\times h + \partial_2(f)(x_0,y_0)\times k \\ & + & \dfrac{1}{2}\Big(\quad \partial^2_{11}(f)(x_0,y_0)\times h^2 \\ & & \quad + \ \partial^2_{21}(f)(x_0,y_0)\times kh \\ & & \quad + \ \partial^2_{12}(f)(x_0,y_0)\times hk \\ & & \quad + \ \partial^2_{22}(f)(x_0,y_0)\times k^2 \quad \Big) \\ & + & (h^2+k^2)\times\varepsilon(h,k) \end{array}}$$

où ε est définie au voisinage de $(0,0)$, et de limite nulle en $(0,0)$.

Remarque

- Ce développement limité peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x_0+h, y_0+k) & = & f(x_0,y_0) \\ & + & {}^t\nabla(f)(x_0,y_0)\times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ & + & \dfrac{1}{2}\,\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\times\nabla^2(f)(x_0,y_0)\times\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ & + & (h^2+k^2)\times\varepsilon(h,k) \end{array}}$$

- Cette formule est l'analogue de la formule pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\times h + f''(x_0)\times h^2 + h^2\ \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction définie dans un voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Remarque `(CULTURE)`

- Considérons la fonction :

$$q_{(x_0,y_0)} \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (h,k) & \mapsto & {}^t\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\times\nabla^2(f)(x_0,y_0)\times\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \end{array}$$

Le fait que la matrice $H_{(x_0,y_0)} = \nabla^2(f)(x_0,y_0)$ soit symétrique réelle fait de $q_{(x_0,y_0)}$ une **forme quadratique**. L'étude des propriétés remarquables de telles applications réelles est réservée à la voie ECS.

- Imaginons que la matrice $H_{(x_0,y_0)}$ associée à cette forme quadratique soit diagonale. On a alors, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$q_{(x_0,y_0)}(h,k) \ = \ {}^tU \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \times U \ = \ \lambda_1\ h^2 + \lambda_2\ k^2$$

où on a noté $U = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

Plusieurs cas se présentent :

× si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$:

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}, \ q_{(x_0,y_0)}(h,k) > 0$$

L'inégalité est large si $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ($\lambda_1 = 0$ OU $\lambda_2 = 0$).

× si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$:

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}, \ q_{(x_0,y_0)}(h,k) < 0$$

L'inégalité est large si $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ($\lambda_1 = 0$ OU $\lambda_2 = 0$).

× si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ OU si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$

Alors $q_{(x_0,y_0)}$ n'est pas de signe constant (prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives).

- Ce résultat obtenu dans le cas où $q_{(x_0,y_0)}$ est diagonale est en réalité vérifié sans cette hypothèse. Comme $H_{(x_0,y_0)}$ est une matrice symétrique réelle, $H_{(x_0,y_0)}$ est diagonalisable.
Il existe donc $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que :

$$H_{(x_0,y_0)} \quad = \quad P \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ P^{-1}$$

Mieux : l'étude de la diagonalisabilité des matrices symétriques permet d'affirmer que $P^{-1} = {}^tP$ (on dit que P est une matrice **orthogonale**).
En notant $U = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} {}^tU \ H_{(x_0,y_0)} \ U &= {}^tU \ {}^tP^{-1} \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ P^{-1}U \\ &= {}^t\big(P^{-1}U\big) \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ \big(P^{-1}U\big) \\ &= {}^tV \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ V \ = \ \lambda_1 \, v_1^2 + \lambda_2 \, v_2^2 \end{aligned}$$

en notant $V = P^{-1}U = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

- Citons enfin une dernière propriété.

