

Remarque

- Notons que si $a \leq \mathbb{E}(X)$, alors l'inégalité est évidente (et donc peu intéressante). En effet, dans ce cas, on a directement : $\mathbb{P}([X \geq a]) \leq 1 \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$. Dans le cas où a est « grand » par rapport à $\mathbb{E}(X)$, on obtient un résultat de bon sens : la probabilité que X prenne de grandes valeurs est d'autant plus faible que celles-ci excèdent $\mathbb{E}(X)$.
- Dans le théorème, nous n'avons pas précisé si X est une v.a.r. à densité ou discrète. La démonstration est valide dans les deux cas.
- Mieux : la démonstration est aussi valable lorsque X est un v.a.r. quelconque (ni discrète, ni à densité). Le seul passage subtil de la démonstration est alors la croissance de l'espérance, opérateur seulement défini pour les v.a.r. discrètes et à densité dans le programme d'ECE.
- Cependant, il existe une théorie mathématique qui définit une notion d'espérance valable pour toute v.a.r. (discrète, à densité, ou autres). L'opérateur ainsi défini vérifie les propriétés classiques de l'espérance, notamment la linéarité et la croissance.

Théorème 2.

Soit $m \in \mathbb{N}$.

Soit X une v.a.r. possédant un moment d'ordre m .

$$\forall a > 0, \mathbb{P}([|X| \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^m)}{a^m}$$

Démonstration.

On utilise l'inégalité de Markov à la v.a.r. $|X|^m$ et au réel $a^m > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([|X|^m \geq a^m]) &\leq \frac{\mathbb{E}(|X|^m)}{a^m} \\ &\stackrel{||}{=} \mathbb{P}([|X| \geq a]) \end{aligned}$$

□

I.2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**Théorème 3** (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit X une v.a.r. qui admet une variance.

Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}([|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la v.a.r. $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$. On est dans le cadre d'application de l'inégalité de Markov :

× $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ est à valeurs positives.

× la v.a.r. Y admet une espérance car X admet une variance.

En appliquant l'inégalité de Markov à la v.a.r. Y , avec $a = \varepsilon^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y \geq \varepsilon^2]) &= \mathbb{P}([(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2]) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} \\ &\stackrel{||}{=} \mathbb{P}([|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon]) \stackrel{||}{=} \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

□

Remarque

- Ce résultat est une inégalité de concentration. Grâce à ce type d'inégalités, on peut mesurer / contrôler la probabilité qu'un phénomène aléatoire puisse s'écarter (on préférera le terme dévier) de la moyenne *i.e.* d'un comportement standard.
- Évidemment, il est rare de constater de grandes déviations. La question que se pose une compagnie d'assurances est de savoir si elle est prête à parier sur le fait qu'une grande déviation (*i.e.* un événement qui s'écarte fortement de la norme) ne se produira pas. Il est alors primordial dans ce cas d'obtenir des inégalités de concentration avec un majorant le plus précis possible.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est peu précise. L'une des raisons est qu'elle s'applique à toute v.a.r. . On peut évidemment obtenir de meilleures majorations en tirant parti des propriétés (*i.e.* de la loi) des v.a.r. étudiées.

I.3. La loi faible des grands nombres

I.3.a) Énoncé et convergence en probabilité

Théorème 4 (Loi faible des grands nombres).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.

On suppose que les v.a.r. de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

- × sont indépendantes,
- × admettent toutes la même espérance m ,
- × admettent toutes la même variance σ^2 .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ (moyenne empirique).

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} ([|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon]) = 0$$

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour toute v.a.r. Y admettant une variance $\mathbb{V}(Y)$, on a :

$$\forall \lambda > 0, \mathbb{P} ([|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \lambda]) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\lambda^2}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la v.a.r. $Y = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.
 - × La v.a.r. \bar{X}_n admet une espérance (resp. variance) car elle est la CL de v.a.r. qui admettent une espérance (resp. variance).

× De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{X}_n) &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m = \frac{1}{n} n \times m = m \end{aligned}$$

× Et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\bar{X}_n) &= \mathbb{V} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) \quad (\text{car les v.a.r. de la suite } (X_n) \text{ sont indépendantes}) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n \times \sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

- Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P} ([| \bar{X}_n - m | \geq \varepsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \square$$

Remarque

- Il est fréquent de considérer (notamment pour les simulations informatiques) une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de v.a.r. :
 - × indépendantes,
 - × **de même loi**,
 - × admettant une espérance et une variance.

Ces hypothèses sont plus strictes que celles énoncées par la LfGN.

On peut donc bien évidemment utiliser la LfGN dans ce cadre.

- On dit qu'une suite de v.a.r. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **converge en probabilité** vers une v.a.r. X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([|X_n - X| \geq \varepsilon]) = 0$$

Dans ce cas, on note : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$.

- Via cette définition, on comprend que la LfGN établit un résultat de convergence d'une suite de v.a.r. : la suite de v.a.r. $(\overline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **converge en probabilité** vers la v.a.r. certaine égale à m .
- Il existe une loi forte des grands nombres. Sous des hypothèses plus exigeantes, on établit que la suite de v.a.r. $(\overline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la v.a.r. certaine égale à m . On retrouve le résultat précédent, à ceci près que le mode de convergence (appelé convergence presque sûre) est un mode plus exigeant que la convergence en probabilité (la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité).

I.3.b) Intuition derrière cet énoncé

Exemple (classique)

- On considère un dé à 6 faces (truqué ou non).
 - Expérience : on effectue un lancer de ce dé et on note X la v.a.r. égale au résultat obtenu lors de ce lancer.
 - But : on souhaite, à l'aide d'expériences, savoir si le dé peut être considéré comme équilibré. Autrement dit, on souhaite connaître la loi de X . Plus particulièrement, on souhaiterait connaître $\mathbb{P}([X = 6])$.
- Pour obtenir une approximation de cette probabilité $\mathbb{P}([X = 6])$, il est naturel de procéder comme suit :
 - × on effectue un grand nombre N de tirages.
 - × on compte le nombre d'apparitions de la face 6 au cours de ce N tirages.
 On observe alors la fréquence d'apparition de cette face :

$$\begin{array}{l} \text{fréquence d'apparition} \\ \text{observée de la face 6} \end{array} = \frac{\text{nombre de 6 obtenus en } N \text{ tirages}}{N}$$

Il est naturel de penser que cette fréquence observée est une bonne approximation de $\mathbb{P}([X = 6])$. La LfGN n'est rien d'autre qu'une validation mathématique de ce procédé. Faisons le lien plus formellement.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la v.a.r. qui donne le résultat du $i^{\text{ème}}$ lancer. On note par ailleurs Z_i la v.a.r. définie par :

$$Z_i : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit : $Z_i = \mathbb{1}_{[X_i=6]}$. On a alors :

$$Z_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \quad \text{où} \quad p = \mathbb{P}([X_i = 6])$$

En particulier : $\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[X_i=6]}) = \mathbb{P}([X_i = 6])$.

- La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables :
 - × indépendantes (le résultat d'un lancer ne dépend pas des précédents),
 - × de même espérance p ,
 - × de même variance $\sigma^2 = p(1-p)$.
 On en déduit, par la loi faible des grands nombres que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

ce que l'on préférera noter : $\overline{Z}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} p$.

- La v.a.r. \overline{Z}_n donne la fréquence d'apparition de la face 6 au cours des n premiers lancers. La loi faible des grands nombres affirme que, plus n est grand, plus la fréquence d'apparition du 6 au cours des n lancers est proche de la fréquence théorique ($= \mathbb{P}([X = 6])$) avec une forte probabilité.

I.3.c) Lien avec la simulation informatique

On se reportera au document établissant le lien entre loi faible des grands nombres et simulation informatique.

II. Convergence en loi

II.1. Définition

Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{X_n} les fonctions de répartition correspondantes)

Soit X une v.a.r. définie sur ce même espace probabilisé.

(on note F_X la fonction de répartition de la v.a.r. X)

- On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable X , lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en tout point de continuité x de la fonction F_X .

- Lorsque c'est le cas, on note $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$.