Soit $(h,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} q_{(x_0,y_0)}\big(a\,h, a\,k\big) &= \partial^2_{11}(f)(x_0,y_0) \times a^2\,h^2 \\ &\quad + \partial^2_{21}(f)(x_0,y_0) \times a^2\,kh \\ &\quad + \partial^2_{12}(f)(x_0,y_0) \times a^2\,hk \\ &\quad + \partial^2_{22}(f)(x_0,y_0) \times a^2\,k^2 \\ &= a^2 \Big(\partial^2_{11}(f)(x_0,y_0) \times h^2 \\ &\quad + \partial^2_{21}(f)(x_0,y_0) \times kh \\ &\quad + \partial^2_{12}(f)(x_0,y_0) \times hk \\ &\quad + \partial^2_{22}(f)(x_0,y_0) \times k^2 \Big) \\ &= a^2 \, \Big(q_{(x_0,y_0)}(h,k)\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{q_{(x_0,y_0)}\,\big(a \times (h,k)\big) \ = \ a^2 \times q_{(x_0,y_0)}(h,k)}$$

On voit apparaître ici le caractère quadratique de $q_{(x_0,y_0)}$.
En prenant $a = \dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} q_{(x_0,y_0)}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) &= q_{(x_0,y_0)}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \times (h,k)\right) \\ &= \frac{1}{h^2+k^2} \times q_{(x_0,y_0)}(h,k) \end{aligned}$$

V. Extrema d'une fonction de deux variables réelles

V.1. Extremum local d'une fonction de deux variables

V.1.a) Définition

Définition

Soit D un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

Soit $M_0 \in D$.

- On dit que f admet un **maximum local** en M_0 si il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall M \in B(M_0, r),\ f(M) \leqslant f(M_0)}$$

  Le maximum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $M \in D$.

- On dit que f admet un **minimum local** en M_0 si il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall M \in B(M_0, r),\ f(M) \geqslant f(M_0)}$$

  Le minimum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $M \in D$.

V.1.b) Notion de point critique

Définition

Soit D un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur D.

Soit $M_0 \in D$.

On dit que $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ est un **point critique** de f si :

$$\boxed{\nabla(f)(x_0, y_0) = 0}$$

Autrement dit si : $\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x_0, y_0) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) & = & 0 \end{array} \right.$

V.1.c) Condition nécessaire d'extremum local

Théorème 20 (*Condition nécessaire d'extremum local*)**.**

Soit D un **ouvert** *de $\mathbb{R}^2$.*

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur D.

Soit $M_0 \in D$.

$$\boxed{f \text{ admet un extremum local en } M_0 \quad \Rightarrow \quad M_0 \text{ est un point critique de } f}$$

Comme pour les fonctions d'une variable réelle, c'est une condition **nécessaire** mais **pas suffisante**.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & (x,y) & \mapsto & xy \\ & & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

Vérifier que $(0,0)$ est un point critique de f, et que f n'admet pas d'extremum local en 0.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ car polynomiale. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. De plus :

$$\partial_1(f)(x,y) = y \quad \text{ et } \quad \partial_2(f)(x,y) = x$$

- En particulier, on a $\nabla(f)(0,0) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
- Par ailleurs, pour tout réel $h \neq 0$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & f(0+h,0-h) & < & f(0,0) & < & f(0+h,0+h) & & \\ & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ -h^2 & = & f(h,-h) & < & 0 & < & f(h,h) & = & h^2 \end{array}$$

Ainsi, f n'admet pas d'extremum local en 0. □

Remarque

- On présente ici une technique classique pour démontrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc pas d'extremum global) en (x_0,y_0).
- L'idée est la suivante :
  × on se place en (x_0,y_0) et on calcule la valeur $f(x_0,y_0)$.
  × on se déplace alors autour de (x_0,y_0) *i.e.* on considère les points de la forme (x_0+h,y_0+k) où h et k sont des réels dans un voisinage de 0.
  × on démontre alors :

$$f(x_0+h,y_0+k) > f(x_0,y_0) \quad \big(\text{resp. } f(x_0+h,y_0+k) < f(x_0,y_0)\big)$$

  ce qui permet de conclure que (x_0,y_0) n'est pas un maximum local (resp. minimum local).
- Il est très fréquent de regarder les valeurs que l'on obtient pour f en partant de (x_0,y_0) suivant une direction précise. On peut par exemple considérer la direction :
  × $(h,-h)$ et ainsi comparer $f(x_0+h,y_0-h)$ à $f(x_0,y_0)$.
  × (h,h) et ainsi comparer $f(x_0+h,y_0+h)$ à $f(x_0,y_0)$.
  × $(0,h)$ et ainsi comparer $f(x_0,y_0+h)$ à $f(x_0,y_0)$.
  × $(h,0)$ et ainsi comparer $f(x_0+h,y_0)$ à $f(x_0,y_0)$.

  Généralement, c'est l'exercice qui propose la direction à suivre.

Exercice
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

2. Déterminer un équivalent de $f(x,x)-f(0,0)$ et de $f(x,0)-f(0,0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0,0)$?

3. Rechercher les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

V.1.d) Condition suffisante d'extremum local

Théorème 21 (Condition suffisante d'extremum local)**.**

Soit D un **ouvert** *de $\mathbb{R}^2$.*

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ un point critique de f.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert D. Ainsi, la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est symétrique réelle (d'après le théorème de Schwarz).
Elle est donc diagonalisable et il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible tels que :

$$\nabla^2(f)(x_0, y_0) \ = \ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$)

1) | *Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives* $\Rightarrow$ *f admet un minimum local en (x_0, y_0)* |

2) | *Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives* $\Rightarrow$ *f admet un maximum local en (x_0, y_0)* |

3) | *Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés* $\Rightarrow$ *f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0)* |

Dans ce cas, on dira que f admet un **point selle** *ou* **point col**.

4) Si au moins une valeur propre de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut rien conclure par cette méthode.
Il faudra alors procéder à une étude plus précise.

Démonstration.
Cette démonstration n'est pas au programme de la voie ECE. Cependant, le point `(CULTURE)` concernant la forme quadratique $q_{(x_0,y_0)}$ nous donne les outils suffisants à cette démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert D.
  Elle admet donc un développement limité en $(x_0, y_0) \in D$.
  Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$, on a :

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ = \ & \cancel{{}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} \\ & + \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \times \nabla^2(f)(x_0, y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2 + k^2) \times \varepsilon(h, k) \\ = \ & \frac{1}{2}\, q_{(x_0,y_0)}(h, k) + (h^2 + k^2) \times \varepsilon(h, k) \\ = \ & \frac{1}{2}\, (h^2 + k^2)\ q_{(x_0,y_0)}\big(\tfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \tfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\big) + (h^2 + k^2) \times \varepsilon(h, k) \\ = \ & (h^2 + k^2) \left(q_{(x_0,y_0)}\big(\tfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \tfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\big) + \varepsilon(h, k) \right) \end{aligned}$$

- Remarquons alors que le point $\big(\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\big)$ appartient à la boule $B_f(0, 1)$ (c'est un élément du bord de cette boule).
  La fonction $g = \frac{1}{2}\, q_{(x_0,y_0)}$ est une fonction polynomiale à deux indéterminées. Elle est donc continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et en particulier sur $B_f(0, 1)$.
  La fonction g est continue sur la partie fermée et bornée $B_f(0, 1)$.
  Elle admet donc sur cette partie un minimum noté m et un maximum noté M (*théorème à venir !*). On en déduit, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$m \ \leqslant \ \frac{1}{2}\, q_{(x_0,y_0)}\big(\tfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \tfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\big) \ \leqslant \ M$$

$$\text{et} \quad m + \varepsilon(h, k) \ \leqslant \ q_{(x_0,y_0)}\big(\tfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \tfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + \varepsilon(h, k)\big) \ \leqslant \ M + \varepsilon(h, k)$$

- Finalement, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

  $$(h^2+k^2)\big(m+\varepsilon(h,k)\big) \leqslant f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) \leqslant (h^2+k^2)\big(M+\varepsilon(h,k)\big)$$

- Étudions maintenant les cas proposés par le théorème.