Remarque

- Considérons une suite de v.a.r. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$.

On a alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ où a et b sont des points de continuité de F_X tels que $a \leq b$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([a < X_n \leq b]) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

- Rappelons par ailleurs que la fonction de répartition d'une v.a.r. X caractérise la loi de X . Autrement dit, déterminer F_X c'est déterminer la loi de X . On pourra alors retenir que la convergence en loi c'est la « convergence des fonctions de répartition ».

- Rappelons enfin que pour toute v.a.r. X :

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{P}([X = x]) = 0$$

Cas particulier des v.a.r. à densité / v.a.r. discrètes

1) Cas des v.a.r. à densité

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.

Soit X une v.a.r. **à densité**.

Comme X est à densité, sa fonction de répartition F_X est continue sur \mathbb{R} . On peut alors reformuler la définition de convergence en loi :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Dans ce cas (X v.a.r. **à densité**), on peut même démontrer (technique) :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([a \leq X_n \leq b]) = \mathbb{P}([a \leq X \leq b])$$

2) Cas des v.a.r. discrètes

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. **discrètes**.

Soit X une v.a.r. **discrète**.

On suppose de plus que les v.a.r. X_n et la v.a.r. X sont à valeurs dans le même ensemble. Plus précisément, on considère ici le cas où :

× $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à valeurs dans \mathbb{N} (resp. \mathbb{Z}).

× X est à valeurs dans \mathbb{N} (resp. \mathbb{Z}).

On a alors :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \text{ (resp. } \mathbb{Z}), \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k])$$

II.2. Illustration sur des exemples

II.2.a) Cas d'une suite de v.a.r. discrètes convergeant en loi vers une v.a.r. discrète

Théorème 5.

Soit $\lambda > 0$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Alors : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration.

- On est dans le cas où :
 - × $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. **discrètes** à valeurs dans \mathbb{N} .
 - × X est une v.a.r. **discrète** à valeurs dans \mathbb{N} .
- Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k])$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{N}$.
Comme on s'intéresse à un résultat lorsque $n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, on peut considérer n aussi grand que souhaité. En particulier : $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

- Intéressons-nous aux termes de ce produit.

1) Tout d'abord :

$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^k} = 1$$

En effet, le numérateur apparaît comme produit de k éléments qui sont tous équivalents, lorsque n tend vers $+\infty$, à n .

2) Notons $u_n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)$.

Or :

$$\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cancel{n} \frac{-\lambda}{\cancel{n}} = -\lambda$$

On en déduit : $\ln(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\lambda$ et $u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\lambda}$.

3) Enfin, comme : $1 - \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, on a :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1} = 1$$

En conclusion :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = k]) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])$$

où X est une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. \square

Remarque

- Dans la pratique, on considère qu'on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$ lorsque $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$.
- Si X une v.a.r. tel que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et que les contraintes précédentes sur n et p sont vérifiées, on utilise alors l'approximation :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) \simeq e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$$

- La loi de Poisson est généralement utilisée comme loi de v.a.r. consistant à calculer le nombre d'événements d'un certain type se produisant sur un laps de temps donné. Cette modélisation est valide si :

- 1) les événements se produisant sont indépendants,
- 2) la probabilité d'apparition du phénomène dans un laps de temps donné T ne dépend que de cette durée T .

Le résultat précédent démontre que l'on peut approcher la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Cette dernière loi est utilisée pour compter le nombre de succès (c'est le rôle de la v.a.r. X_n) au cours d'une expérience consistant à la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $p = \frac{\lambda}{n}$. L'approximation est d'autant meilleure que n est grand (et donc p petit). C'est pourquoi on qualifie parfois la loi de Poisson de « loi des événements rares ».

- Illustrons enfin ce résultat sur un exemple.
Notons X une v.a.r. telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, 0.05)$.
× Par définition de la loi binomiale :

$$\mathbb{P}([X = 2]) = \binom{100}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^{98} \simeq 0.0812$$

- × Comme $n \geq 30$ et $p = 0.05 \leq 0.1$, on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$. On obtient alors :

$$\mathbb{P}([X = 2]) \simeq \frac{5^2}{2!} e^{-5} \simeq 0.0842$$

II.2.b) Cas d'une suite de v.a.r. à densité convergeant en loi vers une v.a.r. discrète**Exercice** (d'après ESCP 1987)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à densité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de X_n est définie par :

$$F_{X_n} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^n} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

Exercice

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à densité.