  1) si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ alors la forme quadratique $q_{(x_0,y_0)}$ est strictement positive en tout point différent de $(0,0)$. On en déduit : $m > 0$.
  Et comme ε est de limite nulle en $(0,0)$, on a, au voisinage de $(0,0)$:

  $$\big| \, \varepsilon(h,k) \, \big| \leqslant \frac{m}{2} \qquad \text{et ainsi} \qquad -\frac{m}{2} \leqslant \varepsilon(h,k) \leqslant \frac{m}{2}$$

  Ainsi, au voisinage épointé de $(0,0)$:

  $$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) \geqslant (h^2+k^2)\,\frac{m}{2} > 0$$

  D'où : $f(x_0+h,y_0+k) > f(x_0,y_0)$.
  La fonction f atteint bien un minimum local en (x_0,y_0).

  2) si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors la forme quadratique $q_{(x_0,y_0)}$ est strictement négative en tout point différent de $(0,0)$. On en déduit : $M < 0$.
  Et comme ε est de limite nulle en $(0,0)$, on a, au voisinage de $(0,0)$:

  $$\big| \, \varepsilon(h,k) \, \big| \leqslant -\frac{M}{2} \qquad \text{et ainsi} \qquad \frac{M}{2} \leqslant \varepsilon(h,k) \leqslant -\frac{M}{2}$$

  Ainsi, au voisinage épointé de $(0,0)$:

  $$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) \leqslant (h^2+k^2)\,\frac{M}{2} < 0$$

  D'où : $f(x_0+h,y_0+k) < f(x_0,y_0)$.
  La fonction f atteint bien un maximum local en (x_0,y_0).

  3) Admis. L'idée est de démontrer la contraposée :

  $$f \text{ admet un extremum local en } (x_0,y_0) \ \Rightarrow\ \lambda_1 \times \lambda_2 \geqslant 0$$

  Il s'agit de démontrer que si f admet un minimum (resp. maximum) local en M_0 alors $q_{(x_0,y_0)}$ est une fonction positive (resp. négative). $\square$

Exemple

1) Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$.

- La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:
$$\partial_1(f)(x,y) = 2x \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = 2y$$
- Le seul point critique de f est donc $(0,0)$.
Calculons la matrice hessienne de f. Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:
$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- On a donc $\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et la seule valeur propre de $\nabla^2(f)(0,0)$ est $2 > 0$. La fonction f admet un minimum local en $(0,0)$, ce qui est cohérent avec le graphe de f.

2) Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$.

- La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:
$$\partial_1(f)(x,y) = 2x \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = -2y$$
- Le seul point critique de f est donc $(0,0)$.
Calculons la matrice hessienne de f. Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:
$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
- On a donc $\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, et les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont non nulles et de signe opposé. La fonction f admet un point selle en $(0,0)$ ce qui est cohérent avec le graphe de f.

3) Déterminer puis étudier les points critiques de $f(x,y) = xy$.

- La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:
$$\partial_1(f)(x,y) = y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = x$$
Le seul point critique de f est donc $(0,0)$. Calculons la matrice hessienne de f. Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:
$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
On a donc $H = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Le déterminant de $H - \lambda I$ est donné par $\lambda^2 - 1$, et on déduit que $H - \lambda I$ n'est pas inversible si, et seulement si, λ vaut -1 ou 1.
Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont -1 et 1 qui sont non nulles et de signe opposé.
La fonction f admet un point selle en $(0,0)$ ce qui est cohérent avec le graphe de f.

V.1.e) Condition suffisante d'extremum local (bis) (CULTURE)

Théorème 22 (Condition suffisante d'extremum local)**.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point critique de f.

Notons : $\Delta = \partial_1(f)(x_0, y_0) \times \partial_2(f)(x_0, y_0) \ - \ \big(\partial^2_{1,2}(f)(x_0, y_0)\big)^2$.