Plus précisément, on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\frac{1}{n}, \frac{1}{n}])$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

II.2.c) Cas d'une suite de v.a.r. discrètes convergeant en loi vers une v.a.r. à densité

Exercice

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.

Plus précisément, on suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{U} \left(\left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\} \right)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout réel x :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. Montrer l'équivalent : $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

3. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X telle que :
 $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

II.2.d) Cas d'une suite de v.a.r. à densité convergeant en loi vers une v.a.r. à densité

Exercice

Soit X une v.a.r. à densité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = e^{\frac{1}{n}} X$.

Montrer que (X_n) converge en loi vers X .

III. Approximation de v.a.r. par le TCL

III.1. Théorème central limite

Théorème 6 (Théorème central limite).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :

- × indépendantes,
- × de même loi,
- × de même espérance m ,
- × et de même variance σ^2 **non nulle**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad \bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \bar{X}_n^* = \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Alors : $\boxed{\bar{X}_n^* \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)}$

Autrement dit, la suite $(\bar{X}_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. En particulier, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left[a \leq \bar{X}_n^* \leq b \right] \right) = \mathbb{P}([a \leq Z \leq b])}$$

Remarque

- Insistons sur le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\bar{X}_n^* = S_n^*$.
Le TCL peut donc s'exprimer avec l'une ou l'autre de ces variables. Le choix dépendra du contexte. Dans un exercice d'estimation, on préférera introduire la v.a.r. \bar{X}_n (moyenne empirique); dans un contexte d'approximation de lois (à suivre), on préférera travailler sur la v.a.r. S_n .
- En pratique, on considère que l'on peut approcher la loi de \bar{X}_n^* par la loi normale centrée réduite dès que : $n \geq 30$.

III.2. Idée générale de l'approximation de lois par TCL

- On se place dans le cadre d'utilisation du théorème précédent. On a alors :

$$\bar{X}_n^* \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

On se pose alors la question de savoir ce que résultat permet de conclure quant à la loi de S_n . Pour ce faire, déterminons F_{S_n} .

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= \mathbb{P}([S_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([S_n - nm \leq x - nm]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \leq \frac{x - nm}{\sigma \sqrt{n}}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[S_n^* \leq \frac{x - nm}{\sigma \sqrt{n}}\right]\right) \\ &\simeq \mathbb{P}\left(\left[Z \leq \frac{x - nm}{\sigma \sqrt{n}}\right]\right) \quad (\text{pour une valeur de } n \text{ suffisamment grande}) \\ &= \mathbb{P}([\sigma \sqrt{n} Z + nm \leq x]) = F_{\sigma \sqrt{n} Z + nm}(x) \end{aligned}$$

On peut donc considérer que, pour n suffisamment grand, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sigma \sqrt{n} Z + nm$ ont même loi.

- Mais quelle est la loi de $Z_n = \sigma \sqrt{n} Z + nm$?

Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale. On détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant espérance et variance de Z_n :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\sigma \sqrt{n} Z + nm) = \sigma \sqrt{n} \mathbb{E}(Z) + nm = nm$$

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(\sigma \sqrt{n} Z + nm) = (\sigma \sqrt{n})^2 \mathbb{V}(Z) = n\sigma^2$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$.

III.3. Illustration sur des exemples

III.3.a) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Théorème 7.

Soit $p \in]0, 1[$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes.

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1) Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^* : S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

$$2) \quad S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z, \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

3) Pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Démonstration.

1) Déjà vu lors du chapitre sur les couples de v.a.r.

2) C'est une application directe du TCL.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= \mathbb{P}([S_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[S_n^* \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]\right) \\ &\simeq \mathbb{P}\left(\left[Z \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]\right) \quad (\text{pour une valeur de } n \text{ suffisamment grande}) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{np(1-p)} Z + np \leq x\right]\right) = F_{\sqrt{np(1-p)} Z + np}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sqrt{np(1-p)} Z + np$ suivent approximativement la même loi pour n suffisamment grand.

Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale. On détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant espérance et variance de Z_n :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\sqrt{np(1-p)} Z + np) = \sqrt{np(1-p)} \mathbb{E}(Z) + np = np$$

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(\sqrt{np(1-p)} Z + np) = (\sqrt{np(1-p)})^2 \mathbb{V}(Z) = np(1-p)$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$. □

Remarque

Considérons n et p définis de telle sorte qu'on peut approcher la v.a.r. S_n (où $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$) par la v.a.r. Z_n (avec $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(np, np(1-p))$).

On devrait alors écrire :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}([S_n = k]) \simeq \mathbb{P}([Z_n = k])$$

Or, comme Z_n est une v.a.r. à densité, on a : $\mathbb{P}([Z_n = k]) = 0$.

Ainsi, l'approximation ci-dessus n'est pas bonne. On écrira plutôt :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) \simeq \mathbb{P}([k - 0,5 < Z_n < k + 0,5])$$

On appelle cela utiliser la **correction de continuité**.

Exercice

Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{B}(900, 0.5)$.

Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([405 \leq X \leq 495])$.

III.3.b) Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Théorème 8.

Soit $\alpha > 0$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes.

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1) Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^* : S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\alpha)$.

$$2) \quad S_n^* = \frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z, \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

3) Pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n\alpha, n\alpha)$.

Démonstration.

1) Déjà vu lors du chapitre sur les couples de v.a.r.

2) C'est une application directe du TCL.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= \mathbb{P}(S_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \leq \frac{x - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[S_n^* \leq \frac{x - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}\right]\right) \\ &\simeq \mathbb{P}\left(\left[Z \leq \frac{x - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}\right]\right) && \text{(pour une valeur de } n \\ & && \text{suffisamment grande)} \\ &= \mathbb{P}([\sqrt{n\alpha} Z + n\alpha \leq x]) = F_{\sqrt{n\alpha} Z + n\alpha}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sqrt{n\alpha} Z + n\alpha$ suivent approximativement la même loi pour n suffisamment grand.

Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale. On détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant espérance et variance de Z_n :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\sqrt{n\alpha} Z + n\alpha) = \sqrt{n\alpha} \mathbb{E}(Z) + n\alpha = n\alpha$$

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(\sqrt{n\alpha} Z + n\alpha) = (\sqrt{n\alpha})^2 \mathbb{V}(Z) = n\alpha$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n\alpha, n\alpha)$. □

Exercice

Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{P}(64)$.

Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([X \leq 74])$.

Exercice (d'après ESSEC 2007 - Maths II)

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(5k)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

On note α l'unique réel vérifiant $\Phi(\alpha) = 0,99$.

Justifier que 0,01 est une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left[X - 5k > \alpha\sqrt{5k}\right]\right)$, lorsque k est grand.

Exercice

On considère un dé équilibré.

L'expérience consiste à effectuer une succession de $n = 3\,600$ lancers.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la v.a.r. :

× égale à 1 si on obtient 1 lors du $i^{\text{ème}}$ lancer,

× égale à 0 sinon.

On note enfin $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ la v.a.r. qui compte le nombre de 1 obtenu au cours de l'expérience.

1. a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer la loi de X_i .

b) Déterminer la loi de S_n . Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

2. **À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

a) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|S_n - 600| > \varepsilon) \leq \frac{500}{\varepsilon^2}$$

b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}([600 - \varepsilon \leq S_n \leq 600 + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{500}{\varepsilon^2}$$

c) Démontrer enfin : $\mathbb{P}([540 \leq S_n \leq 660]) \geq \frac{31}{36}$.

3. **À l'aide de l'inégalité du TCL**

a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Expliquer pourquoi on peut considérer :

$$\mathbb{P}([nm + a\sigma\sqrt{n} \leq S_n \leq nm + b\sigma\sqrt{n}]) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)$$

b) En déduire une approximation de $\mathbb{P}([540 \leq S_n \leq 660])$.