1) $\boxed{\text{Si } \Delta > 0 \text{ alors } f \text{ admet un extremum local au point } (x_0, y_0).}$

a. *Si $\partial^2_{11}(f)(x_0, y_0) > 0$, c'est un minimum.*

b. *Si $\partial^2_{11}(f)(x_0, y_0) < 0$, c'est un maximum.*

2) $\boxed{\text{Si } \Delta < 0 \text{ alors } f \text{ n'admet pas d'extremum local au point } (x_0, y_0).}$

3) $\boxed{\text{Si } \Delta = 0, \text{ on ne peut pas conclure par cette méthode.}}$

Il faudra alors procéder à une étude plus précise.

Remarque

- Ce résultat n'apparaît pas explicitement dans le BO en tant que tel. Pour autant, la formulation de certains sujets de concours laissent à penser que le concepteur avait ce résultat en tête lors de l'écriture de l'énoncé.
- Ce résultat est souvent présenté avec les notations dues à Monge. Plus précisément, on note :

$$\nabla^2(f)(x_0, y_0) \ = \ \begin{pmatrix} \partial^2_{11}(f)(x_0, y_0) & \partial^2_{12}(f)(x_0, y_0) \\ \partial^2_{21}(f)(x_0, y_0) & \partial^2_{22}(f)(x_0, y_0) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

En particulier : $\Delta = rt - s^2$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert D.
Ainsi, $H = \nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est symétrique réelle et donc diagonalisable.
On en conclut qu'il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible tels que :

$$\nabla^2(f)(x_0, y_0) \ = \ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$)

Dans la suite, on adopte les notations de Monge, à savoir :

$$H \ = \ \nabla^2(f)(x_0, y_0) \ = \ \begin{pmatrix} r & t \\ t & s \end{pmatrix}$$

- Remarquons alors :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\, I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det\big(H - \lambda\, I_2\big) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det\left(\begin{pmatrix} r-\lambda & t \\ t & s-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (r-\lambda)\,(t-\lambda) - s^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda^2 - (r+t)\,\lambda + (rt - s^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{array}{l} \lambda \text{ est racine du polynôme} \\ P(X) = X^2 - (r+t)\,X + (rt - s^2) \end{array} \end{array}$$

- Comme λ_1 et λ_2 sont valeurs propres (pas forcément distinctes !), alors elles sont racines de P. Précisons que P ne peut admettre d'autre racine (sinon H aurait une valeur propre différente de λ_1 et λ_2). On en déduit que P est facteur de $(X - \lambda_1)$ et $(X - \lambda_2)$. Enfin, comme P est unitaire :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & (X - \lambda_1)\,(X - \lambda_2) \\ & = & X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\,X + \lambda_1\,\lambda_2 \end{array}$$

- On en déduit, par identification :

$$\left\{\begin{array}{rcl} r+t & = & \lambda_1+\lambda_2 \\ rt-s^2 & = & \lambda_1\,\lambda_2 \end{array}\right.$$

Plusieurs cas se présentent alors.

1) Si $rt-s^2>0$ alors $\lambda_1\,\lambda_2>0$.
Ainsi, λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.
On en déduit que f atteint un extremum local en (x_0,y_0).
Il reste alors à déterminer le signe de ces valeurs propres pour conclure quant au type de cet extremum. Remarquons :

$$rt \ = \ \lambda_1\,\lambda_2+s^2 \ > \ 0$$

Ainsi, r et t sont aussi deux quantités non nulles et de même signe.

a. Si $r>0$ alors $r+t>0$.
Ainsi $\lambda_1+\lambda_2>0$ et comme ces deux valeurs propres sont de même signe, on conclut $\lambda_1>0$ et $\lambda_2>0$.

b. Si $r>0$ alors $r+t<0$.
Et par le même raisonnement, on conclut $\lambda_1<0$ et $\lambda_2<0$.

2) Si $rt-s^2>0$ alors $\lambda_1\,\lambda_2<0$.
On en déduit que f admet un point selle en (x_0,y_0).

3) Si $rt-s^2=0$ alors $\lambda_1\,\lambda_2 = 0$. L'une (au moins) des deux valeurs propres de H est nulle. On ne peut conclure par cette méthode. □

Remarque
Si l'on connaît les propriétés des opérateurs tr et det, il est simple d'obtenir le lien entre les valeurs propres et les coefficients de la matrice hessienne :

$$\begin{array}{rcl} \det\left(P^{-1}HP\right) & = & \det(P^{-1})\ \det(H)\ \det(P) \ = \ \det(P^{-1})\ \det(P)\ \det(H) \\ & = & \det(P^{-1}P)\ \det(H) \ = \ \det(H) \end{array}$$

D'où : $\lambda_1\,\lambda_2 = rt-s^2$.

$$\mathrm{tr}\left(P^{-1}(HP)\right) \ = \ \mathrm{tr}\left((HP)P^{-1}\right) \ = \ \mathrm{tr}\left((HP)P^{-1}\right) \ = \ \mathrm{tr}(H)$$

D'où : $\lambda_1+\lambda_2 = r+t$.

V.2. Extremum global

Théorème 23.
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D.

1) f est continue sur D *2) D est fermé borné*	$\Rightarrow$	*f est bornée et atteint ses bornes sur D*

Exercice
On considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = x+1+2\mathrm{e}^x$$

ainsi que la fonction f de deux variables réelles x et y définie par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x(x+y^2+\mathrm{e}^x).$$

1) Étudier les variations de g et donner les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

2) Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de g par rapport à cette asymptote.

3) Déduire des variations de g l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2,-1]$ tel que $g(\alpha)=0$ (on rappelle que $\mathrm{e}\approx 2,7$).

4) Déterminer le seul point critique de f.

5) Vérifier que f présente un extremum local β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?

6) L'extremum trouvé est-il global ?

Exercice *(d'après* `ECRICOME 2000`*)*
T est l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations :

$$x\geqslant\frac{1}{4};\ y\geqslant\frac{1}{4};\ x+y\leqslant\frac{3}{4}$$

On note T' « l'intérieur de T » à savoir l'ensemble des couples (x,y) solutions du système d'inéquations :

$$x>\frac{1}{4};\ y>\frac{1}{4};\ x+y<\frac{3}{4}$$

On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que T est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Soit f la fonction définie sur T par : $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x+y}$.

1. Représenter sur un même graphique T et T'.

2. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur T.

3. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur T'.

b) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.

c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori global) sur T'.

4. a) Montrer que le minimum et le maximum de f sont atteints sur :

$$\mathscr{C}=\left\{(x,y)\in T\ ;\ x=\frac{1}{4}\text{ ou }y=\frac{1}{4}\text{ ou }x+y=\frac{3}{4}\right\}.$$

b) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x,y) de T :

$$2\leqslant f(x,y)\leqslant\frac{16}{3}$$

Exercice
On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x)=x^2\mathrm{e}^x-1,\quad\text{pour tout réel }x.$$

1. Dresser le tableau de variations de ϕ en précisant la valeur de ϕ en 0 et les limites en $-+\infty$ et $+\infty$.

2. Établir que l'équation $\mathrm{e}^x=\frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x>0$, possède une unique solution, notée α, et que α appartient à l'intervalle $]1/2,1[$.

On considère l'ouvert $U=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et la fonction g définie sur U par

$$g(x,y)=\frac{1}{x}+\mathrm{e}^x-y^2\mathrm{e}^y,\quad\text{pour tout }(x,y)\text{ dand }U.$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U.

2. Calculer les dérivées premières de g sur U.

3. Montrer que g admet deux, et seulement deux, points critiques qui sont $(\alpha,0)$ et $(\alpha,-2)$.

4. Est-ce g admet un extremum local en $(\alpha,0)$?

5. Est-ce g admet un extremum local en $(\alpha,-2)$?

6. Est-ce g admet un extremum global sur U ?