On donne $\frac{6}{\sqrt{5}} \simeq 2,68$.

4. Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes.

Démonstration.

1. a) $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$.

b) • L'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli (1 lancer du dé) indépendantes, de même paramètre de succès $\frac{1}{6}$ (correspondant à la probabilité d'obtenir 1).

• S_n est la v.a.r. qui compte le nombre de 1 obtenu au cours de l'expérience.

Ainsi : $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$. On a alors :

$$\mathbb{E}(S_n) = 3\,600 \times \frac{1}{6} = 600 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = 3\,600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 500$$

2. a) Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \\ \parallel &\parallel \\ \mathbb{P}(|S_n - 600| > \varepsilon) &\leq \frac{500}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

b) Remarquons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n - 600| > \varepsilon) &= 1 - \mathbb{P}(|S_n - 600| \leq \varepsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}([-\varepsilon \leq S_n - 600 \leq \varepsilon]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([600 - \varepsilon \leq S_n \leq 600 + \varepsilon]) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } 1 - \mathbb{P}([600 - \varepsilon \leq S_n \leq 600 + \varepsilon]) \leq \frac{500}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{Ainsi : } \mathbb{P}([600 - \varepsilon \leq S_n \leq 600 + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{500}{\varepsilon^2}.$$

c) On choisit alors $\varepsilon = 60$ et on obtient :

$$\mathbb{P}([540 \leq S_n \leq 660]) \geq 1 - \frac{500}{(60)^2} = 1 - \frac{500}{3600} = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$$

Donc la probabilité que le nombre de 1 soit compris entre 540 et 660 est supérieure à $\frac{31}{36}$.

3. a) La suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est constituée de v.a.r. :

× indépendantes (le résultat d'un lancer ne dépend pas des précédents),

× de même espérance $p = \frac{1}{6}$,

× de même variance $\sigma^2 = p(1-p) = \frac{5}{36} \neq 0$.

On a de plus :

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{E}(S_n)}} = \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. D'après le théorème central limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([a \leq S_n^* \leq b]) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([nm + a\sigma\sqrt{n} \leq S_n \leq nm + b\sigma\sqrt{n}]) \\ &= \mathbb{P}([a\sigma\sqrt{n} \leq S_n - nm \leq b\sigma\sqrt{n}]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[a \leq \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right]\right) \quad (\text{car } \sigma\sqrt{n} > 0) \\ &= \mathbb{P}([a \leq S_n^* \leq b]) \\ &\simeq \Phi(b) - \Phi(a) \quad (\text{pour } n \text{ suffisamment grand}) \end{aligned}$$

(on peut aussi remarquer : $S_n = \sigma\sqrt{n} S_n^* + nm$, remplacer S_n par cette écriture en première ligne puis isoler S_n^*)

b) Ici : $n = 3600$, $m = \frac{1}{6}$ et $\sigma = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

On obtient alors :

$$\Phi(b) - \Phi(a) \simeq \mathbb{P}\left(\left[600 + 10\sqrt{5}a \leq S_n \leq nm + 10\sqrt{5}b\right]\right)$$

On souhaite connaître une valeur approchée de : $\mathbb{P}([540 \leq S_n \leq 660])$.

On choisit donc a tel que $10\sqrt{5}a = -60$ et $10\sqrt{5}b = 60$.

On obtient $a = -\frac{6}{\sqrt{5}}$ et $b = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([540 \leq S_n \leq 660]) &\simeq \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - 1 \end{aligned}$$

Or, par lecture de la table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) \simeq \Phi(2,68) \simeq 0,9963$$

D'où : $\mathbb{P}([540 \leq S_n \leq 660]) \simeq 0,9926$.

4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a obtenu :

$$\mathbb{P}([540 \leq S_n \leq 660]) \geq \frac{31}{36} \simeq 0,8611$$

On constate que :

× le théorème central limite donne une estimation plus précise de la valeur de $\mathbb{P}([540 \leq S_n \leq 660])$.

× l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit cependant une minoration valable pour toute réalisation de S_n . \square